ELEMENTA
ARITHMETICÆ
NUMERICÆ, ET LITERALIS
SEU
ALGEBRÆ
AD
PRÆFIXAM IN SCHOLIS NOSTRIS NORMAM
CONCINNATA

A
R. P. MAXIMILIANO HELL, è S. J.
ANTEHAC IN ACADEMIA CLAUDIOPOLITANA
TRANSYLVANIÆ MATHESEOS PROFESSORE
PUBLICO, NUNC IN UNIVERSITATE
VINDOBONENSI
ASTRONOMO CÆSAREO-REGIO.

EDITIO TERTIA.

VIENNÆ,
TYPIS ET SUMPTIBUS JOANNIS THOMÆ TRATTNER,
CÆS. REG. MAJEST. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.
M. DCC. LXI.

TYPOGRAPHUS
AD
LECTOREM.

Prima Arithmeticæ literalis Elementa, quorum tertiam Editionem facimus, Claudiopoli in Tranſylvania, ubi Author Matheſim profitebatur publicam, primam viderunt lucem Anno 1755. Prodiêre tum mille Exemplaria, uſibus Scholaſticis in plures annos, ut putabatur, ſuffectura. Bienniô elapſô vix pauca ſuper erant, diſtractis pene omnibus. Editionem itaque alteram, ut indulgeret Author rogatus, abnuit, ſpe otii habendi, quo promiſſas cæteras partes, *Analyſim ſublimiorem*, aut ſaltem *Geometriam* novo à ſe ſyſtemate conceptam adjungeret. Abiît annus, otium tamen Authori, Aſtronomica juſſu AUGUSTORUM tractanti non modo non datum, ut is novis omnino laboribus, in annos ſingulos creſcentibus obrueretur.

Expetitis ergò in Regiones exteras exemplaribus, cum nulla superessent, secunda in Polonia Editio, Authore inscio, prodiit; Quapropter desideratis Exemplaribus in nostris Regnis, perurgentibus amicis, cum spes otii *Geometriæ* componendæ nulla affulgeret Authori, precibus multorum tandem concessit, Editionemque hanc Tertiam nobis faciendam indulsit. Quamvis autem quædam ex his omittenda, alia etiam immutanda Author cuperet, à prima tamen Editione omnino non recedendum censuimus, eo, quod quæ placuêre hucusque, placitura etiam deinceps judicaremus, maxime, postquam intelleximus ex iisdem Elementis Arithmeticam Numericam, idiomate germanico concinnatam, in usus Scholarum inferiorum typis edendam esse
proxime.

PRÆ-

PRÆFATIO AUTHORIS

AD

LECTOREM.

Cum annis abhinc decem JOANNIS CRIVELLII *de Arithmetica literali Opusculo desideratis augendo, mendisque repurgando in usum Tyronum Philosophiæ properatam Altiorum Imperio operam locarem, nihil minus animo præceperam, quam & me penum Mathematicam scriptis subinde oneraturum. Tot quippe Recentiorum inventis optimis scientia hæc, vel mea ætate aucta, ut rectiora, aut non dicta prius adferri vix posse facile intelligerem, postquam mei olim in Mathematicis Professoris* Erasmi Frœlichii, *viri e Societate mea ab eruditis lucubrationibus per Europam clarissimi,* Introductio facilis in Mathesim ad usum Tyronum Philosophiæ Provinciæ Austriæ Soc. Jesu conscripta, *in usum publicum prodiit; Quanti hæc pretii nostris in Academiis usque sit, usus, quo in manibus Tyronum nostrorum etiam hodie versatur, palam facit. At enim mutata* *per Academias nostras Studiorum Ratione, præfixa Collegiis Mathematicis publicarum Prælectionum Norma opusculum postulabat, quo Prima* Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ, *atque* Trigonometriæ, *Principia Theoretica, & Practica, eaque usibus etiam communibus applicata, ita pertractarentur, ut primis Tyronum conatibus forent accommoda, essetque libellus materia plenus, mole parvus, regulis necessariis brevis, exemplis certo consilio electis longus, iisque prodesset maxime, quibus ne prima quidem Arithmetices principia innotuere. Hæc, nec præterea alia, quum, in unum concinnata opusculum, Authorem adbuc desiderabant, causam perspicis* L. B. *laboris tumultuarii in gratiam meorum Tyronum suscepti, quorum utilitati nolle consultum, ejus non esse putavi, qui se, suaque omnia* DEI *Gloriæ, omniumque commodis consecrasset. Jam vero, quæ præstitisse in hoc opusculo conatus fuerim paucis accipe.*

Methodum, *sectando Mathematicam, Theoriam Praxi ita sociare satagebam, ut è paucis* Theorematibus, *tanquam fontibus, utilissimorum Problematum copiam derivarem;* Problemata *necessariis duntaxat, iisque in casus distinctis regulis instruxi, Exemplis autem, & copiosis, & utilissimis declaravi; ex his* Corollaria *permulta deduxi; In* Scholiis *denique haud parcus, dubia resolvi, utilia monui, cumque mihi ejusmodi Tyronibus scribendum esset, ad quos vix nomen* Algebræ *usque penetraverat, multis opus erat, quibus*

bus futuram Analyſeos *utilitatem, mirandamque vim oculis ipſis exhiberem, generoſos cætera, at in ſcientia nova peregrinos animos, novis identidem ſtimulis ad æmulandos eruditarum gentium doctos labores, ac ſtudia incitarem; univerſim in id conatus meos intendebam unice, ut ſcientias Mathematicas, quibus á pueritia innutritus delector maxime, diſcentibus faciles, jucundas, utilesque comprobarem, obſcura, aut ambigua, quæ novis Tyronibus, plurium annorum doctus experientia, negotium faceſſere novi, partim declararem, partim ſurrogatis aliis, tollerem; finem hunc conſequendi gratia, etſi in concinnandis partibus ſingulis operam qualemcunque adhibuerim, præcipuam tamen in enucleandis penitius Elementis Algebræ impendiſſe me non diffiteor.*

Neque velim quispiam iſthic ſublimia quærat, Philoſophiæ Naturali *duntaxat* ancillari *cupio hæc mea Elementa non* dominari *diſciplinis Mathematicis, tametſi noverim, ea hujusmodi eſſe, quibus inſtructi Tyrones in Matheſi utraque pura nempe, & mixta, feliciſſimos ad DEI Gloriam, Patriæque utilitatem progreſſus facere valeant; Præterea iis quoque prodeſſe hiſce elementis volui, qui melioribus deſtituti præſidiis, Marte proprio, cumprimis Arithmeticam condiſcere ad uſus Civiles geſtiunt, horum gratia complura* Lector *reperiet, quæ iisdem uſibus deſerviant commode. Fruere itaque L. B. meosque ad DEI Gloriam conatus, eo velim ſuſcipias animo, quo damus.*

PROLEGOMENA
IN
MATHESIM UNIVERSAM
De Methodo Mathematica.

I.

Mathesis (voce Græca Μάθησις *Scientia*, vel *Disciplina* per Antonomasiam appellata) est *Scientia Quanti*. Dividitur in *Mathesim puram*, & *Mixtam*. Mathesis *pura* est scientia Quanti abstracti ab omni materia, habetque pro objecto quidquid numerabile, aut mensurabile est; cujusmodi sunt *Algebra* juncta *Arithmeticæ numericæ*, cum *Geometria pura*. Mathesis *mixta* dicitur, quæ materiis physicis applicatur, ejusmodi sunt; *Geometria mixta*, *Statica*, *Mechanica*, *Hydraulica* &c. Mathesis pura, scientia est certissima, *Mixta* secundum formam Mathematicam solum certa est, non item semper secundum materiam.

II. *Methodus mathematica* est ordo, seu modus quidam peculiaris, quo Mathesis utitur ad veritates suas inveniendas, demonstrandas, tradendasque. Dividitur hæc bifariam, in methodum

dum nempe *Analyticam*, & *Syntheticam*. Methodus *Analytica*, ſeu *Reſolutoria* inveniendis, detegendisque veritatibus famulatur; *Synthetica*, ſeu *Compoſitoria*, ea, quæ ope Analyſis reperta ſunt, in ordinem diſponit, veritatemque veritati ita componendo nectit, ut abs ſe invicem, non ſecus atque catenæ annuli, dependeant; inſervit hæc tradendis ſuis dogmatibus mathematicis. In Methodo itaque *Synthetica*, adhibentur I. *Definitiones*. II. *Poſtulata*. III. *Axiomata*. IV. *Experientiæ*. V. *Hypotheſes*. VI. *Propoſitiones*. VII. *Demonſtrationes*. VIII. *Theoremata*. IX. *Problemata*. X. *Porismata*, ſeu *Lemmata*. XI. *Corollaria*. XII. *Scholia*.

III. *Definitio* eſt diſtincta notio, vel explicatio Rei, aut Nominis, de quo agitur. *Ex.gr. Numerus* eſt ordinata unitatum multitudo.

IV. *Poſtulatum* dicitur, quod fieri poſſe, ab alio nobis facile concedendum poſtulamus. *Ex. gr. Ab uno puncto ad aliud ducere lineam.*

V. *Axioma* (Αξίωμα *dignum creditu*) eſt veritas perceptis rite terminis per ſe, vel ex terminis manifeſta, aut lumine naturæ nota. *Ex.gr. Totum eſt majus ſua parte.*

VI. *Hypotheſis* (Ὑπόθεσις *Suppoſitio*) ſunt res, vel ſigna rerum ad libitum ex inſtitutione hominum aſſumpta, *Ex.gr.* ſi loco vocis *Æquale* aſſumatur ſignum $=$, aut loco numeri 5 litera *a*, vel *b*, hujusmodi ſunt in Aſtronomia loco *Solis* ☉, loco *Lunæ* ☽, &c.

VII. *Ex-*

VII. *Experientia* eſt effectus quispiam ſive ſenſu externo, ſive interno perceptus ſimul, & cognitus, *Ex. gr.* dum ſtellæ, quæ interdiu non videbantur, ſole occumbente, nocte ſerena, conſpiciuntur. *Experientiæ* itaque ſunt tantum rerum ſingularium perceptiones cognitæ.

VIII. *Propoſitio* eſt enunciatio clara, & diſtincta propoſitæ alicujus veritatis, vel praxeos; & hinc duplex eſt *Speculativa*, aut *Theoretica*, & *Practica.* Speculativa propoſitio eſt enunciatio clara, & diſtincta veritatis cujuspiam, id eſt, quid rei cuipiam ſub certis conditionibus, aut etiam abſolute convenire poſſit, quid non. *Ex. gr. Si duo numeri invicem multiplicentur, idem factum producitur ſive primus in ſecundum, ſive ſecundus in primum ducatur. Propoſitio practica* dicitur, quæ aliquid faciendum, aut efficiendum proponit. *Ex. gr. Additionem numericam facere, ſeu addere numeros.* Porro utraque propoſitio ſubdividitur in *Conditionatam*, ſeu *Hypotheticam*, & in *Abſolutam. Hypothetica* eſt, quæ enunciat veritatem, aut aliquid efficiendum proponit ſub certis conditionibus; *Ex. gr. Si quatuor termini ſunt proportionales, erit factum duorum extremorum æquale facto mediorum.* Ubi ſub conditione proportionalitatis enunciatur æqualitas facti extremorum cum facto mediorum. *Abſoluta* eſt, quæ ſub nulla conditione proponitur. *Ex. gr. Quod multiplicatio componit, tollit diviſio.*

IX. *De-*

IX. *Demonstratio* eſt brevis argumentatio ex principiis jam certis deducta, qua intellectus convincitur ad affirmandum, vel negandum id, quod in propoſitione ſeu ſtatu quæſtionis affirmabatur, vel negabatur.

X. *Theorema* (*Θεώρημα Speculatio*) eſt complexum ex propoſitione ſpeculativa univerſali, & ex demonſtratione conſtans, ſeu eſt veritas propoſita ſimul, & demonſtrata. *Ex. gr.* Si proponatur hæc veritas: *Quod multiplicatio componi, tollit diviſio*, & ſimul per adnexam demonſtrationem id ipſum probetur, erit complexum hoc Theorema. Finitur Theorema, vel potius Demonſtratio his notis: Q. E. D. id eſt: (*Quod erat demonſtrandum.*

XI. *Problema* (*Πρόβλημα Propoſitum*, ſeu *res ad faciendum propoſita*) eſt complexum ex *Propoſitione practica*, ſeu quæ aliquid faciendum proponit, ex *Reſolutione*, qua res propoſita fieri docetur, & ex *Demonſtratione*, qua demonſtratur Reſolutionem datam rite factam eſſe, ut proponebatur. *Reſolutio* finiri ſolet his notis: Q. E. F. id eſt, *Quod erat faciendum.*

XII. *Poriſma* (*Πόρισμα Præparatio*, *Tranſitus*) eſt Theorema prævium, aut præmiſſum ad aliud ſequens Theorema, vel Problema aliquod illuſtre facilius, aut brevius demonſtrandum, vocatur etiam *Lemma* (*Λῆμμα acceptio*, vel *propoſitum.*

XIII. *Co-*

XIII. *Corollaria* ſunt veritates, vel praxes ex Definitione, Axiomate, Theoremate, vel Problemate ultro fluentes ſine adhibita, aut ſaltem quam ſimpliciſſima nova demonſtratione.

XIV. *Scholia* (Σχολια) ſunt adnotationes quædam poſt Definitiones, Propoſitiones, Corollaria &c. poſitæ, quibus obſcura declarantur, dubia reſolvuntur, uſus doctrinæ indicatur, eruditio aliqua proponitur, aut quidvis aliud ſcitu non injucundum adfertur, aut opportune monetur.

XV. Adhibentur quoque in hac methodo numeri Paragraphorum, ut horum ope, aliis in locis uſurpata nomina, aut veritates in memoriam, ſi forte excidiſſent, relegendo revocari facile queant, ſimulque, ut prolixæ earundem rerum, aut definitionum repetitioni via præcluderetur.

XVI. Methodus itaque Mathematica exigit, ut ante omnia voces, & res omnes clare, & diſtincte definiantur, præmittantur Axiomata, Hypotheſes, & Poſtulata, ſi iis opus ſit, dein ſtatus quæſtionis proponatur itidem diſtincte, clare, & breviſſime, id eſt, fiat Propoſitio clara, & diſtincta; facta Propoſitione id, quod propoſitum erat, & ſub iiſdem conditionibus, nec aliud, ſuccincte, & clare demonſtretur. In demonſtrationibus nihil adhibeatur, quod vel jam prius demonſtratum, definitum, aut declaratum non ſit; id maxime cavendum, ne ſuperfluum

fluum aliquid adferatur, ſed uno, alterove Enthymemate, aut Syllogiſmo *concluſio*, quæ identica ſit cum propoſitione facta, inferatur. Ex his utilia Corollaria deducantur, & Scholia ſubjiciantur, ſi opus ſit.

XVII. Ordo autem Propoſitionum, aut Theorematum caute obſervandus, ut maxime ſimplicia, & facillima antecedant, ex his ad ſublimiora tanquam per gradus quosdam progrediendum, in hoc progreſſu ita ſibi connexæ ſuccedant propoſitiones, & veritates, ut poſteriorem ex priore conſequi neceſſe ſit, itaque dependeant, ut poſteriores ſine prioribus conſiſtere non poſſint. Verum de methodo hac mathematica, quæ hic ſtrictim relata ſunt, fuſe videri poſſunt in eleganti Opuſculo *R. P. Philippi Steinmeyer, e S. J.* ſub titulo: *Regulæ præcipuæ methodi Mathematicæ, ſeu ſcientificæ, Auguſtæ Vindel. 1750. in 8vo.* Item *Illuſtr. Chriſtiani Wolfii, De Methodo Mathematica brevis commentatio*, Elementis ſuis Matheſeos præfixa.

MO-

MONITA
AD
TYRONES MATHESEOS,
De Methodo legendi libros Mathematicos.

I.

Definitiones intime sibi perspectas habeat Tyro Mathematicus, easque memoria non fallente retinere studeat, ac sæpius repetendo earum usum sibi familiarem reddat.

II. *Axiomata quoque (quæ, uti definitiones, fundamenta sunt primarum demonstrationum) e memoria sine hæsitatione depromere assuescat.*

III. *Propositionem factam, sive statum quæstionis propositum, & demonstrandum, aut practice efficiendum omnimode perspiciat, ac intelligat, ac si plures complectatur partes, singulas distincte cognoscat oportet, videatque, sub quibus conditionibus enuncientur; nec prius ad legendam, intelligendamque subjectam demonstrationem progrediatur, quam propositionem penitus sibi cognitam habeat.*

IV. *Non inutile videtur monitum quorundam, ut intellecta probe Propositione, si affirmativa sit,* negativam, *si negativa,* affirmativam *fingat esse veriorem, nec ante veram admittat, nisi intellectu per subjectam propositioni demonstrationem integre convicto.* Ex. gr. *Sit Propositio:* In omni proportione Geometrica factum extremorum est æquale facto mediorum. *Ante, quam ad legendam demonstrationem accedam, fingo non esse verum, aut saltem dubium videri, quod* in *omni* Proportione Geometrica factum extremorum, debeat esse æquale facto mediorum. *Neque enim quærenti veritatem, cum primis Mathematicam, quidpiam admittendum, aut affirmandum est, de cujus veritate intellectus convictus non sit, cum in dogmatibus Mathematicis, humana enunciantis authoritas nullius, aut certe non majoris ponderis esse debeat, quam vis argumentorum, seu propositæ rationes.*

V. *Dum demonstrationem legit, videat, an præmissas evidentes intelligat, si de sensu, aut veritate cujuspiam dubitet, citatum eo in loco paragraphum evolvat, omniaque, quæ sub eo numero continentur, relegat, & experietur dubium sibi omne de veritate sublatum. Hujusmodi enim dubium frequentissimum est Tyronum vitium propterea, quod, quæ antecesserunt, & in quibus propositiones*

tiones demonstrationum fundantur, Tyronibus facillime e memoria excidant. Unde, quæ exercitato clara, & manifesta sunt, ea Tyronibus obscura, & dubia videntur.

VI. *Non transiliat, aut prætermittat rem ullam non intellectam, præsertim, si adsit, quem consulat, eoque ordine singula legat, quo proposita habentur; certus namque sit, methodum Mathematicam hujusmodi esse, ut intelligentia veritatum posteriorum a priorum perspicuitate plene dependeat, nec de progressu sibi quis blandiatur, qui per saltum propositionum scientiam Mathematicam comparari posse existimat.*

VII. *Si veritas demonstrata quomodocunque in praxin deduci possit, per singulos casus variando exerceatur.*

VIII. *Propositiones practicas (præsertim Geometriæ) instrumentorum præscriptorum ope sive in charta, sive in campo, aut loco in propositione determinato resolutas, ipse exerceat, figuras delineet, construat, ac rite factas demonstret.*

IX. *Si Professore utatur explanante sua, aut alterius Mathematici typis vulgata dogmata, plurimum ad profectum confert, si materiam explanandam privatim prælegendo intelligere marte proprio studeat, non intellecta, aut dubia adnotet, explicantem Professorem absque mentis evagatione* (nam fixam mathemata mentem exigunt) *audiat attentus, si finita explanatione nondum sibi satisfactum advertat, tum consulat Professorem, aut cum intelligente quovis alio conferre non pudeat.*

X. *Modum operandi periti Professoris ad amussim æmuletur, eundemque constanter teneat cum primis in Algebra.*

XI. *Formulas Algebraicas (quarum nulla est, quæ Theorema, aut utile quoddam Problema non contineret) contemplari, quidque eloquatur, intelligere assuescat.*

XII. *Animadvertat ad methodum ipsam Mathematicam, quomodo, & quibus viis, e paucis cognitis ad ignota, e simplicibus, & quasi obviis ad sublimia detegenda feratur, eamque in aliis disciplinis seu tradendis, seu condiscendis usurpare conetur.*

XIII. *Universim notent Tyrones, ut cæteras disciplinas, ita Mathesim cumprimis exercitio, & usu frequentissimo comparari, conservarique.*

CON-

CONSPECTUS
PARTIUM, ET CAPITUM
Arithmeticæ numericæ.

PARS I.

De Natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

PARS II.

De Logistica Decimali.

PARS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ NUMERICÆ.

PARS I.

De natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

CAPUT I.

De Arithmetica in genere.

DEFINITIO I.

1. *Arithmetica Numerica* est ſcientia numerorum, hoc eſt, inquirendi in naturam Numerorum, ex qua certæ numerorum proprietates deductæ determinantur.

DEFINITIO II.

2. *Numerus* eſt ordinata unitatum multitudo.

DEFINITIO III.

3. *Unitas* eſt Principium Numeri.

COROLLARIUM.

4. Ad numerum itaque conficiendum binæ saltem Unitates requiruntur; hinc *dualitas* est numerus minimus.

HYPOTHESIS I.

5. Signa, *seu* notæ, *quibus Arithmetica numerorum utitur*, decem *sunt* : 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *quorum ultima figura* (0) *nihil significat, nisi ex novem aliis aliqua ante ponatur, & tum ejus valorem auget per* decem. *Enunciantur autem signa hæc hoc modo:* Unum, duo, tria, quatuor, quinqué, sex, septem, octo, novem, Zerus. *Vocantur hi numeri etiam* integri.

HYPOTHESIS II.

6. *Valor horum signorum :* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *ex institutione hominum dependet à solo ordine, loco, vel situ, in quo tale signum locatur, vel scribitur.*

HYPOTHESIS III.

7. *Ordo, sive locus cognoscitur à dextra sinistram versus progrediendo*, E. gr. *sint aliqua signa, sive notæ numericæ hoc ordine locatæ :* 1754. *tum dextima nota* 4, *valet tantum* unitates *simplices, sequens nota* 5, *valet tot* decades, *quot ipsa unitates significat ; quæ hanc consequitur, nempe* 7, *valet tot* Centenarios, *quot ipsa unitates denotat ; ultima denique* 1, *valet tot* Millenarios, *quot ipsa unitates significat.*

COROLLARIUM I.

8. Hinc liquet incrementum valoris numerorum ex loco desumptum, fieri sinistram versus per *Decades* antecedentium.

COROLLARIUM II.

9. Patet quoque, quod hæc signa *decem* sufficiant ad exprimendum quemcunque magnum numerum.

COROL-

COROLLARIUM III.

10. *Zerus* itaque omnem locum occupat, in quo ex significantibus notis novem, aliqua non ponitur; *E. gr.* in hoc ordine: 502, ubi 0 locum *decadum* occupare debet, ut numerus 5 locum *centenariorum* occupare possit; secus enim, si non occuparet *Zerus*, sed *E. gr.* scriberetur sic: 52, numerus 5 non *centenarios*, sed *decades* significaret. (§. 6. & 7.)

SHOLION I.

11. *Ratio hujus ordinis à dextra sinistram versus est, quia modus scribendi Orientalium (uti sunt Arabes, Hebræi, Turcæ &c. qui Arithmeticam invenerunt) est etiamnum à dextris sinistram versus; ipsa vero signa numerica (quæ literæ sunt Arabum) nos* Arabica, *ab Inventoribus Arabibus, appellamus.*

SCHOLION II.

12. *Ratio incrementi valoris per* decem *ab ipsa natura repeti debet, quæ hominem decem digitis, tamquam numerandarum rerum notis, & instrumentis dotavit. Digitis enim natura duce utimur in computando, quam diu Arithmeticæ regulis instructi non sumus.*

CAPUT II.

De Numeratione.

Species Arithmeticæ numerorum integrorum sunt quinque: *Numeratio*, *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*. De sola numeratione hoc capite, de aliis in sequentibus agetur.

DEFINITIO IV.

13. *Numeratio* est ars enunciandi, & scribendi quoscunque numeros secundum valores suos totales.

PROBLEMA I.

14. PROP. *Numerum quemcunque propositum enunciare.*

RESOLUTIO.

I. Propositum numerum inchoando à dextris sinistram versus (§. 11.) per *virgulas*, sive *commata* distingue

gue in classes, classi cuilibet tres notas assignando, & habebis in qualibet classe à dextris sinistram versus, *unitates*, *decades*, & *centenarios*. (§.7.)

II. Post dextimæ classis *virgulam* signa superne numerum *puncto uno*, quod *millenarios* designat; post secundæ classis *virgulam*, signa superne numerum una *virgula*, quæ *milliones* significat; post tertiæ classis *virgulam*, nota superne numerum iterum *puncto uno*, quod *millenarios millionum* significat; post quartæ classis *virgulam* nota superne numerum *duabus virgulis*, quæ *millionum milliones* significat: & sic semper alternando cum *punctis*, & *virgulis* à dextris sinistram versus progredere, donec signando numerum propositum absolvas.

III. Juxta signa apposita, enunciationem ordieris à sinistra dextram versus, virgulas *supernas* per *milliones*, puncta *superna* per *millenarios*, virgulas *infernas*, sive *commata* per *centenarios*, cæteras notas numericas per *decades*, & *unitates* appellabis, respiciendo semper ad virgulas, & puncta proxima dextram versus. Sed hæc viva voce magis clarescent.

Sit enunciandus, per puncta, & virgulas jam distinctus numerus:

	•			″			•			′			•				
8	5,	2	3	4,	7	8	9,	6	3	8,	2	5	7,	8	5	4.
Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates
Millenariorum Bimillionum.		Bimillionum.			Millenariorum Millionum.			Millionum.			Millenariorum.			Simplices.		

Igitur

Igitur numerum propositum sic enunciabis: Octuaginta quinque *millia bimillionum*, ducenti triginta quatuor *bimilliones*, septingenta octuaginta novem *millia millionum*, sexcenti triginta octo *milliones*, ducenta quinquaginta septem *millia*, octingenta quinquaginta quatuor folia *E.gr.* arborum.

Demonstratio hujus enunciationis patet ex cap. I. §. 6. ad 10. inclusive.

COROLLARIUM I.

15. Ex attenta hujus exempli contemplatione, liquet *primo*: puncta superne numeris apposita exprimenda esse per vocem *millia*, virgulas autem per vocem *millionum*, & quidem una virgula simpliciter per vocem *millio*; binæ virgulæ per voces *millionum millio*, seu brevius, per vocem *bimillio*; tres virgulas per voces *millionum millionum millio*, seu brevius *trimillio*, aut *trillio*; ita quatuor virgulas per vocem *quadrimillio*; quinque virgulas per vocem *quinimillio*; sex per vocem *seximillio*, & sic porro. *Secundo*: patet, ad numerum *millenarium* requiri quatuor notas numericas; ad *millionem* vero septem, ad *bimillionem* tredecim, ad *trimillionem* novemdecim, accremento videlicet sex notarum sequentium.

COROLLARIUM II.

16. Eodem modo enunciatur quivis alius numerus, in quo complures zeri reperiuntur, hoc solum notato, quod cum zerus nihil significet (§. 5.) zeri non enuncientur.

Sic numerum propositum: 3,020,000,056,004,300. ita enunciabis: tria millia viginti *bimilliones*, quinquaginta sex *milliones*, quatuor *millia* trecentæ *E.gr.* atomi.

CAPUT III.

De Additione Numerica.

AXIOMA.

17. Omnis numerus vel est *purus*, vel *mixtus*.

DEFINITIO V.

18. Numerus *purus*, five *abſtractus*, aut *diſcretus* eſt, qui ſolam multitudinem ſignificat abſtractam ab omni materia rei alicujus, ut ſi dicas: *tria*, *ſeptem*, *centum &c.*

DEFINITIO VI.

19. Numerus *mixtus*, ſive *concretus*, aut *materialis* eſt, qui præter multitudinem ſignificat ſimul materiam, ſive res, cujus eſt multitudo. Ut ſi dicas: *tres calami*, vel *ſeptem floreni*, aut *centum urnæ vini* &c. numerus *mixtus* dividitur in numeros *homogeneos*, & *heterogeneos*.

DEFINITIO VII.

20. Numeri *homogenei* ſunt, qui ſignificant res ejusdem ſpeciei, & denominationis, ut *quinque calami*, & *ſeptem calami*.

DEFINITIO VIII.

21. Numeri *heterogenei* ſunt, qui ſignificant res diverſæ ſpeciei, ſeu denominationis, ut *ſeptem calami*, & *octo urnæ vini*. Porro numeri *heterogenei*, vel ſunt *reducibiles*, vel *irreducibiles*.

DEFINITIO IX.

22. Numeri heterogenei *reducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci poſſunt, ut *duo floreni*, & *quinque groſſi*; nam duo floreni (germanici) valent bis viginti, ſeu 40. *groſſos*.

DEFINITIO X.

23. Numeri heterogenei *irreducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci non poſſunt, ut *tres calami*, & *quinque urnæ vini*.

SCHO-

SCHOLION.

24. *Adverte: numeros heterogeneos ſecundum ſe* irreducibiles *poſſe fieri* reducibiles, *ſi in quodam* tertio *conveniant, ut* tres equi, & ſeptem urnæ vini, *ſi conſiderantur quoad pretia pecuniæ, erunt reducibiles in ratione pecuniæ.*

AXIOMATA.

25. I. *Totum* eſt æquale omnibus partibus ſimul ſumptis, & viciſſim.

26. II. *Totum* eſt majus ſua parte.

27. III. *Pars* eſt minor ſuo toto.

28. IV. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt æqualia inter ſe.

SCHOLION.

29. *Axiomata hæc, quia lumine naturæ nota, demonſtratione non egent, ut adeo rigidiſſimi etiam Mathematum cultores ſuperfluitatis non immerito arguant factum* Cl. Chriſt. Wolffii, *qui hæc in ſuis Elementis Math. per propoſitiones identicas, nihilo ipſis axiomatibus clariores, demonſtravit.*

DEFINITIO XI.

30. *Additio numerica*, eſt collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum *totum*, quod totum *ſumma*, ſive *aggregatum*, aut *quæſitum* dicitur. Numeri vero colligendi vocantur *addendi*, aut *dati.*

COROLLARIUM.

31. Hinc ad additionem numerorum mixtorum requiritur homogeneitas numerorum.

PROBLEMA II.

32. Prop. *Additionem numericam facere*, ſive *addere numeros.*

Resolutio.

I. Numeri addendi homogenei ita ſub ſe invicem collocentur inchoando à dextris ſiniſtram verſus, ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c.

 II. Sic

II. Sic collocati numeri ſubducantur linea, ne addendi confundantur cum ſumma.

III. Inchoetur collectio à dextris, ſive ab unitatibus, & ſumma unitatum ſcribatur ſub linea directe infra unitates; eodem modo colligantur decades, & ſumma decadum ſcribatur infra decades, & ſic procedendum erit cum centenariis &c. *Vide exemplum I.*

IV. Quod ſi ſumma unitatum excreſcat ultra numerum novem, ſeu in ejusmodi numerum, qui duabus notis ſcribendus foret, ſcribatur tantum illa, quæ alias ad dextram ſcribi deberet, altera vero nota mente retenta, addatur numeris ſequentis claſſis decadum; idem obſerva in reliquis claſſibus. *Vide exempl. II. & III.*

V. Si addendi ſint *heterogenei reducibiles*, E. gr. floreni, groſſi, cruciferi ad flor. groſ. & crucif. collocentur ſub ſe invicem ita, ut crucif. reſpondeant cruciferis, groſſi groſſis, flor. florenis, & à minima ſpecie inchoando, collectio inchoetur ut ſupra; hoc ſolum notato, quod, quoties ſumma ſpeciei inferioris adæquat ſpeciem ſuperiorem, toties ſuperiori ſpeciei ſit addenda. *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

33. Additio numerica eſt collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum totum (§. 30) ſed *per reſolutionem hujus Probl.* in ſumma collecti habentur omnes numeri partiales & homogenei unitatum, decadum, centenariorum &c ergo in ſumma habetur totum (§ 25.) ergo in ſumma facta habetur additio numerica Q. E. D.

EXEMPL.

Exempl. I. Reg. III.

Addendi	2 4 3	A
	5 2 6	B
Summa	7 6 9	C

Exempl. II. Reg. IV.

Addendi	6 5 8	A
	8 7 4	B
Summa	1 5 3 2	C

Exempl. III. Reg. IV.

Addendi	6 2 0 7	A
	9 0 0 8	B
Summa	1 5 2 1 5	C

Exempl. IV. Reg. V.

	flor. germ.	gross.	crucif.	
	15	14	2	A
	9	18	2	B
Summa	25 fl.	13 gr.	1 xr.	C

Scholion I.

34. In exemplo quarto in serie cruciferorum scriptus reperitur tantum unus crucifer, quia quatuor cruciferi faciunt unum grossum & unum cruciferum, ideo tres crucif. seu grossus, additus est classi grossorum; item, quia ex classe grossorum, addita summa emergit 33 grossorum, 20 autem grossi faciunt florenum Germ. unum, ideo scribendi tantum sunt 13 grossi, & 20 grossi, seu florenus addendus classi florenorum, unde floreni emergunt 25.

Scholion II.

35. Eadem methodo adduntur quicunque alii numeri heterogenei reducibiles, ad quorum additionem prærequiritur notitia specierum tam superiorum, quam inferiorum in eodem genere. Sic si addendi sint centenarii, libræ, lothones, nosse debes, quod 32 lothones faciant libram, 100 libræ, centenarium &c. quorum notitia vel usu, vel ex aliorum libris, cumprimis ex Cl. Jo. Mich. Poetii Arith. item Casp. Eisenschmidii Disquisit. Nova de Ponder. & Mensur. comparanda erit, a quibus mutuatæ sunt tabellæ reductionum aliquæ in Parte III. adducendæ.

Scholion III.

36. Examen rite peractæ additionis sequenti capite IV. §. 44. ope subtractionis docebitur; nam reliquæ probæ omnes, puta per abjectionem 9 vel 7 ut vulgus Arithmeticorum docet, fallaces sunt, & erroneæ, quæ fallacia cuivis ad oculum exhiberi potest, si vel sola permutatio loci fiat in numeris summæ. Præter ea circa additionem bina monenda veniunt: Primo: Si nimis longa series addendorum occurrat, tutius operatio instituetur, si in partes aliquot longa hæc series per lineas dispescatur, & singularum partium summæ particulares in unam summam totalem colligantur. Secundo: Si sursum eundo additio facta est, repetatur eadem eundo deorsum, & si summæ congruant, probabile est, summam inventam non esse erroneam; moraliter certum, si a duobus facta additio in summa conveniat.

 CAPUT

CAPUT IV.

De Subtractione Numerica.

DEFINITIO XII.

37. *Subtractio numerica* est totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel saltem totius æqualis ab æquali toto ablatio. Numerus minor dicitur *subtrahendus*, major *minuendus*, numerus, qui facta ablatione remanet, vocatur *residuum*, vel *differentia*.

COROLLARIUM I.

38. In subtractione itaque duæ tantum series numerorum requiruntur, una major, altera minor, vel saltem æquales.

COROLLARIUM II.

39. Quia subtractio est ablatio, sequitur numerum majorem, à minore non posse subtrahi, nisi minor augeatur saltem ad æqualitatem.

COROLLARIUM III.

40. Ad subtractionem quoque requiritur homogeneitas numerorum mixtorum.

PROBLEMA III.

41. PROP. *Subtractionem numericam instituere, sive subtrahere numeros.*

RESOLUTIO.

I. Collocetur numerus minor sub majore ita, ut unitates respondeant unitatibus, decades decadibus &c. quemadmodum in additione (§. 32.) dictum.

II. Sub hisce numeris ducatur linea, sicut in additione factum est.

III. In-

III. Inchoetur ſubtractio à dextris ſiniſtram verſus, auferendo ſingillatim unitates minoris ab unitatibus majoris numeri, decades à decadibus &c. reſidua ſingula ſcribantur directe ſub linea infra illum numerum, cujus ſunt reſidua. *Vide exempl. I.*

IV. Si nota numerica inferior, ſeu ſubtrahenda, æqualis ſit ſuperiori, in loco reſidui ſcribatur zerus. (§. 10.) *Vide exempl. II.*

V. Si nota inferior major à ſuperiore minore, vel à zero veniat ſubtrahenda, aſſumatur in ſuperiore claſſe ex vicina eidem ſiniſteriore nota, una unitas, quæ unitas reipſa valet decem (§. 8.) & adjuncta numero minori, vel zero, fiat ſubtractio notæ inferioris à toto numero ſuperiore jam aucto una decade (§ 39.) numerus vero unitate mulctatus notetur puncto, quod in memoriam revocet, illum una unitate eſſe minorem. *Vide exempl. III.*

VI. Si in caſu ſubtrahendæ notæ inferioris majoris à minore ſuperiore, in loco numeri ſiniſterioris, unde concedenda eſſet unitas, reperiatur zerus, unitas hæc à numero proxime ſequente zerum concedatur, quæ translata ad zerum cum illo facit 10, â quo jam aucto, unitas (quæ valet 10) iterum concedatur ad augendum numerum minorem ſuperiorem. Notetur autem tam numerus unitate mulctatus, quam zerus puncto, ut intelligatur, zerum hujusmodi puncto notatum valere novem. *Vide exempl. IV.* Idem intelligendum, ſi in numero ſuperiore plures zeri ſe ordine conſequantur, hi enim transferendo conceſſam unitatém à numero illis proximo, omnes in novenarios mutantur. *Vide exempl. V.*

VII. Si

VII. Si zerus inferior à numero significante superiore veniat subtrahendus, pro residuo scribendus est suoerior. Si zerus à zero veniat subtrahendus scribatur in loco residui zerus. *Vide exempl. VI.*

VIII. Eædem regulæ servandæ sunt in subtractione heterogeneorum reducibilium, E. gr. flor. groff. crucif. inchoando scilicet subtractionem à specie minima; hoc solum notato, quod in casu concessionis Reg. V. & VI. concessa unitas à specie majore, tot valeat unitates, quod speciei minoris in illa continentur; E. gr. Si pro classe crucif. ex grossis unus concedatur, hic valet tres unitates, seu cruciferos; si unus flor. germ. concedatur ad classem grossorum, ille valet 20 unitates, seu grossos. *Vide exemplum VII.* sed & hæ Regulæ vivam vocem requirunt.

DEMONSTRATIO.

42. Subtractio numerica, est totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel totius æqualis à toto æquali ablatio (§. 37.) sed *per resolutionem hujus probl.* singulæ unitates minoris à singulis unitatibus majoris, decades à decadibus, &c rite ablatæ sunt, ergo facta est totius minoris numeri, & homogenei à toto majore ablatio, ergo facta subtractio numerica. Q. E. D.

PARADIGMA SUBTRACTIONIS.

EXEMPL. I. REG. III.

	A 8 7 9 4 5	
	B 5 5 4 3 2	*subtrah.*
Resid.	3 2 5 1 3	C *seu different.*
Prob.	8 7 9 4 5	A

EXEMPL. II. REG. IV.

	A 2 7 8 4 2	
	B 3 8 1 2	*subtrah.*
Resid.	2 4 0 3 0	C
Prob.	2 7 8 4 2	A

EXEMPL.

EXEMPL. III. REG. V.

A 8 6. 0. 5. 2
B 2 3 4 3 8 *subtrah.*
Resid. 6 2 6. 1 4 C
Proba 8 6 0 5 2 A

EXEMPL. IV. REG. VI.

A 8. 0. 6. 5. 0. 3 4
B 4 5 8 2 4 8 2
Resid. 3 4 8 2 5 5 2 C
Proba 8 0 6 5 0 3 4 A

EXEMPL. V. REG. VI.

A 7. 0. 0. 4. 0. 0. 3
B 5 4 2 3 6 5 8 *subtr.*
Resid. 1 5 8 0 3 4 5 C
Proba 7 0 0 4 0 0 3 A

EXEMPL. VI. REG. VII.

A 9 0 7 5
B 4 0 0 2 *subtrah.*
Resid. 5 0 7 3 C
Proba 9 0 7 5 A

EXEMPL. VII. REG. VIII.

	flor.	*groff.*	*crucif.*	
A	24	12	1	
B	13	18	2	*subtrah.*
Resid.	10	13	2	C
Proba	24	12	1	A

COROLLARIUM I.

43 Hinc proba *subtractionis* fit per *additionem*, si scilicet (ut factum est in omnibus exemplis) *subtrahendus* B addatur *residuo* C, prodire debet A, seu is numerus, à quo subtractum est; nam *residuum* C, tanquam *totum* continet omnes differentias unitatum, decadum &c. numeri majoris, & *subtrahendus* B continet pariter omnes partes subtractas unitatum, decadum &c. ejusdem numeri majoris (§. 41.) ergo *residuum* cum *subtrahendo* continet omnes partes numeri majoris, à quo *subtractio* facta est, ergo additæ adæquant numerum majorem (§. 25.)

COROLLARIUM II.

44. Examen itaque, seu proba additionis, quæ fit erroris, & fallaciæ expers, instituetur ope *subtractionis*: si enim in adducto (§. 33.) additionis exemplo I. hoc: à summa

A	2	4	3	
B	5	2	6	
Summa	7	6	9	C
Subtr.	5	2	6	B
Resid.	2	4	3	A

summa C subtrahatur numerus B, *qui est pars una summæ*, relinqui debet A numerus, *Pars altera* videlicet *summæ* C; si vero à summa C subtrahatur numerus A, relinqui debet numerus B. Eodem modo examen instituetur per reliqua additionis exempla superius adducta.

SCHOLION.

45. *In idem recidit praxis quorundam Arithmeticorum, qui in casu* Reg. V. & VI. (32.) *adducto, dum nota major inferior, à minore superiore, vel à zero subtradenda venit, unitatem concedendam non in serie superiore, sed in inferiore, à vicina nota mutuantur, eamque puncto notatam, una unitate non imminutam, sed auctam intelligunt.* E. gr. in Exempl. III. Reg. V. (§. 42.) *adducto sic operantur:* 8 à 2 subtrahi non potest, igitur concedo à vicino 3 unum, (id est, decem) & puncto signo, dicoque 8 à 12 auferendo manent 4. Deinde procedendo ad sequentem notam 3 puncto signatam, dico 4 (non 3) à 5 manet 1. porro 4 à 0 subtrahi non potest, ergo concedo à vicino 3, unum, & puncto signo, ajoque 4 à 10 auferendo manent 6. Deinde propter numerum 3 puncto signatum, dico 4 à 6 manent 2, & denique 2 ab 8 manent 6. *Quæ praxis etsi erroris expers sit, nostram tamen* (§. 41.) *traditam, huic præferendam esse, facilitas operandi, maxime cum zeri complures occurrunt, edocet.*

	8	6	0	5	2	A
Subtr.	2	3·	4	3·	8	B
Resid.	6	2	6	1	4	C

CAPUT V.

De Multiplicatione Numerica.

DEFINITIO XIII.

46. *Multiplicatio numerica* est dati alicujus numeri toties ad seipsum facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet. E. gr. *Multiplicatio* numeri 6 per numerum 3, est numerum 6 ter sumptum (tres enim unitates continet numerus 3) sibimet addere; nempe: 6, & 6, & 6 faciunt 18.

DEFI-

DEFINITIO XIV.

47. Numeri dati inter ſe multiplicandi vocantur *factores*, vel *efficientes*. Sic in exemplo (§. 46.) *factores* ſunt: 6 & 3, horum primus vocatur *multiplicandus*, ſecundus, *multiplicans*, vel *multiplicator*, & viciſſim. *Iterata* vero hujusmodi *additio*, vocatur *ductus* unius numeri in alterum. Summa ex *ductu* reſultans, vocatur *factum*, aut *productum*, ut in dato exemplo: ſumma 18. vocatur *factum*, ex *factoribus* 6 & 3 in ſe ductis, reſultans.

COROLLARIUM.

48. Hinc *multiplicare*, eſt ducere unum *factorem* in alterum *factorem*, ut inveniatur *factum*, in quo unus *factorum* toties contineatur, quot unitates habet alter *factor*. Sic in *facto* 18, *factor* 6 continetur ter, quia alter *factor* 3, continet tres unitates.

THEOREMA I.

49. PROP. *Quando duo numeri invicem multiplicantur, idem factum prodire debet, ſive primus in ſecundum, ſive ſecundus in primum ducatur.*

DEMONSTRATIO.

Reſolvantur *factores* E. gr. 6 & 3 in ſuas unitates, & eo ordine collocentur, quem figura exhibet:

	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1
			6			

Jam in hac figura, ſeu ſex unitates per tres lineas ſcriptas, ſeu tres unitates deorſum per ſex lineas ſcriptas computes, idem numerus 18 prodibit, ut patet ad oculum; igitur ſeu 3 *multiplicentur* per 6, ſeu numerus 6 multiplicetur per 3, idem factum producunt. Q. E. D.

SCHO-

SCHOLION.

50. *Quia tyrones difficultatem magnam ſentiunt in actuali multiplicatione, inveniendi facta particularia ſingularum notarum in ſingulas ductarum,* E. gr. *ſi quærant* factum *ex* 9 *in* 7, *ſeu ſepties novem quot ſunt? idcirco ex binis adminiculis alterutrum illis diſcendum erit, vel Reg.* Pigri, *quæ oretenus docebitur, vel* Tabula Pythagorica *ſemper ante oculos habenda, cujus conſtructionem, & uſum ſequentia Problemata edocent.*

PROBLEMA I.

51. PROP. *Tabulam Pythagoricam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Fiant cellulæ quadratæ tot, quot ſequens figura exhibet, & ordine eodem.

TABULA PYTHAGORICA.

	M	*b*								
a	1	2	*b*							
a	2	4	3	*b*						
a	3	6	9	4	*b*					
a	4	8	12	16	5	*b*				
a	5	10	15	20	25	6	*b*			
a	6	12	18	24	30	36	7	*b*		
a	7	14	21	28	35	42	49	8	*b*	
a	8	16	24	32	40	48	56	64	9	K
a	9	18	27	36	45	54	63	72	81	*b*
	N	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*

Videlicet I. ordo primus *a b* habeat duas cellulas, ſecundus *a b* tres, tertius *a b* quatuor &c. in primis novem cellulis M, N, ex parte ſiniſtra ſcribantur ordine deorſum 1, 2, 3 &c. usque ad 9.

II. Eodem modo in octo cellulis lineæ M, K, ad dextram, deorſum progrediendo, ſcribantur numeri 2, 3, 4 &c. usque ad 9.

III. In-

III. Inſcribantur facta particularia, quæ fiunt per ſolam additionem (vide cellulas *b d*) in prima ad ſiniſtram ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 2, ut *factum* habeatur in ſequente ejusdem ſeriei cellula inſcribendum, addantur 2 ad 2 & ſumma 4 inſcribatur cellulæ ſecundæ, ſeriei *b d*; huic numero 4 addatur iterum ſupremus numerus 2, erit ſumma 6, numerus tertiæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; huic numero 6 addatur iterum ſupremus 2, erit ſumma 8, numerus quartæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; & ſic addendo numerum 2 ad numerum 8, erit ſumma 10, numerus quintæ cellulæ; ad 10 addendo 2, erit ſumma 12, numerus ſextæ cellulæ; ad 12 addendo iterum 2, erit ſumma 14, numerus ſeptimæ cellulæ; ad 14 iterum addendo 2, erit ſumma 16, numerus octavæ cellulæ; ad 16 addendo iterum 2, erit ſumma 18, numerus nonæ ſeu ultimæ cellulæ, primæ ſeriei *b d*. Eodem modo operatio inſtituatur in ſecunda ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 3; pro numero itaque ſecundæ cellulæ, addatur numerus 3 ſibimet ipſi ter, id eſt 3 & 3 & 3 ſunt 9, pro numero tertiæ cellulæ, addatur numero 9 numerus 3, & ſumma 12 inſcribatur tertiæ cellulæ. Atque hac methodo progrediendum erit cum cæteris, donec omnes cellulæ in Tabula impleantur.

PROBLEMA V.

52. PROP. *Uſus Tabulæ Pythagoricæ.*

RESOLUTIO.

Sint multiplicandi intra ſe 8 & 6. Igitur regula univerſalis eſto: Numerum ex datis majorem *E.gr.* 8 quære in parte ſiniſtra cellularum M, N, minorem 6 in dextra cellularum M, K, communis concurſus dabit cellulam, in qua reperies numerum 48, ſeu *factum* ex 6 in 8; hæc regula continetur his verſiculis memoria mandandis:

Lævâ majorem, ſed dextrâ quære minorem,
Cellula communis, quod petis, illa dabit.

PROBLEMA VI.

53. PROP. *Numerum quemcunque per quemvis alium multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si multiplicans conſtet una nota numerica.*

I. Scribatur numerus *multiplicandus*, & infra ejus dextimam notam ſcribatur *multiplicans.*

II. Subducantur lineâ.

III. Inchoando à dextris, per *multiplicantem* multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* ope Tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ pigri.

IV. *Producta* ſingula ſcribantur infra lineam inchoando à dextris ſiniſtram verſus.

V. Si productum ex *multiplicante* in aliquam notam *multiplicandi* excreſcat ultra novem, ſeu in ejusmodi numerum, qui duabus notis ſcribendus foret, ſcribatur tantum nota dextima (*ut in Additione dictum*) & altera ſiniſtima, mente retenta, addatur producto novo, orto ex multiplicatione notæ ſequentis. *Vide exempl. I.*

CASUS II. *Si multiplicans conſtet duabus, vel pluribus notis.*

I Scribatur *multiplicans* infra *multiplicandum* à dextris ſiniſtram verſus, ita, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. reſpondeant. Quemadmodum in Additione (§. 32.) dictum.

II. Subducantur lineâ.

III. In-

III. Inchoando à dextris ſiniſtram verſus per dextimam *multiplicantis* notam, multiplicentur (*ope tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ Pigri*) omnes notæ *multiplicandi*, & infra lineam ſcribantur, ut in caſu I. dictum.

IV. Eodem modo; per ſecundam *multiplicantis* notam multiplicentur omnes notæ *multiplicandi*, ut prius, id ſolum notetur: quod initium ſcribendorum productorum fieri debeat ſub ſecunda nota *multiplicantis*.

V. Peracta multiplicatione, addantur facta partialia in unam ſummam, ut habeatur totum productum. *Vide exemplum II.*

VI. Et univerſaliter: *ſi multiplicans contineat plures notas*; multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* per ſingulas notas *multiplicantis*, à dextris ſiniſtram verſus, producta vero ſcribantur infra lineam ea lege, ut initium ſcribendi fiat ſemper infra eam notam *multiplicantis*, per quam multiplicatio inchoatur, & facta partialia in unam ſummam addita, dabunt productum totale. *Vide exempl. III.*

DEMONSTRATIO.

54. *Multiplicandus* in facto toties per datas regulas ſibimet ipſi additus eſt, quot unitates habet *multiplicans*, ergo *multiplicandus* toties continetur in facto, quot unitates habet *multiplicans* (§. 48.) igitur per has regulas factum eſt, quod petebatur. Q. E. D.

PARADIGMA MULTIPLICATIONIS.

EXEMPL. I. CASUS I.

Factores	*Multiplicandus*	6 8 4 7 3
	Multiplicans	2
Factum		1 3 6 9 4 6

EXEMPL. II. CASUS II.

Fact.	*Multipl.*	8 7 5 4 6 4
	Multipl.	3 6
Facta Partialia		5 2 5 2 7 8 4
		2 6 2 6 3 9 2
Factum		3 1 5 1 6 7 0 4

EXEMPLUM III. CASUS II. REGULA VI.

```
              4 3 7 5 6  multiplicandus \
                9 2 8 4  multiplicans   / Factores.
           ------------
Facta     1 7 5 0 2 4
partialia 3 5 0 0 4 8
          8 7 5 1 2
    3 9 3 8 0 4
    -------------------
    4 0 6 2 3 0 7 0 4  factum totale.
```

COROLLARIUM I.

55. Eodem modo peragitur multiplicatio numerorum *mixtorum heterogeneorum reducibilium*, modo vel ad speciem minimam prius reducantur, vel si prius non reducuntur, tunc, si factum inferioris speciei adæquet speciem superiorem, factum speciei inferioris ad productum speciei superioris addendum sit. *E. gr.* Sint multiplicandi 5 fl. germ. 13 gr. 2 cruc. per numerum 4, erunt reducti (per Tab. in Parte III. pecuniæ germ.) ad crucif. 341, qui per 4 multiplicati dant factum 1364 crucif. si vero non reducantur, operatio sic absolvetur, ut appositum exemplum docet.

flor.	*groff.*	*cruc.*
5	13	2
		4
22 *fl.*	14 *gr.*	2 *xr.*

COROLLARIUM II.

56. Si in fine unius factoris, vel utriusque simul, occurrant *zeri*, multiplicatio instituitur tantum per notas significantes, & in fine producti totalis adscribuntur tot *zeri*, quot erant in fine factorum. Si vero in loco intermedio *multiplicantis* occurrant *zeri*, omissis iis, multiplicatio peragitur per significantes, servata tamen Reg. IV. & VI. Casus II. ut servetur ordo subscribendi facta partialia.

COROLLARIUM III.

57. *Examen* rite peractæ multiplicationis fit per divisionem *Cap. sequenti* docendam: si nempe factum totale dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum.

CAPUT

CAPUT VI.

De Divisione Numerica.

DEFINITIO XV.

58. *Divisio numerica* est numeri minoris à majore toties facta subtractio, quoties minor in majore continetur. E. gr. *Divisio numeri 6 per numerum 3, est numerum 3 bis subtrahere à numero 6, quia nnmerus 3 bis in numero 6 continetur.*

DEFINITIO XVI.

59. Numerus major vocatur *dividendus*, minor appellatur *divisor*; numerus indicans quoties minor in majore continetur, vocatur *quotus*, vel *quotiens*; ut in dato supra exemplo: numerus 6 est *dividendus*, numerus 3 est *divisor*, numerus 2 indicans quoties 3 in 6 continetur, est *quotus*, vel *quotiens*.

COROLLARIUM I.

60. Itaque *dividere*, est quærere numerum (*quotum*) qui indicet, quoties numerus minor (*divisor*) continetur in majore (seu *dividendo*); & hinc signum recte inventi *quoti* est, si *divisor* toties contineatur in *dividendo*, quoties *unitas* in *quoto*.

COROLLARIUM II.

61. Cum *quotus* indicet numerum, quoties minor à majore subtractus sit (§. 58.), si numerus minor, seu *divisor* multiplicetur per *quotum*, id est, toties sibimet ipsi addatur, quot unitates habet *quotus* (§. 46. & 48.) debet *factum* restituere majorem, sive *dividendum*.

COROLLARIUM III.

62. Ex (§. 60.) constat, recte etiam definiri *divisionem*; quod sit *Partitio numeri majoris in tot partes, quot unitates continet minor*; *quotus* vero indicat unam hujusmodi partem. Hinc divisione utendum, dum totum aliquod in datas partes distribuendum, aut partiendum est. *E. gr.*

Si 24 flor. in 8 homines æqualiter distribuendi sunt, per divisionem reperietur *quotus* 3 floreni, qui unam ex 8 partibus indicant partem, dandam singulis ex 8 hominibus. Patet quoque (ex §. 39.) cum divisio sit repetita unius numeri ab alio subtractio, *divisorem* debere esse minorem *dividendo*, vel saltem æqualem.

PROBLEMA VII.

63. PROP. *Usus Tabulæ Pythagoricæ* (§. 51.) *si divisor constet una nota numerica.*

RESOLUTIO.

In parte *dextra* tabulæ quæratur nota *divisoris*, & hac reperta descendendo in eadem serie exquiratur in aliqua cellularum *dividendus*, vel ei proxime minor numerus, & correspondens eidem cellulæ in serie *sinistima* numerus, erit quotus quæsitus. *E. gr.* Sit *dividendus* 32, per *divisorem* 4; reperto in parte dextra numero 4, invenietur (descendendo in eadem serie) cellula numeri 32, cui correspondens numerus 8 in serie *sinistima*, erit *quotus* quæsitus; nam multiplicando divisorem 4 per quotum 8, factum 32 restituit dividendum (§. 61.) *Idem usus Tabulæ Pythagoricæ est*, si divisor constet pluribus notis numericis. *Ut patet, ex regul. III. casus II. Probl. sequent.*

PROBLEMA VIII.

64. PROP. *Dividere numerum datum quemvis majorem per datum alium minorem.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si divisor constet una nota numerica.*

I. Infra notam dividendi sinistimam (si ea major sit, quam nota divisoris, aut saltem notæ divisoris æqualis) subscribatur divisor. *Vide exempl. I.* Si vero nota sinistima dividendi minor sit, quam nota divisoris, scribendus

bendus erit divisor sub secunda nota sinistima *dividendi. Vide exempl. II.*

II. Formetur ad latus dextrum dividendi *lunula*, seu hoc (Signum, pro loco scribendi *quoti.*

III. Ope Tabulæ Pythagoricæ Methodo (§.63.) tradita, investigetur quoties divisor contineatur in nota, vel notis dividendi suprascriptis divisori, & quotus inventus scribatur post lunulam.

IV. Per hunc quotum multiplicetur divisor, factum sive productum exacte scribatur sub nota, vel notis dividendi iisdem, cum quibus actu operatio exercetur.

V. Ducta linea infra hoc ipsum productum ex multiplicatione divisoris per quotum enatum, subtrahatur à nota, vel notis dividendi hoc productum, & si quid remanet ex subtractione, infra lineam ductam suo loco scribatur residuum.

VI. Deponatur sequens dividendi nota ad notam residui ex priori operatione relicti dextram versus; aut si nihil remansit, sola nota dividendi deponatur infra lineam ductam, cui denuo subscribatur divisor, nota vero in *dividendo* eadem, quæ deposita est, *commate* vel *virgula* signetur, ad evitandum errorem, ne secundo deponatur.

VII. Cum his notis iterum inquiratur *per regulam III.* in quotum, & quotus inventus scribatur post lunulam ad prioris quoti latus dextrum; deinde *per reg. IV. divisor* cum hoc recenter invento *quoto* multiplicatus, & subscriptus, subtrahatur *per reg. V.* quo facto iterum deponatur sequens ex dividendo nota, & operatio *per regulas III. IV. & V.* repetatur cum residuis dividendi notis usque ad ultimam notam inclusive. *Vide exempl. I. & II.* Si quid ex subtractione ultima

 remanet,

remanet, ſcribatur per modum *fractionis*, id eſt: ad partem dextram quoti ducatur lineola, ſupra quam ſcribatur numerus *reſiduus*, infra vero lineolam ſcribatur *diviſor*. *Vide exempl. II.*

CASUS II. *Si diviſor conſtet pluribus notis numericis.*

I. In ſubſcribendo diviſore infra dividendum ſervetur eadem *regula I. caſus I.* attendendo ſcilicet ad ſiniſtimam notam tum *dividendi*, tum *diviſoris*.

II. Eodem modo obſervetur *reg. II. caſus I.*

III. Inquiratur ope tabulæ Pythagoricæ (§. 63.) quoties ſiniſtima diviſoris nota contineatur in ſiniſtima, vel ſiniſtimis dividendi notis, & quotus repertus ſcribatur poſt lunulam, ut in *reg. III. caſus I. dictum.*

IV. Per hunc quotum multiplicentur *omnes notæ* diviſoris, & videatur, an hoc productum non ſit majus, quam notæ dividendi ſupra diviſorem ſcripti; quod ſi majus reperiatur hoc productum, ſignum eſt, *quotum* eſſe magnum reſpectu totius diviſoris, & hinc una, vel duabus unitatibus minuendum, donec productum ex quoto in diviſorem, vel ſit æquale, vel proxime minus notis *dividendi*.

V. Subtrahatur hoc productum à notis dividendi ſupra ſcriptis diviſori (videatur deinde an reſiduum non ſit majus ipſo *diviſore*, tali enim caſu augendus eſſet quotus una, vel duabus unitatibus, cum ſignum ſit nimis parvi quoti) deinde ex dividendo deponatur ad reſiduum (ſi quod remanſit) una nota, ac ſubſcripto diviſore toto, iterum *per reg. III. & IV. hujus caſus*, inquiratur in novum *quotum*, deinde *per reg. V.* ad inventum reſiduum deponatur iterum una nota *dividendi*; atque ſic procedatur usque ad ultimam notam dividendi *incluſive*. *Vide exempl. III.* Si quid ex ultima ſubtractione remanet, ſcribatur per modum fractionis, ut in *reg. VII. caſus I.* dictum eſt.

SCHO-

SCHOLION.

65. *Quod si in operatione* reg. VII. casûs I. & reg. V. casûs II. *residuum cum deposita nota dividendi minus sit, quam* divisor, *scribatur post lunulam* zerus, & *ex dividendo adhuc una nota ad hoc residuum deponatur, quod si adhuc* divisor *major esse deprehendatur, iterum scribendus erit* zerus *post lunulam*, & *deponenda adhuc una nota ex* dividendo, *donec residuum sic auctum, majus sit ipso divisore, vel saltem eidem æquale, ut dividi possit.* Vide exempl. IV. Secundo: *Divisio heterogeneorum reducibilium eadem methodo exercetur, si prius ad speciem minimam reducantur.* Vide Partem III.

DEMONSTRATIO.

66. CASUS I. Ex ipsa operatione per has regulas liquet; *quotum* inventum indicare, quoties *divisor* contineatur in singulis millenariis, centenariis, decadibus & unitatibus, hoc est, in toto *dividendo* (§. 25.) quapropter unitas in *quoto* toties continetur, quoties *divisor* in *dividendo* (§. 60.) ergo per has regulas recte peracta habetur divisio. Q. E. D. *Eadem est demonstratio casûs II.*

PARADIGMA CASUS I.

EXEMPLUM I.

Positiones		quoti
I. *Divid.*	5, 6, 9, 4, 6	28473
Divisor	2	
fact. subt.	4	
II. *Divid.*	1 6 . . .	
Divisor	2 . . .	
fact. subt.	1 6 . . .	
III. *Divid.*	- - 9 . .	
Divisor	2 . .	
fact. subt.	8 . .	
IV. *Dividend.*	1 4 .	
Divisor	2 .	
factum subt.	1 4 .	
V. *Dividend.*	- - 6	
Divisor	2	
factum subtr.	6	
ultimum resid.	0	

EXEMPLUM II.

Positiones		quoti
I. *Divid.*	2 6, 9, 4, 8	8982⅔
Divisor	3 . . .	
fact. subt.	2 4 . . .	
II. *Divid.*	2 9 . .	
Divisor	3 . .	
fact. subt.	2 7 . .	
III. *Divid.*	2 4 .	
Divisor	3 .	
fact. subt.	2 4 .	
IV. *Divid.*	- - 8	
Divisor	3	
fact. subt.	6	
Residuum ultim.	2	

PARA-

PARADIGMA CASUS II.

EXEMPLUM III.

I. *Divid.*	1 3 8 9,3,8,	(*quoti* 547
Divisor	2 5 4 . .	
fact. sub.	1 2 7 0 . .	
II. *Divid.*	1 1 9 3 .	
Divisor	2 5 4 .	
fact. subtr.	1 0 1 6 .	
III. *Divid.*	1 7 7 8	
Divisor	2 5 4	
fact subtr.	1 7 7 8	
Resid. ultim.	0 0 0 0	

EXEMPLUM IV.

I. *Divid.*	3267,8,3,	(*quoti* 602 $\frac{499}{542}$
Divisor	542 . .	
fact. subt.	3252 . .	
II. *Divid.*	- - 1 5 8 .	
Divisor	5 4 2 .	
III. *Divid.*	1 5 8 3	
Divisor	5 4 2	
fact. subtr.	1 0 8 4	
Resid. ultim.	4 9 9	

SCHOLION I.

67. Examen *rite inventi quoti, seu bene peractæ divisionis est, si* quotus *multiplicatus per* divisorem, & *addito ad factum residuo (si quod superfuit) restituat exacte* dividendum (§. 61.) *hinc in* exemplo I. quotus 28473, *multiplicatus per* divisorem 2, *producit factum* 56946, *qui numerus idem est cum* dividendo. *Item in* exemplo II. quotus 8982 *multiplicatus per* divisorem 3, *facit* 26946, & *cum addito ex divisione residuo* 2, *facit* 26948, *qui erat* dividendus.

SCHOLION II.

68. *Methodum hanc nostram dividendi per positiones particulares, (ut exempla docent) præferendam esse modo dividendi, quem vulgus Arithmeticorum & adhibet, & tyrones suos edocet, in quo tyrones jubentur:* Residuas ex facta subtractione notas superscribere notis dividendi iis, à quibus remanent, *nemo non videt; præterquam enim, quod ex hujusmodi residuis turritim supra dividendum congestis, & per lituras commaculatis, confusio non levis, & hinc difficultas non exigua, præsertim tyronibus, inoperando oriatur, si operantem errare contingat, is errorem hunc, peracta divisione per examen* (§. 67.) *detectum, corrigere nequit, nisi totam operationem non sine tædio repetat; è contra in nostra methodo, & confusio evitatur, unde error præsertim in quoto, non facile admittitur, & si admissus foret, in particulari sua positione illicò reperitur, & denique demonstrativa divisionis natura* (§. 58.) *ad oculum patescit.* Placuit exempli gratia subjicere oculis tyronum *exemplum nostrum III.* in formam divisionis vulgaris redactum.

SCHO-

SCHOLION III.

69. *Tyrones admonitos volo, sequentia Corollaria familiaria sibi redd nt, in quibus, & erroris evitatio docetur, & compendia utilia ex regulis, & exemplis supra (§. 64, 65, & 66.) traditis, deducuntur, & denique dubia in particularibus operationibus occurrentia resolvuntur.*

17
1197
138938 (547
25444
1270
25
1016
25
1178

COROLLARIA.

Ad facilitandum Tyronibus usum divisionis ex datis regulis, & exemplis deducta.

70. Ex contemplatione datorum supra exemplorum, liquet *primo:* tot notas habere *quotum totalem* peracta divisione tota, quot fuerunt positiones particulares divisoris, quas in adductis exemplis denotant numeri marginales I, II, III, &c. liquet *secundo:* tot quoque habere notas *quotum totalem*, quot notæ restant in *dividendo* (facta videlicet rite prima subscriptione divisoris) quibus nulla *divisoris* nota subscripta est, una cum adjuncta nota quoti emergendi ex prima subscriptione; sic in *exemplo I.* quotus totalis habet *quinque* notas, quot nempe fuerunt positiones particulares designatæ per I, II, III, IV, V. Et in *eodem exemplo I.* ex prima subscriptione *divisoris* 2. quatuor restant in dividendo notæ, quibus addita nota primæ positionis, simul efficiunt *quinque* notas, & tot etiam habet notas *quotus totalis.*

71. II. In positionibus particularibus, *quotus particularis* nunquam potest esse major, quam 9.

72. III. Quandoin *casu II. problematis VIII.* inquiritur, quoties sinistima *divisoris* nota, in sinistima, vel sinistimis notis *dividendi* contineatur; videatur simul, an reliquæ notæ *divisoris* toties etiam in sibi superscriptis notis *dividendi* contineantur. Facit hæc animadversio, ne *quotus particularis* justo major accipiatur. *Vide I. positionem exempli III. casus II.* ubi n *dividendo:* 1389: *divisoris:* 254, nota sinistima 2, in 13 continetur quidem sexies, sed quia 5 in 8; & 4 in 9, non continetur sexies, ideo 2 in 13 non sexies, sed quinquies (ut, *prima nota quoti docet*) acceptum est.

73. IV

73. IV. Si contingat *factum particulare* ex *quoto* in *divisorem* esse *majus*, quam *dividendum particularem*; signum est, *quotum particularem* esse justo *majorem* acceptum; atque adeo, una, vel duabus unitatibus *minuendum*; & per *minutum quotum* repetendam esse multiplicationem *divisoris*, donec factum subtrahendum, aut æquale sit *dividendo particulari*, aut *illo* proxime *minus*. *Vide reg. IV. casûs II.*

74. V. Si facta subtractione, ex dividendo particulari *residuum* maneat *majus*, quam *divisor*, signum est, *quotum particularem* esse *parvum*, adeoque *augendum* una, vel duabus unitatibus, & facta per *auctum quotum* multiplicatione *divisoris*, novum factum resultans esse subtrahendum *à dividendo*. *Vide reg. V. casûs II.*

75. VI. Si *divisor* habeat in fine *Zeros*, possunt (compendii gratia) his ex *divisore* abscissis, rescindi etiam totidem notæ dextimæ in *dividendo*, & cum reliquis tam *dividendi*, quam *divisoris* notis, institui potest operatio; sed *notandum*: quod peracta tota divisione, abscissæ notæ dividendi, una cum ultimo residuo (si quod fuit) scribi debeant per modum fractionis, subscripto toto *divisore*, ut *monet Reg. VII. casûs I.* Sic, si *dividendus* foret 857,32: per *divisorem* 3,00; abscissis duobus zeris *divisoris*, & duabus ultimis notis *dividendi* 32, (ut adjecta commata notant) essent tantum *dividendi* 857, per *divisorem* 3, ex qua divisione *quotus totalis* emergit: 285 $\frac{232}{300}$.

76. VII. Si tam *divisor*, quàm *dividendus* habeant in fine *zeros numero æquales*, iis utrinque simpliciter deletis, cum reliquis notis tantum operatio instituatur. Sic, si *dividendus* sit: 435,000, per *divisorem*: 24,000, abscissis utrimque *zeris tribus*, erit *dividendus* 435, per *divisorem*: 24. *Hujus compendii ratio dabitur* in Algebra. *Secundo*: Si in fine *dividendi* plures sint *zeri*, quam in fine *divisoris*; tali casu, tot tantum in *dividendo*, quot in *divisore* deleri possunt, nec plures; ita, si *dividendus* foret: 8920,00, per *divisorem*: 356,00; abscissis utrimque *duobus zeris*, (nam tot in *divisore* reperiuntur) erit *dividendus*: 8920; per *divisorem*: 356. *Tertio*: Si *dividendus* habeat quidem *zeros in fine*, non item *divisor*; tali casu, nec in *dividendo*, nec in *divisore* quidquam rescindi potest. *Notandum*: in hoc corollario tantum agi de *zeris finalibus*, non vero de *interme-*

termediis, ſeu poſitis inter notas ſignificantes. Sic, ſi foret *dividendus*: 320024 per *diviſorem*: 2003; integri permaneant, eſt neceſſe.

77. VIII. Sicut *unitas* non multiplicat, ita etiam *unitas* non dividit. Hinc, ſi *diviſoris* nota ſiniſtima ſit 1, & reliqua notæ omnes ſint *zeri*, peracta habebitur diviſio, ſi ex *dividendo* tot notæ dextimæ abſcindantur (per § 75.) quot ſunt *zeri* in *diviſore*, & *quotus* erit abſciſſæ illæ ſiniſtimæ notæ *dividendi*. Ex abſciſſis vero dextimis *dividendi* notis ſignificantibus fiat *fractio*. Sic, ſi *dividendus* foret: 367,245, per 1000; erit *quotus*: 367 $\frac{245}{1000}$.

78. IX. Quotus particularis (in quo inveniendo tota conſiſtit difficultas *diviſionis*) facile invenitur, ſi per *quotum particularem* circiter acceptum, multiplicentur *mentaliter* primæ ſiniſtimæ notæ diviſoris, & videatur, an ſumma reſultans non ſit major, quam ſupraſcriptæ *dividendi* notæ.

SCHOLION.

79. *Etſi plura ſuperſint diviſionis* compendia, & praxes, *has inſinuaſſe ſufficiat tyroni, ex quibus ad cætera facile datur gradus. Praxim tamen dividendi per ſolam ſubtractionem (quam primo loco docendi erat animus) ſubjungere placet, quæ uti definitionem* diviſionis *à nobis* (§. 58.) *datam, claram facit, ita, ſi per* diviſorem *ex multis notis numericis* compoſitum, *operatio occurrat, diviſionem, Methodo & facili, & certa, & admodum compendioſa per ſolam ſubtractionem abſolvit. Sit igitur:*

PROBLEMA IX.

80. PROP. *Diviſionem per iteratas ſubtractiones numeri minoris à majore abſolvere.*

CONSTRUCTIO TARIFFÆ.

Ante operationem; ex diviſore dato fac multipla omnia usque ad noncuplum; quæ hac ratione facile obtinentur per ſolam additionem; *(Vide Tariff. f.* 31.*)*

I. Scripto ad latus aliquod extra dividendum *diviſore* A, (ut in *Tariffa poſitum vides*) ducatur ad latus dextrum hujus diviſoris *linea* deorſum, poſt hanc lineam è regione *diviſoris ſcribatur numerus* 1.

II. Mul-

II. Multiplica diviſorem per 2, vel (quod idem eſt) addatur ad ſeipſum diviſor, & factum B ſcribatur infra eundem diviſorem, è regione vero illius poſt lineam ſcribatur numerus 2.

III. Huic facto B addatur primus diviſor A, & habebitur numerus C, cui poſt lineam reſpondeat numerus 3. Huic numero C addatur iterum diviſor A, & habebitur numerus D, cui poſt lineam adſcribatur 4. Huic numero D addatur iterum diviſor A, & habebitur numerus E, cui poſt lineam correſpondeat 5. Huic E addatur iterum diviſor A, & obtinebitur numerus F, cui poſt lineam adſcribatur 6. Huic numero F addatur iterum diviſor A, & obtinebitur numerus G, cui poſt lineam reſpondeat 7. Huic numero G addatur iterum diviſor A, & habebitur numerus H, cui poſt lineam adſcribatur 8. Denique numero H additus diviſor A, producit numerum I, cui poſt lineam reſpondeat 9. Multipla hæc eo ordine expreſſa, vocantur uno nomine: *Tariffa.*

RESOLUTIO.

I. Facta rite prima ſubſcriptione diviſoris infra dividendum, ut (§. 64.) dictum, videatur quinam numerus ex *Tariffa*, aut *æqualis*, aut proxime *minor* ſit omnibus notis dividendi ſupra diviſorem ſcriptis; quo reperto, ſubſcribatur is infra dividendi notas, numerus vero in *Tariffa* poſt lineam eidem numero reſpondens, in loco quoti ſcribatur; ut factum vides in *exemplo ſubjuncto in I. Poſitione ſub lit. D.*

II. Subſcriptus ex *Tariffa* numerus D, ſubtrahatur à dividendo, & ad reſiduum (ſi quod eſt) deponatur iterum una nota ex *dividendo*, ut (§. 64. Reg. VI.) dictum. *Vide in exemplo ſubjecto* poſitionem II.

III. Vi-

III. Videatur iterum, quisnam ex *Tariffa* numerus reſpondeat proxime *minor*, vel *æqualis* huic reſiduo aucto unâ notâ *dividendi*, & repertus, ſubſcribatur reſiduo aucto, ac ſubtrahatur; numerus vero in *Tariffa* poſt lineam eidem reſpondens, in loco quoti ſcribatur. Atque ſic procedendum erit in omnibus poſitionibus usque ad ultimam dividendi notam depoſitam. *Vide exemplum ſubjectum in numeris parvis exhibitum* in gratiam tyronum.

DEMONSTRATIO.

Conſtructio *Tariffæ*, ſeu multiplorum diviſoris, patet ex (§. 46.) reſolutio vero liquet, ex (§. 58. & 81.)

Exemplum diviſionis ope ſubtractionis iteratæ factum.

TARIFFA.

		quoti
A—	- 3 4	1 — k
B—	- 6 8	2 — l
C—	1 0 2	3 — m
D—	1 3 6	4 — n
E—	1 7 0	5 — o
F—	2 0 4	6 — p
G—	2 3 8	7 — q
H—	2 7 2	8 — r
I —	3 0 6	9 — s

RESOLUTIO.

I. *Dividend.*	1 6 4, 9, 4, 0, 8,	n r o k l / 4 8 5 1 2
Diviſor	3 4	
D *ſubtrah.*	1 3 6	
II. *Reſid. auct.*	2 8 9 . . .	
H *ſubtrah.*	2 7 2 . . .	
III. *Reſid. auct.*	1 7 4 . .	
E *ſubtrah.*	1 7 0 . .	
IV. *Reſid. auct.*	- 4 0 .	
A *ſubtrahend.*	- 3 4 .	
V. *Reſid. auct.*	- - 6 8	
B *ſubtrahend.*	- - 6 8	
	0 0	

COROLLARIUM.

81. Hinc liquet I. diviſionem numericam recte definitam eſſe (§ 58.) quod ſit *numeri minoris à majore toties facta ſubtractio, quoties minor in majore continetur.* II. Patet, per hanc dividendi methodum, certum ſemper obtineri quotum particularem. III. Liberum eſſe operantem à multiplicatione facienda. Et hinc IV. patet, fieri poſſe divi-

divisionem absque notitia regularum multiplicationis, & absque tabula Pythagorica, aut regula pigri, modo operans sciat *addere*, & *subtrahere*. V. Constat, si divisor sit admodum magnus, hac methodo operantem multo citius, & certius absolvere divisionem, quàm *methodo ordinaria* exercitatissimus etiam Arithmeticus persolvere queat.

SCHOLION.

82. *Hæc erant, quæ summatim ad captum tyronum (omissis interea de natura numerorum theorematibus sublimioribus) tractanda censuimus; ex quibus apparet reipsa duabus tantum operationibus*, additione & subtractione *omnes Arithmeticæ Algorithmos absolvi, nec enim numerus alias mutationes subire potest, quam, vel ut fiat* major, (*quod fit* addendo) *vel* minor, *quod fit* subtrahendo. *Jam ordo postularet agendi de fractionibus vulgaribus, quas (quia hæ faciliore longe methodo in Algebra demonstrantur) ad calculum literalem reservamus, & harum loco in parte secunda hujus Arithmeticæ*, Logisticam Decimalem Geometricam *praxi Geometricæ, & Experimentis in Philosophia naturali tum instituendis, tum explicandis summe necessariam, exponemus.*

FINIS PARTIS I.

ARITH-

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS II.

DE LOGISTICA DECIMALI, SEU *De quatuor Speciebus Arithmeticæ decimalis Geometrarum.*

Arithmetica decimalis Geometrarum, quam alii nomine *fractionum decimalium* appellant, à quibusdam in Geometria, cujus ope calculos suos Geometræ faciunt, ab aliis post doctrinam fractionum vulgarium tractanda suscipitur. Nos ordinem doctrinæ naturalem sectantes, eam nec Geometriæ permiscendam (ne regulis Arithmeticæ filum Geometriæ rumpamus) nec ad doctrinam fractionum vulgarium rejiciendam putavimus, utpote, quæ nihil cum iis commune habet, præter inane, ac triste tyronibus nomen *fractionis*, sed absolutis numerorum integrorum algorithmis, (cum Logistica decimalis iisdem Arithmeticæ integrorum regulis utatur) tractandam hac parte suscipimus.

CAPUT I.

Hypotheses numerorum Decimalium.

HYPOTHESIS I.

83. Q*uemadmodum* Geometræ, *ita* Philosophi naturales *in determinandis suis magnitudinibus* (*seu eæ sint* longitudinum *tantum, id est,* linearum; *seu* longitudinum *simul &* latitudinum, *id est,* arearum, & superficierum; *seu demum sint* longitudinum, latitudinum, & profunditatum, *id est,* corporum) *utuntur mensuris, quas vocant* perticas, pedes, digitos, lineas &c.

HYPOTHESIS II.

84. Pertica simplex (*considerando videlicet secundum longitudinem tantum*) *dividitur in* decem *partes, quas vocant Geometræ* pedes, & *hinc etiam* perticam *appellant*, decempedam; pedem unum *iterum dividunt in decem* digitos, & *hinc* decempeda *habet* 100 digitos. Digitum *porro subdividunt in decem* lineas, & *hinc* decempeda *habet* 1000 lineas, & *ita porro progrediuntur.*

COROLLARIUM I.

85 Hinc liquet, species inferiores in *decempeda* per accrementum decadicum constituere species superiores; sic exempli gr. cum 10 *lineæ* faciant *digitum*, si numerus *linearum* excrescat ultra 9, ille transit in speciem *digitorum*; ita *digiti* accrescentes ultra 9, constituunt speciem *pedum*, idem est de *pedibus* respectu *perticarum*, seu *decempedarum.*

COROLLARIUM II.

86. Ex hoc accremento decadico liquet porro, non aliis regulis ad suas operationes egere *Logisticam decimalem*, quam quas dedimus in *Parte I. de numeris integris vulgaribus*; nam & hi ex institutione hominum accrementum habent decadicum (§. 8.) Hinc in numero *Ex gr.* isto *Logistico simplici*: 5784. si ultima nota 4 denotet *lineas*, sequens 8 denotabit *digitos*, illam vero consequens 7, indicabit *pedes*, & numerus 5 significabit *decempedas*, seu *perticas*. Intelligendo omnes species esse *simplices.*

HYPOTHESIS III.

87. Signa, *sive* notæ, *aut* exponentes *harum specierum sunt sequentia: signum* perticarum *est* (0) *seu zerus.* Pedum *est* (,) *seu una virgula.* Digitorum (,,) *seu duæ virgulæ:* Linearum (,,,) *seu tres virgulæ. Ponuntur hæc signa supra numeros sibi cognomines.* Ex. gr. *Numerus Logisticus decimalis iste*: $\overset{0}{5}\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{8}\overset{\prime\prime\prime}{4}$ *aut simpliciter*: $578\overset{\prime\prime\prime}{4}$ *in ultima nota notatus, sic enunciandus est*: 5 decempedæ simplices, 7 pedes simplices, 8 digiti simplices, 4 lineæ simplices.

ſimplices. *Quod ſi reſpectus habeatur tantum ad ultimum ſignum numeri* 4, *poteſt* (§. 84.) *etiam ſic enunciari: quinque millia ſeptingentæ octuaginta quatuor* lineæ ſimplices.

COROLLARIUM I.

88. Ratio *conjunctim* ſcribendi numeros Logiſticos decimales ſimplices, colligitur ex (§. 84. & ſeq.) ſic, ſi *conjunctim* ſcribendi forent *Ex. gr.* $\overset{0}{4}$ & $\overset{\prime\prime}{6}$, ita ſcribentur $\overset{0}{4}\,\overset{\prime}{0}\,\overset{\prime\prime}{6}$ (& non $\overset{0}{4}\overset{\prime\prime}{6}$) quia locum deficientis intermediæ ſpeciei, nempe *pedum*, ſupplere debet *zerus*; quemadmodum etiam in numeris vulgaribus monuimus (§. 10) ſimiliter, ſi *conjunctim* ſcribendi ſint $\overset{0}{8}$ & $\overset{\prime\prime\prime}{5}$, ita ſcribentur: $\overset{0}{8}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{5}$ (non $\overset{0}{8}\,\overset{\prime\prime\prime}{5}$) quia loca *pedum* & *digitorum* intermediorum *zeris* ſupplenda ſunt. (§. 84.)

COROLLARIUM II.

89. Liquet etiam (ex §. 84.) *ſimplices perticas* ad inferiorem quamvis ſpeciem *ſimplicem* facile reduci per adjectionem tot *zerorum*, quot *virgulæ* datam ſpeciem inferiorem denotant. *Ex. gr.* Sint $\overset{0}{7}$ reducendæ ad *digitos*, cum ſignum digitorum ſint (,,) *binæ virgulæ*, ſcribantur ad dextram numeri $\overset{0}{7}$ duo *zeri*, & habebuntur $\overset{0}{7}\,\overset{\prime}{0}\,\overset{\prime\prime}{0}$ id eſt, ſeptem *perticæ* ad ſpeciem *digitorum* reductæ. Si vero ſpecies ſuperior reducenda ad inferiorem jam ſignata habetur una, vel pluribus *virgulis*, tali caſu; tot *zeri* ad dextram ſpeciei ſuperiori apponendi ſunt, quot *virgulis* ſpecies data inferior ſuperat *virgulas* ſpeciei reducendæ. *Ex. gr.* Sint reducendi $\overset{\prime}{8}$, ad *lineas*, cum virgulæ lineas deſignantes ſint (,,,) tres, ſuperant virgulam *pedum* reducendorum *duabus virgulis*, igitur ad $\overset{\prime}{8}$ apponendi ſunt *duo zeri*, & erunt $\overset{\prime}{8}\,\overset{\prime\prime}{0}\,\overset{\prime\prime\prime}{0}$ reducti. Sic $\overset{\prime\prime}{5}$ ad *lineas* reducti ſunt $\overset{\prime\prime}{5}\,\overset{\prime\prime\prime}{0}$, & ita porro.

DEFINITIO I.

TAB. LOG. Fig. I. 90. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. *quadratus* (ob figuram) appellatur productum, aut factum quod producitur, si *pertica simplex*, vel *pes*, aut *digitus simplex* per seipsum multiplicetur. *Ex. gr.* Si linea recta A B insistens alteri B C *æquali*, ad neutrum latus declinando, repræsentet *perticam*, vel *pedem*, aut *digitum simplicem*, & hæc linea A B moveri concipiatur per omnia puncta alterius lineæ rectæ B C ipsi prorsus *æquali*, ita, ut relinquere vestigia sui intelligatur, spacium viæ A B C D postquam pervenit ad C, vocatur (ob figuram) *quadratum*, & quidem in specie: si linea A B erat pertica simplex, spacium A B C D vocatur *pertica quadrata*, si linea A B fuit pes simplex, appellatur *pes quadratus*, si linea A B fuit digitus, vocatur *digitus quadratus*. Hic ductus lineæ rectæ in lineam rectam *multiplicatio Geometrica*, Area vero, sive spacium A B C D, *productum Geometricum* appellatur.

COROLLARIUM I.

91. Hinc, si pertica simplex concipiatur divisa in 10 pedes simplices, continebit *productum* perticæ quadratæ in pedes divisæ, 100 *pedes quadratos*; eodem modo: *pes quadratus* (si pes simplex in 10 digitos divisus concipiatur) 100 *digitos quadratos* continebit, & *digitus quadratus* in lineas divisus continebit 100 *lineas quadratas* &c. Igitur propter accrementum *centenariorum*, cum pertica simplex in *digitos* divisa contineat 100 *digitos* (§. 48.) ergo *pertica quadrata* continebit 100 *digitos* per 100 multiplicatos, id est, 10000 *digitos quadratos*, & cum pertica simplex divisa in *lineas* contineat 1000 *lineas* (§. 84.) continebit pertica quadrata in lineas divisa 1000 *lineas* per 1000 multiplicatas, id est 1000000 *lineas quadratas*.

Notandum: *Signum* □ *loco vocis* quadratum *deinceps usurpandum.*

COROLLARIUM II.

92. Porro ex his productis □ patet *primo*: Ad hoc, ut lineæ □ efficere possint digitum □, debeat numerus *linea-*

rum

rum □ attingere *tres notas* numericas, id eſt, adæquare numerum 100; idem eſt, de *digitis* □, ut efficiant *pedem* □, & de *pedibus* □, ut efficiant *perticam* □. *Secundo:* Ut *lineæ* □ efficiant *pedem* □, debent hæ attingere *quinque notas* numericas, id eſt 10000, & ad hoc, ut *lineæ* □ efficiant *perticam* □, debent attingere *ſeptem notas* numericas, id eſt 1000000. Unde patet ratio reducendi ſpeciem ſuperiorem ad inferiores ſpecies, per adjectionem bis tot zerorum, quot virgulas ſpecies inferior continet.

PROBLEMA I.

93. PROP. *Enunciare, & per virgulas exprimere numerum logiſticum decimalem* □.

RESOLUTIO.

I. Propoſitus numerus □ in claſſes diſtinguatur, inchoando à nota deſignante ſpeciem minimam, & cuilibet claſſi ſiniſtram verſus binæ notæ numericæ attribuantur, quod fit, ſi numeri propoſiti logiſtici, notæ numericæ (inchoando à virgulis ſpeciei infimæ) *alternando* ſignentur virgulis ſiniſtram verſus numero decreſcentibus. Sit numerus logiſticus decimalis □, *Ex.gr.* $24638\overset{\prime\prime\prime}{4}70$, erit inchoando à nota numerica $\overset{\prime\prime\prime}{7}$, *alternando ſignatus* per virgulas decreſcentes ſiniſtram verſus: $2\overset{0}{4},\overset{\prime}{6}3,\overset{\prime\prime}{8}4,\overset{\prime\prime\prime}{7}0$. & ſic enunciatur: *viginti quatuor* perticæ □, *ſexaginta tres* pedes □, *octuaginta quatuor* digiti □, & *ſeptuaginta* lineæ □.

II. Si poſt numerum ſignatum virgulis ſpeciem minimam deſignantibus nulla ſequatur nota numerica, ſubintelligendus eſt in fine zerus. *Ex.gr.* in hoc numero logiſtico □: $3\overset{0}{2}\overset{\prime}{7}4\overset{\prime\prime}{5}$, numerus ultimus $\overset{\prime\prime}{5}$ valet $\overset{\prime\prime}{5}0$.

III. Numeros ſiniſtimos, id eſt, proxime ſequentes virgulam deſignantem ſpeciem pedum, omnes eſſe *perticarum*, quotcunque reperiantur, clarum eſt.

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 91. & 92.) Reg. III. conſtat, quia perticæ ſunt ſpecies maxima.

COROLLARIUM.

94. Ex hactenus dictis liquet ratio quoque *conjunctim* ſcribendi numeros logiſticos □: ſic $5\overset{\circ}{4}$ perticæ □, & $\overset{\prime\prime}{7}2$ digiti □, ſcribentur *conjunctim*: $5\overset{\circ}{4}\overset{\prime}{0}0\overset{\prime\prime}{7}2$ (non $5\overset{\circ}{4}\overset{\prime\prime}{7}2$) quia ſpeciei omiſſæ *pedum* locus ſuppleri debet duobus zeris (§ 91. 92. 93.) ita $3\overset{\circ}{2}$ perticæ □, & $\overset{\prime\prime\prime}{4}5$ lineæ □, *conjunctim* ſcribentur: $3\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{0}0\overset{\prime\prime}{0}0\overset{\prime\prime\prime}{4}5$ (non $3\overset{\circ}{2}\overset{\prime\prime\prime}{4}5$) ut patet ex (§. 92. & 93.)

HYPOTHESIS IV.

95. *Geometræ utuntur perticis, pedibus, digitis &c.* □, *in determinandis magnitudinibus arearum, ſeu ſuperficierum, idque ex inſtitutione hominum.*

SCHOLION.

96. *Mirari non debent tyrones (dum aliorum Authorum regulas tractandi numeros logiſticos decimales legerint) nos à Methodo vulgari receſſiſſe; experientur enim Methodum hanc noſtram non modo intellectu faciliorem, ſed uſu ipſo etiam longe præſtantiorem. Præterquam enim, (ut patebit inferius) quod juxta regulas vulgares diſpeſcendi in claſſes numeros logiſticos* □, *non levis è virgularum heterogeneitate oriatur perturbatio, eas etiam univerſales non eſſe demonſtrabitur. Accedit, quod virgularum eadem ſignaturâ adhibitâ, diſcrimen non indicetur, inter numerum logiſticum ſimplicem, & inter numerum logiſticum quadratum, aut cubicum perticarum, pedum &c. Quod in noſtra Methodo, vel primo virgularum diſpoſitarum intuitu illicò pateſcit.*

DEFINITIO II.

TAB. LOG. Fig. 4. 97. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. *cubicus* (ob figuram) appellatur *productum*, quod oritur, ſi pertica □ per perticam *ſimplicem*, aut pes □ per *pedem ſimplicem*, item digitus □ per digitum *ſimplicem* &c. multiplicetur.

plicetur. *Ex. gr.* Si quadratum A B C D, repræsentans *perticam*, vel *pedem*, aut *digitum* □ &c. moveri concipiatur directe deorsum per lineam A E *æqualem perticæ*, vel *pedi*, aut *digito simplici* &c. ita, ut intelligatur hoc □ motum, per singula puncta lineæ B E, relinquere sui vestigia, spacium A B C D E H K F (per modum corporis consideratum) per quod □ moveri concipitur, vocatur *cubus*; & quidem in specie: si moveatur pertica □ per perticam *simplicem*, dicitur *pertica cubica*; si pes □ per pedem *simplicem*, *pes cubicus*; si digitus □ per digitum *simplicem*, *digitus cubicus* appellatur &c.

COROLLARIUM I.

98. Quoniam pertica □ in pedes divisa continet 100 pedes □; & pes □, 100 digitos □; digitus □, 100 lineas □ &c. (§. 91.) si pertica □ A B D moveri intelligatur deorsum per perticam *simplicem* B E divisam in 10 pedes, continebit *pertica cubica* pedes *cubicos* 1000, quod est *productum*, si 100 per 10 multiplicetur. Ex eadem ratione, pes *cubicus* numerabit 1000 digitos cubicos, & *digitus cubicus* censebit 1000 lineas cubicas, per accrementum videlicet *millenariorum*, ut patet ex fig. 5. TAB. LOG. Fig.

COROLLARIUM II.

99. Præterea liquet; cum pertica □ in digitos divisa numeret 10000 digitos □ (§. 91.) & pertica simplex 100 digitos *simplices* (§. 84.) sequitur perticam cubicam in digitos divisam continere 1000000 *digitorum cubicorum*; nam 10000 per 100 multiplicata producunt 1000000; item cum pertica □ in lineas divisa contineat 1000000 *linearum* □ (§. 91.) & pertica *simplex* in lineas divisa 1000 *lineas simplices* (§. 84.) sequitur perticam cubicam in lineas divisam continere 1000000000 *linearum cubicarum*; nam 1000000 per 1000 multiplicatum, producit factum 1000000000.

COROLLARIUM III.

100. Contemplando producta cubica ex multiplicatione quadratorum in species *simplices* orta, certum est, *primo*: ad hoc, ut lineæ cubicæ efficere possint unum digitum

tum cubicum, eæ adæquare debeant numerum 1000, adeoque ſuperare *tres notas* numericas; idem eſt, de digitis cubicis reſpectu habito ad pedem cubicum, & de pedibus cubicis relate ad perticam cubicam. (§. 98.) *Secundo*: Ut lineæ cubicæ adæquent pedem cubicum, neceſſe eſt, ut aſſurgant ad numerum 1000000, ſeu *ſeptem notarum*; & ut eædem lineæ cubicæ adæquent perticam cubicam, attingere debent numerum 1000000000, ſeu *decem notarum*.

PROBLEMA II.

101. PROP. *Exprimere per virgulas, & enunciare datum numerum logiſticum decimalem cubicum.*

RESOLUTIO.

I. Propoſitus numerus logiſticus cubicus in claſſes diſtinguatur inchoando à nota deſignante ſpeciem infimam, & cuilibet claſſi, ſiniſtram verſus, *tres notæ* numericæ aſſignentur, quod fit, ſi ſignentur ſingulæ *ternæ notæ*, à minima incipiendo, virgulis numero decreſcentibus. *Ex. gr.* Sit numerus logiſticus cubicus ſignandus: $567832\overset{\prime\prime\prime}{9}453$, erit per virgulas in qualibet *tertia nota* ſignatus: $\overset{\circ}{5},\overset{\prime}{6}78,\overset{\prime\prime}{3}29,\overset{\prime\prime\prime}{4}53$, & ita enunciatur: *quinque* perticæ cubicæ, *ſexcenti ſeptuaginta octo* pedes cubici, *trecenti viginti novem* digiti cubici, *quadringentæ quinquaginta tres* lineæ cubicæ.

II. Si poſt numerum ſpeciei minimæ per virgulas deſignatum, non reperiantur notæ numericæ, ſubintelligi debent duo zeri apponendi, ſic: $\overset{\circ}{8}\overset{\prime}{3}45\overset{\prime\prime}{2}68\overset{\prime\prime\prime}{7}$ numerus ultimus $\overset{\prime\prime\prime}{7}$, valet $\overset{\prime\prime\prime}{7}00$ lineas cubicas; ſi vero una nota numerica ſequatur, ſubintelligi adhuc debet unus zerus. *Ex. gr.* $\overset{\circ}{4}\overset{\prime}{8}9\overset{\prime\prime}{4}35$, ultimi $\overset{\prime\prime}{3}5$, valent $\overset{\prime\prime}{3}50$ digitos cubicos. (§. 100.)

III. Poſt

III. Poſt virgulam pedum cubicorum ſiniſtram verſus poſiti numeri (quotcunque ſint) deſignant perticas cubicas.

Demonſtr. liquet, ex (§. 98. & ſequ.)

COROLLARIUM.

102. Ex hactenus explicatis liquet quoque ratio *conjunctim* ſcribendi numeros logiſticos cubicos, ſic: $2\overset{\circ}{4}$ perticæ cubicæ, & $\overset{\prime\prime}{3}29$ digiti cubici *conjunctim* ſcribentur: $2\overset{\circ}{4}\overset{\prime}{0}00\overset{\prime\prime}{3}29$ (§. 100.) & non ($2\overset{\circ}{4}\overset{\prime\prime}{3}29$) propter defectum ſpeciei intermediæ pedum cubicorum; ita quoque ſcribentur: $\overset{\circ}{3}$ cubicæ, & $\overset{\prime\prime\prime}{2}50$ cubicæ, videlicet: $\overset{\circ}{3}\overset{\prime}{0}00\overset{\prime\prime}{0}00\overset{\prime\prime\prime}{2}50$ & non $\overset{\circ}{3}\overset{\prime\prime\prime}{2}50$) ob eandem rationem; ſic pariter $\overset{\circ}{8}$ cubicæ, $\overset{\prime}{6}82$ cubici, & $\overset{\prime\prime\prime}{3}$ cubicæ, ſcribentur hoc modo: $\overset{\circ}{8}\overset{\prime}{6}82\overset{\prime\prime}{0}00\overset{\prime\prime\prime}{0}03$. per (§. 99. & 100.)

SCHOLION.

103. *Tyro in his Hypotheſibus logiſticorum decimalium intelligendis ſtudium ponat, ac exercitium, quibus memoria retentis praxim quatuor ſequentium ſpecierum Arithmeticarum ſine difficultate imbibet, ac ſubinde tam in Geometria practica, quàm Philoſophia naturali, eas absque errandi timore uſurpabit.*

CAPUT II.

De Additione numerorum logiſticorum decimalium.

DEFINITIO III.

104. Numeri logiſtici decimales *diverſæ denominationis* dicuntur, qui ſub eodem genere non comprehenduntur, etſi in ſpecie conveniant, *Ex. gr. perticæ ſimplices*, & *perticæ* □, aut *perticæ cubicæ* &c. *Ejusdem* vero *denominationis* ſunt, qui in eodem genere conveniunt, etſi ſpecie differant. *Ex. gr. Perticæ ſimplices*, & *pedes ſimplices*. Item *perticæ* □, & *pedes* □, aut *perticæ cubicæ*, & *digiti cubici*.

DEFINITIO IV.

105. Numeri logiſtici decimales *diverſæ ſpeciei* dicuntur, qui in tota ſpecie differunt, etſi in genere conveniant. *Ex. gr. Perticæ ſimplices*, & *pedes ſimplices*, qui conveniunt in eo, quod ſint *quantitates ſimplices*, ſeu *longitudines*, differunt vero in eo, quod pertica ſit longitudo aliter menſurabilis, quam pes.

DEFINITIO V.

106. Numeri logiſtici decimales, & ejusdem *ſpeciei*, & ejusdem *denominationis* vocantur, qui & in eadem ſpecie, & in eodem genere conveniunt. *Ex. gr* 9 perticæ ſimplices, & 5 perticæ ſimplices. Item ejusdem denominationis, & ſpeciei ſunt 3 perticæ □, & 4 perticæ □ &c.

DEFINITIO VI.

107. Numeri logiſtici decimales, & *diverſæ denominationis*, & ſimul *diverſæ ſpeciei* dicuntur, qui tam in genere, quam in ſpecie inter ſe differunt. *Ex. gr. Perticæ ſimplices*, & *digiti quadrati*, aut *digiti* □, & *pedes cubici.*

THEOREMA I.

108. PROP. *Quæ adduntur ſibi invicem, aut ab ſe invicem ſubtrahuntur, illa ejusdem & ſpeciei, & denominationis eſſe debent.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. Inter ea, quæ addi, aut ſubtrahi debent, requiritur homogeneitas (§. 30. & 31. item §. 37. & 40.) ergo ejusdem ſpeciei eſſe debent. (20.)

Demonſtratur Pars altera. Ea, quæ adduntur, aut ſubtrahuntur, in eadem ſpecie conveniant oportet, (per Partem I. hu us) ergo multo magis neceſſe eſt, ut in genere conveniant, id eſt, ut ſint ejusdem *denominationis.* (§. 106.) Q. E. D.

PRO-

PROBLEMA III.

109. PROP. *Addere numeros logiſticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Ex diſpoſitione virgularum videatur, cujusnam ſint denominationis dati numeri addendi, an ſint logiſtici *ſimplices?* an *quadrati?* an *cubici?* &c.

II. Si numeri logiſtici ſint, & ejusdem *denominationis*, & *ſpeciei*, ii, ita ſub ſe invicem collocentur, ut lineæ lineis, digiti digitis, pedes pedibus, &c. reſpondeant.

III. Si in addendis ſpecies una, vel plures (ſive eæ ſint intermediæ, ſive finales) deficiant, ſuppleantur zeris; in ſimplicibus quidem juxta doctrinam. (§. 88. & 89.) In quadratis juxta doctrinam. (§. 91.) 92. & 94.) In cubicis juxta (§. 99. 100. item 102.) *Vide exempl. II. & III.*

IV. Ita collocati, addantur invicem juxta regulas Arithmeticæ integrorum (§. 32.) traditas.

V. Superſcriptio virgularum in ſumma, relate ad ſpeciem infimam, manet eadem, quæ fuit in addendis, à qua (ſpecie infima) reliquarum notationes juxta doctrinam (§. 87. & 88.) item (§. 93. & 101.) dependent.

DEMONSTRATIO.

Per datas regulas, tam in logiſticis ſimplicibus, quam quadratis, & cubicis, habentur in ſumma ſingulæ ſpecies, ſed etiam per datas regulas in ſumma habentur ſingularum ſpecierum unitates, decades, centenarii &c. (§ 8[illegible]. 92. 99.) ergo in ſumma habetur *totum* omnium datorum logiſticorum. Q. E. D.

PARA-

PARADIGMA I.

Additionis logisticorum simplicium.

EXEMPL. I. REG. II.

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{\circ}{8}\ \overset{\prime}{9}\ \overset{\prime\prime}{5}\ \overset{\prime\prime\prime}{2}\ \text{A} \\ \overset{\circ}{7}\ \overset{\prime}{4}\ \overset{\prime\prime}{3}\ \overset{\prime\prime\prime}{6}\ \text{B} \end{cases}$$

$$\text{Summa}\quad 1\ \overset{\circ}{6}\ \overset{\prime}{3}\ \overset{\prime\prime}{8}\ \overset{\prime\prime\prime}{8}\ \text{C}$$

EXEMPL. II. REG. III.

Si ad $\overset{\circ}{5}\ \overset{\prime}{6}\ \overset{\prime\prime}{7}$ *add. sint* $\overset{\circ}{3}$ & $\overset{\prime\prime}{2}$ *erunt*

$$\text{Add.}\begin{cases} \overset{\circ}{5}\ \overset{\prime}{6}\ \overset{\prime\prime}{7}\ \text{A} \\ \overset{\circ}{3}\ \overset{\prime}{0}\ \overset{\prime\prime}{2}\ \text{B} \end{cases}$$ *completus* (§. 88.)

$$\text{Summa}\quad \overset{\circ}{8}\ \overset{\prime}{6}\ \overset{\prime\prime}{9}\ \text{C}$$

EXEMPL. III. REG. III.

Si adden. sint $\overset{\prime}{2}$ *ad* $\overset{\circ}{4}\ \overset{\prime}{5}\ \overset{\prime\prime}{3}\ \overset{\prime\prime\prime}{8}$ *erunt*

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{\circ}{4}\ \overset{\prime}{5}\ \overset{\prime\prime}{3}\ \overset{\prime\prime\prime}{8}\ \text{A} \\ \quad\ \overset{\prime}{2}\ \overset{\prime\prime}{0}\ \overset{\prime\prime\prime}{0}\ \text{B} \end{cases}$$ *reduct.*

$$\text{Summa}\quad \overset{\circ}{4}\ \overset{\prime}{7}\ \overset{\prime\prime}{3}\ \overset{\prime\prime\prime}{8}\ \text{C}$$

EXEMPL. IV. REG. V.

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{\prime}{8}\ \overset{\prime\prime}{3}\ \overset{\prime\prime\prime}{7}\ \text{A} \\ \overset{\prime}{9}\ \overset{\prime\prime}{8}\ \overset{\prime\prime\prime}{9}\ \text{B} \end{cases}$$

$$\text{Summa}\quad \overset{\circ}{1}\ \overset{\prime}{8}\ \overset{\prime\prime}{2}\ \overset{\prime\prime\prime}{6}\ \text{C}$$

PARADIGMA II.

Additionis logisticorum □.

EXEMPL. I. REG. II.

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{\circ}{4}\ \overset{\prime}{3}\ 4\ \overset{\prime\prime}{2}\ 5\ \overset{\prime\prime\prime}{3}\ 6\ \text{A} \\ \overset{\circ}{7}\ \overset{\prime}{9}\ 6\ \overset{\prime\prime}{7}\ 9\ \overset{\prime\prime\prime}{5}\ 8\ \text{B} \end{cases}$$

$$\text{Summa}\quad 1\ \overset{\circ}{2},\overset{\prime}{3}\ 1,\overset{\prime\prime}{0}\ 4,\overset{\prime\prime\prime}{9}\ 4\ \text{C}$$

EXEMPL. II. REG. III.

Si ad $\overset{\circ}{5}\ \overset{\prime}{3}\ 4\ \overset{\prime\prime}{2}\ 6$ *sint add.* $\overset{\circ}{5}$ & $\overset{\prime\prime}{6}0$ *erunt*

$$\text{Add.}\begin{cases} \overset{\circ}{5}\ \overset{\prime}{3}\ 4\ \overset{\prime\prime}{2}\ 6\ \text{A} \\ \overset{\circ}{5}\ \overset{\prime}{0}\ 0\ \overset{\prime\prime}{6}\ 0\ \text{B} \end{cases}$$ *completus* (§. 94.)

$$\text{Sum.}\quad 1\ \overset{\circ}{0},\overset{\prime}{3}\ 4,\overset{\prime\prime}{8}\ 6\ \text{C}$$

EXEMPL.

EXEMPLUM III. REGULA III. & V.

Si addendi sint $\overset{\prime}{7}\,2$ *ad* $\overset{\prime}{8}\,9\,\overset{\prime\prime}{6}\,7\,\overset{\prime\prime\prime}{0}\,5$
erunt

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{\prime}{8}\,9\,\overset{\prime\prime}{6}\,7\,\overset{\prime\prime\prime}{0}\,5 & \text{A} \\ \overset{\prime}{7}\,2\,\overset{\prime\prime}{0}\,0\,\overset{\prime\prime\prime}{0}\,0 & \text{B } \textit{reductus. } (\S.\,91.) \end{cases}$$

$$\textit{Summa } \overset{\circ}{1},\overset{\prime}{6}\,1,\overset{\prime\prime}{6}\,7,\overset{\prime\prime\prime}{0}\,5 \;\text{C}$$

PARADIGMA III.

Additionis logisticorum cubicorum.

EXEMPLUM I. REGULA II.

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{\circ}{4},\overset{\prime}{8}\,8\,9,\overset{\prime\prime}{7}\,8\,5 & \text{A} \\ \overset{\circ}{9},\overset{\prime}{7}\,9\,8,\overset{\prime\prime}{9}\,0\,7 & \text{B} \end{cases}$$

$$\textit{Summa } 1\,\overset{\circ}{4},\overset{\prime}{6}\,8\,8,\overset{\prime\prime}{6}\,9\,2 \;\text{C}$$

EXEMPLUM II. REGULA III. & V.

Si sint addendi $\overset{\circ}{3}$ & $\overset{\prime\prime}{2}\,5$ *ad* $\overset{\circ}{8},\overset{\prime}{2}\,7\,3,\overset{\prime\prime}{8}\,4\,5,\overset{\prime\prime\prime}{0}\,0\,2$
erunt

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{\circ}{8},\overset{\prime}{2}\,7\,3,\overset{\prime\prime}{8}\,4\,5,\overset{\prime\prime\prime}{0}\,0\,2 & \text{A} \\ \overset{\circ}{3},\overset{\prime}{0}\,0\,0,\overset{\prime\prime}{0}\,0\,0,\overset{\prime\prime\prime}{2}\,5\,0 & \text{B } \textit{completi.} \end{cases}$$

$$\textit{Summa } 1\,\overset{\circ}{1},\overset{\prime}{2}\,7\,3,\overset{\prime\prime}{8}\,4\,5,\overset{\prime\prime\prime}{2}\,5\,2 \;\text{C}$$

SCHOLION I.

110. Examen, *sive proba additionis, fit per subtractionem, ut* (§. 44.) *monuimus, & cap. sequ. docebitur.*

SCHOLION II.

111. Regulâ III. *iis, qui frequenti exercitio praxim imbiberunt, opus non esse, ex contemplatione horum exemplorum liquet, modo animadvertant ad* Regulam II. *in subscriptione logisticorum; in usum tamen tyronum, donec praxi assuescant, non inutilem censuimus.*

CAPUT

CAPUT III.

De Subtractione logisticorum decimalium.

PROBLEMA IV.

112. PROP. *Subtrahere numerum logisticum decimalem minorem à majore.*

RESOLUTIO.

I. Observentur ex (§. 109.) *Reg. I. II. & III.* deinde fiat subtractio, ut *in Arithmetica* (§. 41.) *docuimus*; pro superscriptione virgularum in residuo, *servetur Regula V. ejusdem.* (§. 109.)

DEMONSTRATIO.

Per datam resolutionem in residuo habentur singulæ differentiæ specierum singularum minoris à majore, sed etiam habentur differentiæ ex singulis speciebus unitatum, decadum, &c. ergo in residuo habetur tota differentia totius numeri minoris à majore, Q. E. D.

Exempla subtractionis logisticorum decimalium desumptis numeris ex adductis in additione exemplis.

PARADIGMA I.

Subtractionis logisticorum decimalium simplicium.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{lr} & 1\overset{\circ}{6}\;\overset{\prime}{3}\;\overset{\prime\prime}{8}\;\overset{\prime\prime\prime}{8}\ \mathrm{C} \\ \textit{Subtrah.} & \underline{\overset{\circ}{7}\;\overset{\prime}{4}\;\overset{\prime\prime}{3}\;\overset{\prime\prime\prime}{6}}\ \mathrm{B} \\ \textit{Residuum} & \overset{\circ}{8}\;\overset{\prime}{9}\;\overset{\prime\prime}{5}\;\overset{\prime\prime\prime}{2}\ \mathrm{A} \end{array}$$

EXEMPLUM II.

Sit subtrahendus $\overset{\circ}{3}$ & $\overset{\prime\prime}{2}$ *à*

$$\begin{array}{lr} & \overset{\circ}{8}\;\overset{\prime}{6}\;\overset{\prime\prime}{9}\ \mathrm{C} \\ \textit{Subtrah.} & \underline{\overset{\circ}{3}\;\overset{\prime}{0}\;\overset{\prime\prime}{2}}\ \mathrm{B}\ \textit{compl.} \\ \textit{Residuum} & \overset{\circ}{5}\;\overset{\prime}{6}\;\overset{\prime\prime}{7}\ \mathrm{A} \end{array}$$

EXEMPL.

EXEMP. III. IN ADDIT. IV.

$\overset{\circ}{1}\ \overset{\prime}{3}\ \overset{\prime\prime}{2}\ \overset{\prime\prime\prime}{6}$ C

Subtrah. $\overset{\prime}{9}\ \overset{\prime\prime}{8}\ \overset{\prime\prime\prime}{9}$ B

Residuum $\overset{\prime}{8}\ \overset{\prime\prime}{3}\ \overset{\prime\prime\prime}{7}$ A

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi $\overset{\prime}{2}$ & $\overset{\prime\prime\prime}{3}$ *à* $\overset{\circ}{7}$
erunt

$\left.\begin{array}{ll} & \overset{\circ}{7}\ \overset{\prime}{0}\ \overset{\prime\prime}{0}\ \overset{\prime\prime\prime}{0} \\ \textit{Subtrah.} & \ \ \overset{\prime}{2}\ \overset{\prime\prime}{0}\ \overset{\prime\prime\prime}{3} \end{array}\right\}$ *reducti.*

Residuum $\overset{\circ}{6}\ \overset{\prime}{7}\ \overset{\prime\prime}{9}\ \overset{\prime\prime\prime}{7}$

PARADIGMA II.

Subtractionis logisticorum decimalium □.

EXEMPLUM I.

$\left\{1\,\overset{\circ}{2}\ \overset{\prime}{3}\ 1\ \overset{\prime\prime}{0}\ 4\ \overset{\prime\prime\prime}{9}\ 4\right.$ C

Subtrah. $\overset{\circ}{7}\ \overset{\prime}{9}\ 6\ \overset{\prime\prime}{7}\ 9\ \overset{\prime\prime\prime}{5}\ 8$ B

Residuum $\overset{\circ}{4},\overset{\prime}{3}\ \overset{\prime\prime}{4},2\ \overset{\prime\prime\prime}{5},3\ 6$ A

EXEMPLUM II.

Sint subtrahendæ $\overset{\circ}{5}$ & $\overset{\prime\prime}{60}$ *ab*

$1\,\overset{\circ}{0}\ \overset{\prime}{3}\ 4\ \overset{\prime\prime}{8}\ 6$ C

Subtrah. $\overset{\circ}{5}\ \overset{\prime}{0}\ 0\ \overset{\prime\prime}{6}\ 0$ B *redu.*

Residuum $\overset{\circ}{5},\overset{\prime}{3}\ 4,\overset{\prime\prime}{2}\ 6$ A

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi $\overset{\prime}{24}$ □ & $\overset{\prime\prime\prime}{53}$ □ *ab* $\overset{\circ}{8}$ □
erunt

$\left.\begin{array}{ll} & \overset{\circ}{8}\ \overset{\prime}{0}\ 0\ \overset{\prime\prime}{0}\ 0\ \overset{\prime\prime\prime}{0}\ 0 \\ \textit{Subtrah.} & \ \ \overset{\prime}{2}\ 4\ \overset{\prime\prime}{0}\ 0\ \overset{\prime\prime\prime}{5}\ 3 \end{array}\right\}$ *reducti.*

Residuum $\overset{\circ}{7},\overset{\prime}{7}\ 5,\overset{\prime\prime}{9}\ 9,\overset{\prime\prime\prime}{4}\ 7$

PARA-

PARADIGMA III.

Subtractionis logisticorum decimalium cubicorum.

EXEMPLUM I.

$$1\,\overset{\circ}{4}\,\overset{\prime}{6}\,8\,8\,\overset{\prime\prime}{6}\,9\,2\;C$$

$$\textit{Subtrah.}\;\underline{\overset{\circ}{9}\,\overset{\prime}{7}\,9\,8\,\overset{\prime\prime}{9}\,0\,7}\;B$$

$$\textit{Residuum}\;\overset{\circ}{4},\overset{\prime}{8}\,8\,9,\overset{\prime\prime}{7}\,8\,5\;A$$

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi $\overset{\prime}{803}$ *cubici ab* $\overset{\circ}{7}$, & $\overset{\prime\prime}{234}$ *erunt*

$$\left.\begin{array}{r} \overset{\circ}{7}\,\overset{\prime}{0}\,0\,0\,\overset{\prime\prime}{2}\,3\,4 \\ \textit{Subtrah.}\;\;\underline{\overset{\prime}{8}\,0\,3\,\overset{\prime\prime}{0}\,0\,0} \end{array}\right\}\textit{reducti.}$$

$$\textit{Residuum}\;\overset{\circ}{6},\overset{\prime}{1}\,9\,7,\overset{\prime\prime}{2}\,3\,4$$

SCHOLION.

118. *Examen, sive proba subtractionis fit per additionem, ut in* Arithmetica (§. 43.) & Logist. (§. 109.) ostensum est. *Ex contemplatione quoque horum exemplorum liquet, non inutilem esse tyronibus observationem* regulæ III. additionis (§. 109.)

CAPUT IV.

De multiplicatione logisticorum decimalium.

THEOREMA II.

114. PROP. *Factum, sive productum ex logisticis factoribus decimalibus* simplicibus, *in factores logisticos* simplices, *est Area, seu superficies, constans* quadratis *logisticis decimalibus; Item factum, sive productum ex factoribus logisticis* quadratis, *in factores* simplices *logisticos, est corpus, (aut saltem spacium) constans cubis logisticis decimalibus.*

DE-

DEMONSTRATIO.

I. *Pars* patet ex definitione (§. 90.). II. *Pars* ex definitione (§. 97.)

PROBLEMA V.

115. PROP. *Numeros logiſticos decimales invicem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ante omnia advertendum: an factores ſint ejusdem ſpeciei? (ut ejusdem denominationis quoque ſint, neceſſe non eſt) & utrum ſpecies intermediæ non deficiant.

Itaque I. Si non ſint ejusdem ſpeciei, aut aliqua ſpecies intermedia deficiat, reducantur ad eandem ſpeciem, & intermediæ ſpecies compleantur. *Ut in Addition. & ſubt. dictum.*

II. Scribantur ſub ſe invicem, ut in *Arithmetica* (§. 53.) *docuimus.* Fiat multiplicatio, & facta partialia addantur in unum factum totale, ut *eodem* (§. 53.) *dictum.*

III. Factum totale per virgulas diſtinguatur in ſpecies ſuas, quæ diſtinctio hac ratione perficitur. *Primo: Si factores ambo erant logiſtici ſimplices;* tali caſu, in facto totali ſuper notam penultimam dextimam tot ponantur virgulæ, quot erant in aliquo factorum ſpeciem minimam denotantes, & ab ea notata inchoando, ſiniſtram verſus, ſignentur alternando reliquæ notæ per virgulas numero decreſcentes. (§. 93.) *Secundo: Si unus factorum fuit quadratus, alter ſimplex;* tali caſu, ſignetur nota tertia dextima per virgulas denotantes ſpeciem minimam factorum, & ab hac notata, ſiniſtram verſus, ſingulæ ternæ notæ ſignentur per virgulas numero decreſcentes. (§. 101.)

DEMONSTRATIO.

Regula II. demonſtrata eſt ſupra (§. 53.) Reg. III. demonſtrata eſt (§. 114.) Reg. I. patet, quia hac ratione determinatur locus debitus ſcribendi facta partialia, & in unum factum totale addendi. Q. E. D.

PARADIGMA I. MULTIPLICATIONIS.

Si factores ſint logiſtici ſimplices.

EXEMPLUM I.

$$\textit{Factores}\left\{\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{8} & \overset{\prime}{4} & \overset{\prime\prime}{3} \\ \overset{\circ}{7} & \overset{\prime}{3} & \overset{\prime\prime}{2} \end{array}\right.$$

Facta		1	6	8	6
Partialia	2	5	2	9	
	5	8	9	1	

Fact. tot. $6\,\overset{\circ}{1},6\,\overset{\prime}{0},7\,\overset{\prime\prime}{6}$ □ *per Reg. III.*

EXEMPLUM II. REGULA I. & III.

Si unus factorum detur $\overset{\circ}{3}$ *&* $\overset{\prime\prime}{7}$, *& alter* $\overset{\circ}{2}$ *&* $\overset{\prime\prime\prime}{4}$ *erunt*

$$\textit{Factores}\left\{\begin{array}{cccc} \overset{\circ}{3} & \overset{\prime}{0} & \overset{\prime\prime}{7} & \overset{\prime\prime\prime}{0} \\ \overset{\circ}{2} & \overset{\prime}{0} & \overset{\prime\prime}{0} & \overset{\prime\prime\prime}{4} \end{array}\right.$$

reducti per (§. 89.) *&* *completi* (§. 88.)

Facta partialia		1	2	2	8	0
	6	1	4	0		

Factum totale $\overset{\circ}{6},\overset{\prime}{1}\,5,\overset{\prime\prime}{2}\,2,\overset{\prime\prime\prime}{8}\,0$ □ *per Reg. III. ſignatum.*

PARA-

PARADIGMA II.

Si factorum unus sit logisticus □, *alter logisticus* simplex.

EXEMPLUM I.

$$\textit{Factores}\left\{\begin{array}{r} \overset{\circ}{6}\,\overset{\prime}{1}\,5\,\overset{\prime\prime}{2}\,2\,\square \\ \overset{\circ}{7}\,\overset{\prime}{3}\,\overset{\prime\prime}{4} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 2\,4\,6\,0\,8\,8 \\ 1\,8\,4\,5\,6\,6 \\ 4\,3\,0\,6\,5\,4 \end{array}$$

Factum tot. $4\,\overset{\circ}{5},\overset{\prime}{1}\,5\,\overset{\prime\prime}{7},1\,4\,8$ *cubici per Reg. III. hujus.*

EXEMPLUM II.

Sint $\overset{\circ}{3}\,\square$, *&* $\overset{\prime\prime}{25}\,\square$, *multiplicandi per* $\overset{\circ}{2}$ *&* $\overset{\prime\prime\prime}{5}$ *simplices.*
erunt

$$\textit{Factores}\left\{\begin{array}{r} \overset{\circ}{3}\,\overset{\prime}{0}\,0\,\overset{\prime\prime}{2}\,5\,\overset{\prime\prime\prime}{0}\,0\,\square \\ \overset{\circ}{2}\,\overset{\prime}{0}\,\overset{\prime\prime}{0}\,\overset{\prime\prime\prime}{5} \end{array}\right\}\begin{array}{l} \textit{completi per (§. 94.)} \\ \& \\ \textit{reducti per (§. 92.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \textit{Facta partialia} & 1\,5\,0\,1\,2\,5\,0\,0 \\ & 6\,0\,0\,5\,0\,0\,0 \end{array}$$

Factum tot. $\overset{\circ}{6},\overset{\prime}{0}\,2\,\overset{\prime\prime}{0},0\,1\,\overset{\prime\prime\prime}{2},5\,0\,0$ *cubicæ per Reg. III. hujus.*

Examen multiplicationis fit ope divisionis infra docendæ.

SCHOLION I.

116. *Productum* Exempli I. Paradig. I. *quod juxta nostram methodum sub hac forma:* $6\,\overset{\circ}{1},\overset{\prime}{7}\,0,\overset{\prime\prime}{7}\,6$ *exhibuimus, secundum* vulgarem *modum multiplicandi logisticos decimales, ita exprimeretur:* $6\,\overset{\circ}{1}\,\overset{\prime}{7}\,\overset{\prime\prime}{0}\,\overset{\prime\prime\prime}{7}\,\overset{\mathrm{IV}}{6}$. *Item in* Exemp. I. Parad. I. *productum nostrum:* $\overset{\circ}{6},\overset{\prime}{1}\,5,\overset{\prime\prime}{2}\,2,\overset{\prime\prime\prime}{8}\,0$, *juxta* vulgarem, *ita haberetur:* $\overset{\circ}{6}\,\overset{\prime}{1}\,\overset{\prime\prime}{5}\,\overset{\prime\prime\prime}{2}\,\overset{\mathrm{IV}}{2}\,\overset{\mathrm{V}}{8}$. *Videlicet virgulæ speciei minimæ factorum colliguntur in unam summam, hæc summa virgularum, dextimæ notæ producti superponitur, signando reliquas producti notas virgulis numero decrescentibus sinistram versus; ex qua methodo signandi,*

perturbationem, & variationem significationis virgularum oriri necesse est; nam, cum in producto sint quadratæ *perticæ, pedes, digiti &c. atque adeo bini numeri assignandi sint classi unius speciei,* (§. 93.) *item in producto* cubicarum perticarum, pedum &c. *tres numeri unam classem constituant, liquet, variari significationem virgularum. Sic in producto* Exemp. II. Parad. I. *vulgariter expresso:* $\overset{0}{6}\ \overset{\prime}{1}\ \overset{\prime\prime}{5}\ \overset{\prime\prime\prime}{2}\ \overset{\text{IV}}{2}\ \overset{\text{V}}{8}$ *virgulæ binæ supra numerum* $\overset{\prime\prime}{5}$ *positæ, non significant digitos, sed pedes* □. *Item tres, & quatuor virgulæ numerorum* $\overset{\prime\prime\prime}{2}\ \overset{\text{IV}}{2}$, *non significant lineas, & partes decimales linearum, sed digitos* □, *atque idem est de cæteris virgulis, quæ eam speciem non significant, quam præseferunt. Quæ variatio significationis tyronibus magnum facessit negotium discernendi veros valores.*

SCHOLION II.

117. *Quoniam factores* (juxta modum vulgarem) *non reducuntur ante multiplicationem ad eandem speciem, si diversæ speciei infimæ factores simplices sint, & summa virgularum sit impar, sequitur, notam dextimam producti, signatam per summam virgularum non significare* unitates, *sed* decades *in productis* □. *In cubicis vero productis nec regula statui potest, cum virgulæ* centenariorum *alternando, jam pares, jam impares sint. Sic in* Exemp. II. Paradig. I. *juxta vulgarem expresso:* $\overset{0}{6}\ \overset{\prime}{1}\ \overset{\prime\prime}{5}\ \overset{\prime\prime\prime}{2}\ \overset{\text{IV}}{2}\ \overset{\text{V}}{8}$, *dextima nota* 8, *non valet octo* unitates, *sed octo* decades, *id est* 80; *unde rursus tyronibus errandi campus quidem aperitur, sed via declinandi erroris, aut corrigendi non satis ostenditur ad captum.*

SCHOLION III.

118. *Ostendendum nobis est, quod* (§. 96.) *nos facturos recepimus, regulam* vulgarem, *universalem non esse hanc:* ut virgulæ factorum decimalium, signantes speciem minimam, collectæ in unam summam superscribantur notæ dextimæ in producto totali. *Nam,* Ex. gr. *sint multiplicandi* $\overset{\prime}{4}$ *per* $\overset{\prime}{2}$, *dico productum esse* $\overset{\prime}{8}$, *id est octo pedum, ergo productum* 8, *hoc modo signatum* ($\overset{\prime\prime}{8}$) *male per duas virgulas exprimitur.* Ostenditur: *vel enim appositæ juxta modum* vulgarem *virgulæ retinent suam significationem digitorum? vel non retinent? si retinent, falsum est, productum ex* $\overset{\prime}{2}$ *pedibus in* $\overset{\prime}{4}$ *pedes esse* $\overset{\prime\prime}{8}$ *digitos, quia evidens est, esse* $\overset{\prime}{8}$ *pedes* □, *si vero non retinent significationem digitorum, sed in tali casu, duæ virgulæ non* digitos, *sed* pedes, *significare debeant, ergo non eadem servatur hypothesis virgularum, quæ variatio hypothesium in omni methodo*

TAB. LOG. Fig. 3.

thodo non levem inducit terminorum confuſionem, ac perturbationem. Deinde, ſi mutant ſignificationem virgulæ (ut eam mutari neceſſe eſt) novis erit opus regulis docentibus, unde initium ſummendum ſit ſignandi, & quot virgulæ pro inducta variatione accipi debeant, ad hoc, ut proximam ſpeciem indicent; quas regulas in productis, præſertim cubicis, non eſt facile generales ſtatuere, cum ſupponatur determinatio *ſpeciei maximæ ſiniſtram verſum, cujus tamen* determinatio *non docetur univerſaliter ſine algorithmis fractionum decimalium, quibus ſubſtitutæ ſunt virgulæ. Unde apparet noſtram methodum, & faciliorem, & intellectui tyronum longe commodiorem, atque in praxi minime erroneam eſſe.*

SCHOLION IV.

119. *Ne tamen aliquid neglexiſſe videamur, quod tyronibus uſui eſſe queat, problema ſequens ſubjungimus, quodvis productum juxta vulgarem methodum expreſſum, (ſecus. ſi non ſit expreſſum) ad noſtram reducendi, modo conſtet, an productum ſit quadratorum decimalium, an cubicorum, ſeu quod idem eſt, num fuerint factores ſimplices, vel unus eorum quadratus, alter ſimplex. Igitur*

PROBLEMA VI.

120. PROP. *Reducere productum logiſticum* □, *juxta methodum vulgarem expreſſum, ad noſtram methodum.* Item *productum logiſticum cubicum vulgarem.*

RESOLUTIO.

I. *Si productum eſt logiſticus* □, Ex. gr. $\overset{\circ}{6}\overset{\prime}{1}\overset{\prime\prime}{5}\overset{\prime\prime}{2}\overset{\mathrm{IV}}{2}\overset{\mathrm{V}}{8}$, inchoando à nota unitatum in ſpecie perticarum, *Ex. gr.* $\overset{\circ}{6}$, facto inferne *commate*, poſt ſingulas binas notas dextram verſus ponatur *comma*, ut *exemplum docet:* $\overset{\circ}{6}, \overset{\prime}{1}\overset{\prime\prime}{5}, \overset{\prime\prime\prime}{2}\overset{\mathrm{IV}}{2}, \overset{\mathrm{V}}{8}$, deſignabit prima poſt perticam claſſis *pedes*, claſſis ſecunda, *digitos*; tertia claſſis *lineas* □ &c.

Notandum: *Si in dextima claſſe reperiatur una nota numerica (ut in hoc exemplo numerus 8) hæc valere debet decades* □.

Quod ſi non adſint perticæ, pro prima claſſe ſiniſtima, duæ notæ accipiantur, atque ab hac claſſe, reliquæ claſſes per duas notas determinentur, deſignabunt

bunt virgulæ, ſupra notam ſiniſtimam poſitæ, ſpeciem maximam. *Ex.gr.* $\overset{,}{1}\overset{,,}{9},\overset{,,,}{4}\overset{IV}{4}$, erunt 19 digiti □, 44 lineæ □.

II. *Si productum eſt logiſticus cubicus, e.g.* $\overset{0}{4}\overset{,}{5}\overset{,,}{1}\overset{,,,}{5}\overset{IV}{7}\overset{V}{1}\overset{VI}{4}8$ facto *commate* poſt unitates perticarum, ponatur *comma* poſt ſingulas ternas notas dextram verſus, ut in *exemplo*: $\overset{0}{4}\overset{,}{5},\overset{,,}{1}\overset{,,,}{5}7,\overset{IV}{1}\overset{V}{4}\overset{VI}{8}$, deſignabit prima poſt perticas claſſis, *pedes cubicos*, ſecunda, *digitos cubicos*, &c.

Notandum: *Si in dextima claſſe reperiatur una tantum nota numerica, hæc valet centenarios, ſi duæ, tunc prima valet centenarios, ſecunda decades.*

Quod ſi non adſint perticæ cubicæ, tali caſu, pro prima ſiniſtima claſſe tres notæ aſſignentur, & ab hac reliquæ determinentur, *ut ſupra* (§.110.) *de quadratis diximus.* Demonſtratio I. partis patet ex (§. 92.) II. partis ex (§.100.)

CAPUT V.

De diviſione logiſticorum decimalium.

PORISMA.

121. PROP. *Quod multiplicatio componit ſeu colligit, tollit aut ſolvit diviſio, & viciſſim.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicatio eſt ejusdem quantitatis toties ad ſeipſam facta *additio*, quot unitates altera quantitas denotat (§. 46. & 90.) & *diviſio* eſt quantitatis minoris à majore toties facta *ſubtractio*, quoties minor in majore continetur, ſeu quot unitates denotat quotus, (§. 58.) ſed quod colligit ſeu ponit *additio*, aufert ſeu tollit *ſubtractio*,

tractio, (§. 37. & 43.) ergo quod *multiplicatio* componit ſeu colligit, tollit aut ſolvit *diviſio*. Q. E. D.

THEOREMA III.

122. PROP. I. *Si numeri logiſtici decimales □ dividantur per logiſticos ſimplices, quotus producitur logiſticus ſimplex.* II. *Si logiſticus decimalis cubicus dividatur per logiſticum ſimplicem, quotus erit logiſticus □, & viciſſim, ſi cubicus logiſticus dividatur per logiſticum □, quotus eſt logiſticus ſimplex.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. logiſticus □ componitur per multiplicationem factorum ſimplicium (§. 90.) ergo per diviſionem ſolvitur iterum in factores ſimplices (§. 121.) ſed factores ſunt *diviſor*, & *quotus* (§. 61. & 67.) ergo ſi numeri logiſtici □ dividantur per logiſticos ſimplices, quotus producitur logiſticus ſimplex. Q. E. D. Eodem modo demonſtratur pars altera.

THEOREMA IV.

123. PROP. *Dividendus logiſticus nequit eſſe logiſticus ſimplex, ſeu unius dimenſionis, ſi tam diviſor, quam quotus emergens ſit logiſticus decimalis.*

DEMONSTRATIO.

Dividendus logiſticus æquatur facto, quod producitur ex *quoto* logiſtico in *diviſorem* logiſticum ducto (§. 61. & 67.) ergo *quotus*, & *diviſor* ſunt duo factores logiſtici, ſed factum logiſticum ex *factoribus logiſticis* eſt duarum dimenſionum ſaltem per (§. 90.) ergo *dividendus* logiſticus nequit eſſe logiſticus unius dimenſionis, id eſt *ſimplex*. Q. E. D.

COROLLARIUM.

124. Hinc fi *dividendus* proponatur fub forma *fimplicis* per virgulas expreffus (ut proponitur in logiftica vulgari) hic reipfa fub ficta imagine *fimplicis*, aut □ eft, aut *cubicus*, prout factores, aut erant logiftici fimplices ambo, aut unus logifticus fimplex, alter □. *E. gr.* fit: $6\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{7}\overset{IV}{6}$ propofitus numerus logifticus fub ficta imagine *fimplicis*; hic numerus reipfa logifticus □ eft, productus ex factoribus fimplicibus: $\overset{\circ}{8}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{3}$, & $\overset{\circ}{7}\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{2}$, atque à nobis fub fua vera imagine propofitus habetur (§.115.) *Parad. I. Exemp. I.* ita expreffus: $6\overset{\circ}{1},\overset{\prime}{7}0,\overset{\prime\prime}{7}6$.

SCHOLION.

125. *Etfi dividendus effe nequeat logifticus fimplex*, (§.123.) *fua tamen utilitate non caret hæc fictio, cum ope hujus* valor quoti *in divifione logifticorum facillime determinetur per virgulas,* ut infra patebit. *Itaque ad fictam hanc imaginem fimplicis ante divifionem reducendus erit dividendus, fi is nondum formam fimplicis induit, quæ reductio per refolutionem fequentis problematis oftenditur.*

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Reducere numerum logifticum decimalem quemvis □, aut cubicum ad fictam imaginem fimplicis.*

RESOLUTIO.

I. *Si in dato numero adfint perticæ*; tali cafu, dextimæ notæ reducendi fuper ponantur tot virgulæ, quot numerantur notæ numericæ inchoando à perticis dextram verfus. *Ex. gr.* Sit propofitus numerus logifticus □, ad formam fictam fimplicis reducendus: $6\overset{\circ}{1},\overset{\prime}{7}0,\overset{\prime\prime}{7}6$, erit ad fictam imaginem fimplicis reductus: $6\overset{\circ}{1},707\overset{IV}{6}$. Quia 4 notæ numerantur inchoando à perticis ad finem, quas claritatis gratia adjecto *commate* diftinximus.

II. *Si*

II. *Si perticæ non adſint*, tali caſu, reducetur, ſi à virgulis ſpeciem in dato numero maximam ſignantibus inchoando, omnes reliquæ notæ virgulis numero creſcentibus ſignentur. *Ex. gr.* Sit reducendus ad formam ſimplicis: $\overset{'}{1}5,\overset{''}{2}2,\overset{'''}{8}0$, in quo ſpecies maxima ſunt pedes, erit reductus: $\overset{'}{1}\;\overset{''}{5}\;\overset{'''}{2}\;\overset{IV}{2}\;\overset{V}{8}\;\overset{VI}{0}$. Seu brevius ultimam tantum ſignando: $1\,5\,2\,2\,8\,\overset{VI}{0}$. *Hæc reſolutio demonſtratione non eget.*

PROBLEMA VIII.

127. PROP. *Dividere numeros logiſticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an tam *dividendus*, quam *diviſor* ſint ſub forma logiſtici ſimplicis; *Vide exempl. I.* Si non ſint, reducantur, juxta regulas (§.126.) datas, *Vide exempl. II.*

II. Si *dividendus* reductus non continet ſaltem ſpeciem linearum, augeatur in fine tot zeris, quot requiruntur, ut ſub forma ſimplici ſaltem lineas logiſticas contineat, (juxta §. 84.) *Vide exempl. III.*

III. Inſtituatur diviſio, ea prorſus methodo, qua in numeris vulgaribus (§. 64.) uſi ſumus, nihil reſpiciendo virgulas, ſed eas pro non adjectis habendo.

IV. Finita diviſione, ut inventus quotus apte per virgulas ſignetur, numerus virgularum, ſpeciem minimam in *diviſore* ſignantium, ſubtrahatur à virgulis *dividendi* itidem ſpeciem minimam denotantibus, & (ſi quotus ſimplex eſt) per reſiduas virgulas ſignetur dextima quoti nota, à qua inchoando ſignentur reliquæ per virgulas numero decreſcentes ſiniſtram verſus.

Vide exempl. I. II. & III. Si vero quotus □ ſit, (ut ſit, ſi logiſticus cubicus per diviſorem ſimplicem dividatur) isque ſub ficta imagine ſimplicis lateat, reducendus erit ad veram ſuam formam, per (§. 120.) *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. demonſtratione non egent. Reg. III. patet ex (§. 86.) ſolum igitur reſtat, ut Reg. IV. demonſtretur: tunc *quotus* juxta datam regulam exacte ſignatus habetur, quando ita ſignatus, per *diviſorem* quoque ſignatum multiplicatus, reſtituit cum iisdem virgulis ſignatum *dividendum*, ſed *quotus* ita ſignatus, & multiplicatus per *diviſorem* ſignatum reſtituit *dividendum* exacte ſignatum per (§. 115.) ergo Q. E. D.

PARADIGMA DIVISIONIS,
logiſticorum decimalium.

EXEMPLUM I.

Sit ſub forma logiſtici ſimplicis.

I. *Divid.*	6	$\overset{0}{1}$	$\overset{\prime}{7}$	$\overset{\prime\prime}{0}$	$\overset{\prime\prime\prime}{7}$	$\overset{iv}{6}$	$\left\{ \overset{0}{8}\ \overset{\prime}{4}\ \overset{\prime\prime}{3} \right.$	*quotus log. ſimplex, & ſignatus virgulis per Reg. IV.*
Diviſor		$\overset{0}{7}$	$\overset{\prime}{3}$	$\overset{\prime\prime}{2}$	.	.		
fact. ſubt	5	8	5	6	.	.		
II. *Divid.*		3	1	4	7	.		
Diviſor			7	3	2	.		
fact. ſubtr.		2	9	2	8	.		
III. *Divid.*			2	1	9	6		
Diviſor				7	3	2		
fact. ſubtr.			2	1	9	6		
			0	0	0	0		

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sit dividen. $\overset{\circ}{6},\overset{\prime}{1}5,\overset{\prime\prime}{2}2,\overset{\prime\prime\prime}{8}0$ *erit ad formam simplicis.*

I. *Divid. red.* $\overset{\circ}{6}152280$ (with $\overset{vi}{0}$) $\Big\{ \overset{\circ}{3}\ \overset{\prime}{0}\ \overset{\prime\prime}{7}\ \overset{\prime\prime\prime}{0}$ *quotus log. simplex & signatus virgulis per Reg. IV.*

Divisor $\overset{\prime\prime\prime}{2}004$ . . .
fact. subt. 6012 . . .

II. *Divid.* 1402 . .
Divisor 2004 . .

III. *Dividen.* 14028 .
Divisor 2004 .
fact. subt. 14028 .

IV. *Dividen.* - - - - - 0
Divisor 2004

EXEMPL. III. REG. II.

sit div. $\overset{\circ}{8}\overset{\prime}{6}\overset{\prime\prime}{4}$ *erit auct. zeris.*

I. *Divid.* $\overset{\circ}{8}\overset{\prime}{6}\overset{\prime\prime}{4}\overset{\prime\prime\prime}{0}\overset{iv}{0}$ $\Big\{ \overset{\circ}{3}\ \overset{\prime}{7}\ \overset{\prime\prime}{5}\ \overset{\prime\prime\prime}{6}$

Divisor $\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{3}$ . . .
fact. subt. 69 . .

II. *Divid.* 174 . .
Divisor 23 . .
fact. subt. 161 . .

III. *Divid.* 130 .
Divisor 23 .
fact. subtr. 115 .

IV. *Divid.* 150
Divisor 23
fact. subt. 138

Residuum 12 *negligitur ob parvitatem.*

EXEMPLUM IV.

Sit dividend. $4\overset{\bullet}{5},\overset{\prime}{1}\ 5\ 7,\overset{\prime\prime}{1}\ 4\ 8$, *erit reductus ad form. simplic.*

I. *Dividend.* $4\ \overset{\circ}{5}\ 1\ 5\ 7\ 1\ 4\ \overset{iv}{8}$ $\Big\{ \overset{\circ}{6}\ \overset{\prime}{1}\ \overset{\prime\prime}{5}\ \overset{\prime\prime\prime}{2}\ \overset{iv}{2}$ *quotus quadratus, & reductus per (§. 119.)* $\overset{\circ}{6},\overset{\prime}{1}\ 5,\overset{\prime\prime}{2}\ 2,$

Divisor $\overset{\bullet}{7}\ \overset{\prime}{3}\ \overset{\prime\prime}{4}$ . . . . .
fact. subt. 4 4 0 4 . . . .

II. *Dividend.* 1 1 1 7 . . .
Divisor 7 3 4 . . .
fact. subt. 7 3 4 . . .

III. *Dividend.* 3 8 3 1 . .
Divisor 7 3 4 . .
fact. subtrah. 3 6 7 0 . .

IV. *Dividend.* 1 6 1 4 .
Divisor 7 3 4 .
factum subtrah. 1 4 6 8 .

V. *Dividend.* 1 4 6 8
Divisor 7 3 4
factum subtrah. 1 4 6 8

Residuum - - - 0 0 0 0

SCHO-

SCHOLION I.

128. *Examen divisionis instituitur, ope multiplicationis* (§. 115.) *quotus nempe multiplicatus per divisorem restituere debet dividendum.*

SCHOLION II.

129. *Si divisor sit logisticus incompletus, seu si intermediæ species desint, compleatur juxta superius tradita.* (§. 89. 94. & 102.)

SCHOLION III.

130. *Ratio cur in casu Reg. II. augendus sit* dividendus *per zeros, hæc est, ut si post divisionem ultimam aliquid remaneat, id in praxi negligatur ob minutiam exiguam, quæ pro nihilo habetur, cum ultra lineas decimales in praxi ordinaria vix procedatur, etsi in Philosophia naturali longe majore opus sit accuratione, nec unquam nimia fuerit, si vel cum indefinite parvis quantitatibus calculus institui posset.*

SCHOLION IV.

131. *Prolixiorem me fuisse in hoc calculo logistico tradendo non diffiteor, in quo etiam a* praxi vulgari *in quibusdam recessi, sed enim noverint tyrones (in quorum gratiam hæc conscripta sunt) nunquam nimium esse posse in eo, quod est fundamentum maximum totius calculi Geometrici, & Philosophiæ naturalis, fidenter ajo, quemadmodum tyro in his logisticorum decimalium Algorithmis egregie versatus, omnes tum Geometriæ praxes, tum Philosophiæ naturalis experimenta ad calculum revocans, inoffenso pede percurrendo, facillime determinabit; Ita his non insignitus Mathematicus, aut Philosophus, nihil præter errores (si calculum spectes) eloquetur.*

FINIS PARTIS II.

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

CAPUT I.

De Reductione numerorum mixtorum Heterogeneorum reducibilium.

PROBLEMA I. UNIVERSALE.

132. PROP. *Reducere quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducibilem ad species inferiores, & vicissim speciem inferiorem ad superiorem.*

RESOLUTIO.

I. *Si species superior, seu major reducenda sit ad inferiorem, seu minorem.* Multiplicetur species major per speciem minorem, id est, per eum numerum speciei minoris, cujus unitates adæquant unitatem speciei superioris, seu majoris. *E. gr.* Sint reducendi 7. flor. germ. ad speciem crucif. cum unus flor. in specie xr. habet 60 unitates, multiplicentur 7 per 60, erit factum 420 xr. seu 7 flor. reducti ad cruciferos.

II. *Si species inferior, seu minor reducenda sit ad superiorem, seu majorem,* opus est divisione, videlicet; species inferior, seu minor dividatur per tot unitates, quot species inferior continet relate ad unitatem speciei superioris, ad quam reducenda est. *Ex. gr.* Sint redu-

reducendi 420 xr. ad flor. germ. cum flor. germ. contineat 60 xr. dividantur 420 xr. per 60, & quotus 7 designabit flor., seu speciem majorem.

SCHOLION I.

133. *Si quod residuum ex divisione sit, illud est ejusdem speciei cum* dividendo. Ex. gr. *Si ex divisione crucif. remaneat aliquid, illud sunt xr.*

SCHOLION II.

134. *Cum ad reductionem numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium prærequiratur notitia specierum inter se reducibilium, non inutile censuimus, quasdam tabulas subjungere, in quibus singularum specierum unitates continerentur, quarum usus ad calcem tabularum declaratur.*

SCHOLION III.

135. *Sua utilitate non carebit nobis in Transylvania versantibus praxim adferre, qua calculo perquam facillimo absque multiplicatione illico determinare licet, quotnam dati flor. germ. conficiant fl. Ung. per Transylvaniam usitatos, & vicissim; quod sequentibus duobus problematibus docetur.*

PROBLEMA II.

136. PROP. *Flor. germ. integros in Ung. ope additionis convertere.*

RESOLUTIO.

Constare debet operanti, flor. Ung. in Transylvania valere 100 *nummos, quales in flor. germ. habentur* 120, *juxta tabulam infra ponendam.* Igitur I. Si dentur flor. germ. quotcunque convertendi in Ungaricos, scribantur hi dati flor. germ. bis directe infra se invicem, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. respondeant, deinde idem numerus florenorum adhuc semel infra cæteros, sed una nota remotius, sinistram versus, scribatur.

II. Subducta linea hi numeri addantur in unam summam, cui summæ ad dextram adjungatur zerus.

III. A

III. A ſumma hac duæ notæ dextimæ abſcindantur, erunt hæ duæ notæ nummi, reliquæ ad ſiniſtram erunt flor. Ung. quos valent dati flor. germ. *Ex. gr.* Quæritur: 16 flor. germ. quot faciunt Ungaricos?

	16	*Reg. I.*
	16	
flor.	16	
Ung.	19,20 *nummi*	

Igitur juxta datas regulas ſic ſtabit operatio, id eſt flor. 16 germ. faciunt 19 flor. Ung. & 20 nummos.

DEMONSTRATIO
hujus Praxeos.

Quod hoc ordine numeri flor. ſcripti per additionem convertantur in Ung. eſt, quia hujusmodi additio vicem ſubit multiplicationis, quæ fieri deberet per 120 nummos, quot nempe nummos habet flor. germ. juxta (§. 132.); nam ad oculum patet, ſi 16 multiplicentur per 120, eodem modo collocati reperientur numeri. In Exemplo, productum primum per numerum 2 eſt 32, ſed hoc eſt 16 additum ad 16. *Deinde* ex producto ſecundo per numerum 1 patet, quod idem numerus 16 una nota remotior ſcribi debeat verſus ſiniſtram; ac *tandem*, quod zerus in fine ſummæ addi debeat, ratio eſt, quia multiplicans 120 habet zerum, ergo: Q. E. D.

Ex. gr.

```
   1 6
 1 2 0
 -----
   3 2
 1 6
 -----
1 9,2 0
```

COROLLARIUM I.

137. Quod ſi florenis germ. adhæreant crucif. hos per 2 multiplicando, aut (quod idem eſt) ſibimet ipſis addendo, in nummos converſos adde claſſi nummorum.

COROLLARIUM II.

138. Hac methodo quilibet ſibi facile conficere poterit tabellam, in qua ab uno flor. germ. ad 100 flor. converſio habeatur, qua uti poterit ad reducendos quodcunque flor. germ.

PRO-

PROBLEMA III.

139. *Florenos datos Ungaricales per Tranſylvaniam uſitatos, in German. convertere.*

RESOLUTIO.

I. Vide an flor. Ung. ſint integri, ſine nummis, an vero adjectos habeant nummos. Si ſint integri ſine nummis, appone zerum unum ad dextram, & numerum flor. divide per 12, quotus dabit flor. germ. *Vide exempl. I.*

II. Si quid reſiduum maneat ex hac diviſione, huic reſiduo adde iterum zerum, cujus ſummæ *dimidium* valebit crucif. *Vide exemplum II.*

III. Si floreni adjectos habeant nummos, illos abſcinde à flor. integris, & cum flor. operare, ut in *Reſolutione I.* deinde ad reſiduum, ſi quod eſt, adde abſciſſos nummos, & hujus dimidium dabit crucif. *Vide exempl. III.*

IV. Quod ſi ſumma nummorum ex reſiduo, & abſciſſis nummis adæquet numerum 120, cujus dimidium eſt 60, numero flor. invento addendus eſt unus flor. *Vide exempl. IV.*

EXEMPLUM I.

Sint flor. Ung. 24 in Germ. convertend,
erit

I. *Divid.*	2	4	0	20 *flor. germ.*
Diviſor.	1	2		
fact. ſubt.	2	4		
II. *Divid.*	-	-	0	
Diviſ.		1	2	

EXEMPLUM II.

Sint flor. Ungar. 28,
erit

Divid.	2	8	0	23 *flor. ger. &* 20 *crucif.*
Diviſ.	1	2	.	
fact.	2	4		
Divid.		4	0	
Diviſ.		1	2	
fact.		3	6	
Reſid.			4	*addito zero*

erit 40, cujus dimid. 20 xr.

EXEMPL.

EXEMPLUM III.

Sint flor. Ung. 23 *nummi* 40 *erit*

divid. 2 3 0 { 19 *flor. germ.*
divis. 1 2 } 30 *crucif.*
divid. 1 1 0
divis. 1 2
fact. 1 0 8

Residuum 2 *auctum zero erit* { 20 *cum* 40 *facit* 60, *cujus dimidium* 30.

EXEMPLUM IV.

Sint flor. Ung. 22 *nummi* 80 *erit*

2 2 0 { 18 *flor. germ.*
1 2 . } *crucif* 60 *seu flor. germ.* 19.
1 0 0
1 2
9 6

Residuum 4 *auctum zero erit* { 40 *cum* 80 *facit* 120, *cujus dimidium* 60 *cruc. seu flor. germ.*

CAPUT II.

REDUCTIONUM TABULÆ XV.

Ad Praxim arithmeticam summe utiles, ad usum vero civilem, & Philosophicum etiam necessariæ.

TAB. I.

Mensurarum vulgarium, seu civilium, longitudinis.

			$\frac{1}{4}$ *digiti.*
Digit.			4
Pes		12	48
Orgya una	6	72	288

Magnitudo pedis varia in Geometria adferetur.

TAB. II.

Ponderum Angliæ, *quibus in experimentis Philosophicis utuntur.*

Gran. min.			
24	*Gran. maj.*		
480	20	*Uncia.*	
5760	240	12	*Libra.*

Uncia valet 585$\frac{1}{7}$ *gr. Paris. vel* 499$\frac{1}{4}$ *gr. Apoth. Tab. VI.*

 TA-

TABULA III.

Ponderum Civilium, seu Mercatorum per Austriam, Ungariam, & Transylvaniam.

1 libra hujus æquiponderat 1 lib. 2 unc. 4 gros. 22 gran. pond. Paris.

1. *Drachma, seu Quintl* ¼ *Loth.*			
1. *Semiuncia, seu Loth*			4
1. *Libra*		32	128
1. *Centenarius*	100	3200	12800

TABULA IV.

Ponderum Galliæ, & Parisin.

Uncia hujus valet 1 Unc. $12\frac{1}{8}$ *gr. pond. Apoth. Tab. VI.*

1. *Carobe, seu siliqua aut tertia pars oboli*						
1. *Grain, seu Granum*						24
1. *Denier, ou carras, seu nummus*					24	576
1. *Gros, seu Grossus*				3	72	1728
Once, seu Uncia			8	24	576	13824
1. *Marcha*		8	64	192	4608	110592
1. *Livre, seu libra*	2	16	128	384	9216	221184

TABULA V.

Temporis vulgaris.

				Minut. 2dum
			Minut. 1mum.	″ 60
1. *Hora*			′ 60	3600
1. *Dies*		24	1440	86400
1. *Annus communis*	265¼	8766	525960	31557600

TA-

TABULA VI.

Ponderum Apothecariorum Nostratium.

1. *Granum.*				
20	1. *Scrupulus.*			
60	3	1. *Drachma.*		
480	24	8	1. *Uncia.*	
5760	288	96	12	1. *Libra.*

Granum valet circiter pondus unius grani piperis albi. Ponderis hujus 1 libra, & 7 Unc. faciunt 1 libram nostratem Tab. III. item 1 unc. ponderat 562 gr. Paris.

TABULA VII.

Ponderum Angliæ, Avoir du pois, seu Civil.

1. *Scrupul.*					
3	1. *Drachma.*				
24	8	1. *Uncia.*			
384	128	16	1. *Libra.*		
43008	14336	1792	112	1. *Centenar.*	
860160	286720	35840	2240	20	1. *Tonna.*

Uncia Angliæ valet 534 *grana ponderis Parisini. Ponderis vero* Apoth. Tab. VI. *valet* 456 Gr.

TABULA VIII.

Exhibens numerum librarum inter se, & cum Parisinis æquiponderantium ex Arit. Combe, Negoce rendu facile Pag. 448.

100	*Parisin.*	103	*August. Vind.*	125	*Vratislav.*
100	*Amstelodam.*	104	*Coloniens.*	150	*Genuens.*
100	*Argentorat.*	105	*Antverpiens.*	151	*Bononiens.*
89	*Genevens.*	105	*Hispaniæ.*	152	*Florent.*
95	*Berg. Noveg.*	105	*Lipsiens.*	166	*Venetia.*
98	*Basileens.*	113	*Dantiscan.*	169	*Neapolot.*
98	*Norimberg.*	114	*Lusitan.*	109	*Londin. min.*
102	*Hamburg.*	117	*Stockholm.*	97	*Londin. maj.*

Si Uncia Apoth. (*ut ponit* Cl. Eisenschm.) *habet* 562 *Gr. Paris. tum Vien. lib.* 86 [illegible] *ferè faciunt* 100 *Paris.*

TABULA IX.

Valor pecuniæ Germanicæ in Tranſylvania.

			Nummi.
1. *Crucif.*	2		
1. *Groſſus*	3	6	
1. *flor. germ.*	20	60	120

Marianus, valet 17 xr. & ſeptenarius 7 xr. ut in Auſtria, & Ung.

TABULA X.

Pecuniæ Ungaricæ per Tranſylvaniam.

Nummi.			
2	1. *Crucif.*		
6	3	1. *Groſſus.*	
100	50	$16\frac{2}{3}$	1. *flor. Ung. in Tranſylv.*

Marianus, & ſeptenarius valorem ſuum retinent, ut in Auſtria.

TABULA XI.

Valor pecuniæ Germanicæ in Ungaria.

						Nummi.
1. *Crucif.*	$1\frac{2}{3}$					
1. *Groſſus.*	3	5				
1. *Septenar.*	$2\frac{1}{3}$	7	$11\frac{2}{3}$			
1. *Marianus.*	$2\frac{3}{7}$	$5\frac{2}{3}$	17	$28\frac{1}{3}$		
1. *flor. Germ.*	$3\frac{9}{17}$	$8\frac{4}{7}$	20	60	100	
1. *Aureus Kremn.*	$4\frac{1}{5}$	$14\frac{14}{17}$	36	84	252	420

TABULA XII.

Menſuræ Vini in Tranſylvania.

				Quadrans.
1. *Sextarius, ſeu Media.*	2			
1. *Cupa, ſeu Menſura.*	2	4		
1. *Urna Tranſylv.*	8	16	32	
1. *Urna Germ. in Tranſylv.*	5	40	80	160

2. Menſuræ Tranſylvan. faciunt $1\frac{1}{2}$ menſuram Auſtriacam, vel Ungaricam cupam.

TA-

TABULA XIII.
Mensuras Geographorum exhibens.

NB. Granum Hordei *secundum latitudinem suam accipitur.*

1. *Granum Hordei.*										
4	1. *Digitus.*									
16	4	1. *Palmus.*								
64	16	4	1. *Pes.*							
320	80	20	5	1. *Passus.*						
40000	10000	2500	625	125	1. *Stadium.*					
320000	80000	20000	5000	1000	8	1. *Milliare Italicum.*				
1280000	320000	80000	20000	4000	32	4	1. *Milliare Germ. com.*			
320000	80000	20000	5000	1000	8	1	$\frac{1}{4}$	1. *Minutum.*		
19200000	4800000	1200000	300000	60000	480	60	15	60	1. *Gradus.*	
9612000000	172800000	432000000	108000000	21600000	172800	21600	5400	21600	360	*Circulus maximus Telluris.*
2201600000	550400000	137600000	34400000	6880000	55040	6880	1720 *ferè*	*Diameter.*		

TA-

TABULA XIV.

Valor pecuniæ Germanicæ ſecundum Valachos in Tranſylvania.

Nummi.

2	1. *Crucif.*				
6	3	1. *Groſſus.*			
12	6	2	1. *Suſták.*		
34	17	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{6}$	1. *Horgas, ſeu Marian.*	
102	51	17	$8\frac{1}{2}$	3	1. *Vonás flor.*

TABULA XV.

Monetariorum noſtratium, exhibens gradum puritatis metallorum.

1. *Granum.*

12	1. *Carat, ſeu Gradus.*		
18	$1\frac{1}{2}$	1. *Loth.*	
288	24	16	1. *Marcha.*

Puritas obryſi, ſeu nullo heterogeneo metallo permiſti auri ſtatuitur eſſe 24 Carat, ſeu Graduum, nempe totum pondus 16 Loth, continet 24 Gradus, ſeu Carat auri puri; & ſecundum hunc numerum Graduum, defectum puritatis exprimunt tam Monetarii, *quam* Aurifabri. E. gr. *Dum dicunt, ſpeciem auri dati eſſe 23 Carat, indicare volunt, in Marcha auri admixtum eſſe unum Carat de metallo heterogeneo.* Ex. gr. *Cupro. Similiter puritatem ſummam argenti ſtatuunt eſſe 16 Loth, id eſt, in Marcha dantur 16 Loth argenti puri, & ſecundum hunc numerum Lothonum (quem* probam *vocant) exprimunt defectum puritatis argenti, dum dicunt.* Ex. gr. *Hoc argentum eſt 14 Loth, ſeu probæ decimæ quartæ, indicare volunt, Marcham, ſeu (16 Loth) hujusmodi argenti continere argenti puri Loth 14, reliquos vero 2 Loth, ad complendos 16 Lothones, eſſe metallum heterogeneum* Ex. gr. *Cuprum admixtum; quam permixtionem* legam *vocant. Si vero pondus conſideretur, tunc 72 aurei Kremn. faciunt* Marcham, *& unus aureus ponderat 4 Grana Tabulu XV. 3 aurei faciunt unum Carat ponderis, 1 Carat appendit 160 Grana ponderis Apothecariorum noſtratium.*

PRO-

PROBLEMA IV.

140. PROP. *Uſus harum Tabularum.*

RESOLUTIO I.

Si quæratur: unitas datæ ſpeciei majoris, quot continet unitates ex data ſpecie minore? Ex. gr. *Orgya civilis, quot continet digitos?* Exquire in Tab. I. titulum *Orgyæ*, & titulum *digiti*, & communis concurſus, ſeu cellula dabit petitum numerum, 72 digitorum; eadem eſto regula de cæteris tabulis.

RESOLUTIO II.

141. Si quæratur: *Ex. gr.* 8 Orgyæ civilis quot faciunt digitos? Exquire, in Tab. I. unius Orgyæ digitos, per prius dicta, qui ſunt 72, hos multiplica per datum numerum 8, dabit productum 756 digitos, qui continentur in 8 Orgiis; *Hæc reſolutio eſt eadem, quæ probl. univerſ.* (§.132.) *de reductione majoris ad minorem ſpeciem.*

RESOLUTIO III.

142. Si quæratur: *Ex. gr.* 756 digiti, quot faciunt Orgyas? Exquire numerum digitorum unius Orgyæ in Tab. I. quem invenies 72, & per hunc numerum divide datos 756 digitos, dabit quotus numerum Orgyarum petitum 8. *Hæc reſolutio eadem eſt, cum probl. univ.* (§.132.) *de reductione ſpeciei minoris ad majorem.*

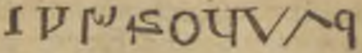
SCHOLION.

143. *Reliquos harum tabularum uſus dabimus ſuis locis; interea curioſo tyroni, coronidis loco, ultimas horum elementorum paginas, non ineruditis in notas Arithmeticas animadverſionibus locupletatas, ad eruditum uſum defero;* Primum: *notas numericas Arabum modernorum;* dein *eorundem Arabum (vel ut alii volunt Indorum) antiquiores in Europam illatas numerorum figuras, quibus Europæi ad ſæculum fere* XVI. *uſi fuere, adferam;* Subinde *originem Romanarum notarum dabo, ac poſtremo Tabellam tum Hebræi, tum Græci Alphabeti valorem literarum numericum exprimentem, adjunctis quibusdam veterum Græcorum notis compendiariis. Itaque.*

CAPUT III.

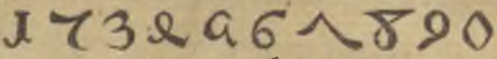
Animadversiones in notas numericas.

Figuræ, seu notæ Arabibus hodiernis usitatæ

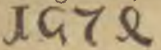
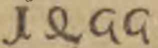
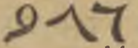


1 2 3 4 5 6 7 8 9

Notæ numericæ Arabicæ ab Europæis olim usurpatæ



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Notis his postremis Arabicis, etiamnum in plerisque Templis, & ædibus antiquioribus, per Austriam, Ungariam, & præsertim per Transylvaniam in sedibus, ut vocant, Saxonicis, Annos legimus consignatos, *Ex. gr.* legitur annus positarum ædium: , aut , vel , quos, nisi eruditus lector, nemo alter interpretabitur.

Notæ Romanæ hodiernæ, quæ vulgo pro litteris latinorum habentur.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

L.	C.	D.	M.
50	100	500	1000.

En Originem harum notarum.

Quemadmodum hodiernum rude vulgus hominum, ita Romani populi Patres primi, ignari Arithmeticæ, res suas numero definitas, lineolis, seu virgulis designabant, & exprimebant. *Ex. gr.* Volentes exprimere, se viginti modios tritici venumdedisse, ita scripserunt: IIIIIIIIIIIIIIIIIIII, atque harum ope virgularum

gularum maximos quosvis exprimebant numeros; qui modus conſignandi numeros, utpote prolixus admodum, & rudis, tædium non leve conſignandi, computandique creabat. Igitur de breviore modo ſcribendi per easdem uſu receptas virgulas à quibusdam acutioris ingenii cogitatum eſt, videlicet, ut duabus, tribusve virgulis, varie ad ſe invicem inclinatis, prolixiorem modum redderent breviorem, conſenſuque communi hominum in uſum civilem inducerent. Itaque compendium, à numero *quinario* inchoantes, ita exorſi videntur.

1. Numerum IIIII quinque virgularum, duabus virgulis ad ſe invicem inclinatis indicabant, videlicet V dein celerius exarando ita conjungebant V, unde orta figura hodierna numeri *quinque* (V), ſeu littera (v).

2. Hac figura numeri *quinque* V cum adjunctis dextram verſus virgulis rectis, exprimebant cæteros usque ad decadem, ſeu numerum decem; cum itaque bis *quinque* ſit *decem*, è duabus notis numeri *quinque*, ſibi ad verticem oppoſitis, figuram numeri *decem* compoſuerunt, videlicet X, quam celerius ſcribendo, ita efformabant X, cui originem debet nunc uſitata nota (X) ſeu littera (x).

His quatuor virgulis IIII, nota *quinarii* V, & *decenarii* X compendium quidem in minoribus, at non in majoribus numeris nacti Romani, cæteras quoque numerorum figuras invenère.

3. Itaque per incrementum *quinarii*, cum XXXXX ſeu quinquies decem, ſit *quinquaginta*, è binis virgulis rectis hoc ſitu L collocatis figuram componentes, *quinquaginta* indicarunt, quam celerius figurando, ita ſcribebant L, ex qua hodierna nota (L) ortum habet.

4. Porro, cum *centum* ſit bis quinquaginta, binas notas numeri *quinquaginta* L L hoc ſitu ⊏, quaſi inverſam unam Γ, alteram rectam L conjugentes expreſſerunt, quam celerius exarando, ita figurabant ⊏, dein ita ⊏, ac tandem celerrime fingendo in hanc C abiit, non abſimilem litteræ hodiernæ (C), centum deſignanti.

5. Cum quinquies centum ſint *quingenta*, loco figuræ centum, quinquies repetitæ, notas duas centenarii, converſim jungendo |⊐|, ſubſtituerunt, quæ celeritate ſcribendi in hanc |⊐|, dein in hujusmodi |Ↄ aut ſimilem |Ↄ, ac tandem in hanc D figuram, litteræ (D) conformem, & hodie uſitatam tranſiit.

6. Denique cum bis quingenta efficiant *mille*, binas *quingentarum* notas converſim locando, I⊐I⊐I *mille* efformabant, atque celerius ſcribendo ita ⊏|⊐|, ſeu CIↃ, celerrime C|Ↄ, vel ↀ, aut ⋒, quæ ultima figura, ſimillima minori litteræ (m) occaſionem præbuit Scribis, eam elegantius efformandi per litteram majorem (M) nunc uſitatam. Harum varias figuras ſub unum conſpectum hic exhibeo.

Numeri Romani originarii.

Notæ primævæ	I,	V,	X,	L,	⊏,	I⊐I,	I⊐I⊐I
Celerius ſcriptæ	I,	V,	X,	L,	⊏,	I⊐I,	⊏I⊐I
Multo celerius	I,	V,	X,	L,	C,	IↃ,	CIↃ
Celerrime	I,	V,	X,	L,	C,	IↃ,	ↀ
Ex quibus							
Ortæ hodiernæ	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.

His ſeptem figuris omnem numerum conſignabat populus Romanus ſua adhuc ruditate felix, quibus ingenioſa poſteritas alias quasdam adjecit, quarum nonnullas ex Arithmetica Cl. Poëtii excerptas damus.

Signum

Signum ∞ vel ∞, aut ◇∞◇ uſurpatum eſt loco numeri 1000.

Signum, vel , aut ((|)) ſignificabat numerum: 10000.

Geminata vel , deſignabant bis 10000, ſeu 20000.

Si ſignum millenarii (∞) anteponatur, *Ex. gr.* ∞ , ſubtrahendum intelligitur, id eſt: 19000.

Signum XX vel XX ſignificat 20, & XXX denotat 30. quibus uſu poſteriore acceſſerunt ſigna ab Authoribus ætatis etiam aureæ paſſim uſurpata ſequentia.

(|),	|)),	((|))	|))),	(((|))),	((((|)))).
$\overline{\text{I}}$,	$\overline{\text{V}}$,	$\overline{\text{X}}$,	$\overline{\text{L}}$,	$\overline{\text{C}}$,	$\overline{\text{M}}$.
1000,	5000,	10000,	50000,	100000,	1000000.

SCHOLION.

144. *Ne vero quiſpiam minus eruditus exiſtimet, expoſitam harum notarum originem, & natales, aut luſum ingenii, aut opinionem ſua carentem ratione, is quæſo conſulat ſcriptores rerum antiquarum, qui lapides, manuſcripta, nummos, cæteraque venerandæ antiquitatis monumenta pucherrima, his notis conſignata, erudito orbi reliquerunt;* Vide Cl. Eiſenſchmid. Diſquiſ. Tab. II. *Et certe, ſi rogatus fuerit quiſpiam dare rationem, cur nota litteræ* (V) *denotet numerum* quinque, *aut litera* (X) decem, *vel littera* (L) quinquaginta, *littera* (D) quingenta, *littera* (C) centum, *item* (M) mille: *Si originem, & natales harum notarum ignoret, quid roganti erudite reponat, non inveniet; unde liquet, cui fundamento vocum chronographicarum luſus initatur, quarum literæ, ſi ad natales ſuos reducantur, litem grammaticis moveant, cæteris vero ænigma intentent, eſt neceſſe, ut iſthoc:*

I⊐ ONI⊐ L VI⊐ IAI⊐I⊐I.

TA-

TABULA COMPENDIARIA,

Notarum numericarum Hebræis, & Græcis, ſcriptoribus uſu receptarum in gratiam eorum, qui lectione eruditorum librorum, cumprimis rerum antiquarum notitia delectantur.

Monades, ſeu Unitat.

Hebr.	Græc. M.	min.	min.	vulg.
א	I	α'	α	1
ב	II	β'	β	2
ג	III	γ'	γ	3
ד	IIII	δ'	δ	4
ה	Π	ε'	ε	5
ו	ΠI	ς'	ς	6
ז	ΠII	ζ'	ζ	7
ח	ΠIII	η'	η	8
ט	ΠIIII	θ'	ϑ	9

Decades.

Hebr.	Græc. M.	min.	min.	vulg.
י	Δ	ι'	ι	10
כ	ΔΔ	κ'	κ	20
ל	ΔΔΔ	λ'	λ	30
מ	ΔΔΔΔ	μ'	μ	40
נ	$\boxed{\Delta}$	ν'	ν	50
ס	$\boxed{\Delta}$Δ	ξ'	ξ	60
ע	$\boxed{\Delta}$ΔΔ	ο'	ο	70
פ	$\boxed{\Delta}$ΔΔΔ	π'	π	80
צ	ИΜ	ς'	ϟ	90

Centenarii.

Hebr.	Græc. M.	min.	min.	vulg.
ק	H	ρ'	ρ	100
ר	HH	σ'	σ	200
ש	HHH	τ'	τ	300
ת	HHHH	υ'	υ	400
ך	$\boxed{H}$	φ'	φ	500
ם	$\boxed{H}$H	χ'	χ	600
ן	$\boxed{H}$HH	ψ'	ψ	700
ף	$\boxed{H}$HHH	ω'	ω	800
ץ	$\boxed{H}$HHHH	ϖ'	ϡ	900

Chiliades, ſeu Millenarii.

Hebr.	Græc. M.	min.	min.	vulg.
א,	X	,α	α,	1000
ב,	XX	,β	β,	2000
ג,	XXX	,γ	γ,	3000
ד,	XXXX	,δ	δ,	4000
ה,	$\boxed{X}$	,ε	ε,	5000
ו,	$\boxed{X}$X	,ς	ς,	6000
ז,	$\boxed{X}$XX	,ζ	ζ,	7000
ח,	$\boxed{X}$XXX	,η	η,	8000
ט,	$\boxed{X}$XXXX	,ϑ	ϑ,	9000

Myriades, ſeu decem millenarii.

Hebr.	Græc. maj.	min.	min.	vulgar.
י,	M	ι	ι,	10000
כ,	MM	κ	κ,	20000
נ,	$\boxed{M}$	ν	ν,	50000
ס,	$\boxed{M}$M	ξ	ξ,	60000
צ,	$\boxed{M}$MMMM	Ͷ	ϟ,	90000

Centum

Centum millenarii.

Hebr.	*Græc. maj.*	*min.*	*min.*	*vulgar.*
ק,	XH,	,ρ	ρ,	100000
ך,	$\boxed{\text{XH}}$,	,φ	φ,	500000
ם,	$\boxed{\text{XH}}$XH,	,χ	χ,	600000

Et ſic de aliis.

Tres lineæ, quibus aliqua littera circumdatur, eſt figura literæ Π, quæ cum 5 ſignificet, indicat valorem litteræ ſibi incluſæ quinquies auctum, ut ex Schemate liquet.

SCHOLION I.

145. *Si quis ultro progredi voluerit in numeris, modum procedendi facile ex tabula intelliget; ex qua etiam ratio colligendi, & componendi numeros liquet; ſic: ſi quis præſentem annum* 1755 *deſignare vellet per litteras Græcas, eum denotare poterit vel majuſculis* X$\boxed{\text{H}}$HH$\boxed{\Delta}$Π, *vel minuſculis* ,αψνε, *aut ſimpliciter* α,ψνε, *item Hebraice:* אזנה",

SCHOLION II.

146. *Præter has in antiquis græcorum monumentis reperiuntur etiam ſimiles numerorum expreſſiones;* Ex. gr. *ſignificat* 1000, *ſupra quam figuram ſi ſcriptæ reperiantur litteræ, ita accipiendæ ſunt, ut litteræ monadum denotent* decades; *decadum*, centenarios, *centenariorum* millenarios; Er. gr. *Apud Ptolom. legitur* λα καὶ ,αψπγ, *id eſt:* 310000, & 1783, *ſimul* 311783. *Item apud eundem* κβ δ,χθ, oco 224609.

CAPUT ULTIMUM.

Tyronem manuducens ad praxim, & uſum quatuor Algorithmorum Arithmeticæ numerorum integrorum.

USUS ADDITIONIS.

QUÆSITUM I. Quando utendum Additione? ℞. Cum additio ſit collectio plurium numerorum partia-

partialium in unum totum (§. 30.) constat, amplissimum additionis usum in commerciis, conventisque hominum esse, dum rationes *accepti*, & *expensi* reddendæ, aut exposcendæ sunt; Itaque additione utimur, quando indagamus summam acceptorum, aut expositorum, unius septimanæ, vel mensis, aut anni, vel plurimum etiam annorum generalem summam. *Sic* Magister rationum (*vulgo* Perceptor, *aut* Provisor) *rationem inire volens, quantum toto anno perceperit? colligit, aut addit singularia accepta seu hebdomadarum, seu mensium in unam summam, quæ ostendit quantum toto perceperit anno. Per additionem quoque indagamus, quantum per particulares expensas erogatum, aut venditum, vel distractum, aut quoquo modo consumptum sit longiore quovis elapso tempore.*

USUS SUBTRACTIONIS.

QUÆSITUM II. Quando utendum subtractione? ℞. Cum per subtractionem innotescat Residuum, seu differentia duorum numerorum (§. 37.) subtractione utimur, quotiescunque indagamus differentiam, vel residuum duorum quantorum quorumvis. *Sic* Oeconomus *ex acquisitis per annum frumenti metretis 2685 sequenti anno partim venum dedit, partim in domesticas necessitates consumpsit metretas 1899 (ut illi ex libro rationum expositarum constat) quærit igitur ante messem novam quot metretas adhuc reliquas habeat? subtrahendo ergo 1899, à 2685, reperiet reliquas sibi adhuc esse debere 786 metretas; quod tamen residuum frumenti, si auctuali adhibita mensuratione, cum inito calculo non respondeat exacte, neminem aut furti, aut infidelitatis arguat Oeconomus, cum grana frumenti recentis ob humorem nativum turgentia, & mensurata, maiorem numerum metretarum conficiant, quam tempore diuturno siccata, ut nôrunt Oeconomi; quod etiam in liquidis observandum occurrit.*

Sic

Sic quoque Paterfamilias *rationem inire volens perceptæ ex censu annuo, rebusque Oeconomicis pecuniæ,* Ex. gr. 3427 *fl. Germ.* 45 *xr. cum exposita eodem anno pecunia* 3342 *fl. Ger.* 55 *xr. per subtractionem inquirit in residuam pecuniam, quam in dato exemplo reperiet esse* 84 *fl. Germ.* 50 *xr. unde liquet & hujus algorithmi usus per omnem vitam civilem amplissimus.*

USUS MULTIPLICATIONIS.

QUÆSITUM III. Quando utendum multiplicatione?

℞. Cum multiplicatio sit ejusdem numeri ad seipsum toties facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet (§. 45.) patet, & hujus algorithmi usum frequentissimum esse in commercio humano; nam multiplicatione utendum est, quotiescunque indagamus summam, seu quantum, quod consurgere debet ex repetita ejusdem numeri ad seipsum facta additione: *Ex. gr.* Præfecto annonæ *experientia constat juxta præscriptam normam in* 2000 *Milites singulis mensibus distribui farinæ metretas* 768, *quærit pro toto anno, seu per menses* 12 *quot metretas erogaturus est in eosdem* 2000 *milites; addit ergo* 768 *metretas sibimet duodecies, seu per* 12, *qui est mensium numerus, multiplicat* 768 *metretas, & factum* 9216 *dabit metretas intra annum* 2000 *militibus distribuendas.* Item Provisor rei œconomicæ *habet agrum, ad quem conserendum siliginis metretas insumit* 16, *habet autem alium agrum, quinquies majorem isto, quærit, quot metretis ejusdem frumenti ad conserendum illum agrum opus habeat, multiplicat igitur* 16 *per* 5, *& factum* 80 *indicat numerum metretarum, quibus opus habet ad conserendum agrum quinquies majorem priore.*

USUS DIVISIONIS.

QUÆSITUM IV. Quando utendum divisione?

℞. Præter innumeros fere casus divisione in vita communi utimur, quoties inquirimus in partem unam, quæ emer-

emergere debet, si certa summa in plures partes æqualiter, vel inæqualiter partienda sit. *Ex. gr. Habeo legatam summam pecuniæ 360 fl. Germ. in 24 pauperes æqualiter erogandam, quæritur, quot floreni singulis pauperibus dandi sunt? dividendo itaque numerum 360 per 24, prodibit quotus 15 fl. Germ. quæ est pars vigesima quarta de 360 flor. danda singulis pauperibus.* Item Præfectus annonæ *notum sibi habet, quod in 2000 milites spacio unius anni, seu 12 mensium, erogatæ sint 9216 metretæ frumenti, quærit, quot singulis mensibus aut erogatæ sint, aut erogari debeant? dividendo itaque 9216 per 12, emergit quotus 768 metretæ, spacio unius mensis erogatæ, aut erogandæ. Item cuipiam civitati impositum est quantum pecuniæ in ærarium Regium conferendæ 7620 fl. Ger. reperiuntur autem cives esse 1524, quæritur, quid singuli conferre debeant? dividendo itaque 7620 per 1524, emergit quotus 5, seu totidem floreni a singulis civibus æqualiter conferendi.*

SCHOLION.

Cæteros fere innumeros horum algorithmorum per omnem Mathesim, Philosophiam naturalem, ac vitam socialem usus, docentis institutioni, & discipulorum industriæ in datis circumstantiis usurpandos relinquimus potius, quam ut iis hic loci referendis, molem augendo, libellum pretiosum nonnullis Tyronibus reddamus. Porro hæc, quæ de algorithmis numerorum integrorum a nobis dicta sunt, reliquorum omnium, quæ per universam arithmeticam traduntur, fundamenta, atque elementa esse, quisque facile assequetur, cum nihil aliud in quæstionibus arithmeticis præcipiendum sit, quam, ut numeri vel addantur, subtrahanturve, *aut* multiplicentur, dividanturve. *Itaque, nisi Tyro, in his algorithmis probe sit exercitatus, frustra se se ad alia conferet, quæ ad Gloriam DEI Majorem ex bono Patriæ, ac vitæ civilis commodo consequendam, tradituri sumus.*

FINIS ARITHMETICÆ
NUMERICÆ INTEGRORUM.

INDEX

ELEMENTA
ALGEBRÆ.

PRÆFATIO.

Algorithmis quatuor Arithmeticæ numericæ instructo Tyroni Prima Algebræ *principia traditurus, ad summum scientiarum apicem aditum pando. Est hæc scientia inter Mathematicas hujus Ævi præcipua, ac nobilissima, quæ methodo Analytica veritates Mathematicas quantumlibet ignotas, & intricatas sagacitate mira feliciter detegit, explicat, invenit, inventas stricto compendio clarissime demonstrat, inque methodum Syntheticam non sine legentium admiratione ordinat. Hujus scientiæ tanta quorundam Mathematicorum animis insedit æstimatio, ut* Divinam *appellarent propterea, quod à sensuum cognitione longe remotissima perscrutando, nullis numerorum, aut mensurarum finibus, nulla magnitudinum mole conclusa per omnem, qua late patet veritatum Mathematicarum, rerumque naturalium campum diffusa quidquid* Quantum *audit, sibi proprium faciat, eaque facilitate abstrusa quæque pandat mysteria, ut oracula fundere videatur.*

Mirandam hanc artem munere DEI *veteribus quoque usitatam fuisse (cujus ope* Theoremata, *ac Problemata invenerint) quamque ipsi, ut eo major subiret alios inventorum admiratio, studiose dissimulaverint, Græcum de Arithmetica testatur opus* à Diophante Alexandrino *conscriptum, signis-*

*ſignisque conſignatum Algebraicis.** *Nec immerito ſcientia hæc veteribus nullo non æſtimanda pretio, tanquam ſummus mathematum Theſaurus ſecreti ſilentio tecta, paucisque diſcipulorum, (ut opinor) concredita, ſtudioſe cuſtodienda curabatur, cujus finem, ac ſcopum eſſe norant, quantitatem, ſub quibusvis quæſtionis etiam difficillimæ involucris deliteſcentem, ex leviſſimis, ac obviis indiciis (ut ita dicam) ſubodorari, tantisque veritatum certiſſimarum divitiis, quaſi aliud agendo* Philetis Sui *paucarum horarum laborem leviſſimum remunerari, quas arte Synthetica, ſummo etiam ingenio præcellens, labore maximo vix unquam ſatis aſſequeretur.*

Quapropter Recentiores hac arte beati, vim ejus mirandam in perſcrutandis, determinandisque naturæ phænomenis fauſto ſucceſſu experti, Philoſophica ſua circa res naturales dogmata Algebraicis expreſſa formulis propoſuere, probe gnari, unicâ ſæpe lineâ Algebraicis rite ſignata figuris, tot tantaque naturæ myſteria declarari, quibus explicandis (ſi verbis uterentur) complures paginas conſcribendi neceſſitatem ſibi imponerent.

Quæ

* Floruit Alexandriæ *Diophantus Mathem.* ſeculo poſt Chriſtum natum ſecundo, ſcripſit 13. de Algebra libros, quorum 6. tantum hodie ſuperſunt *à Xylandro* latinitate donati, hos primis Typis Anno 1575. in lucem datos ſubinde *D. Caſparus Bachet* commentariis ſuis Anno 1621. editis, auxerat.

Quæ cum ita sint, Matheseos juxta, ac Philosophiæ Recentiorum Studiosus diligentem scientiæ huic operam navet, oportet, qua adjutus non sine sincera voluptate animi ea reperiet Marte suo, quæ e veterum libris magna & temporis, & scientiæ jactura vix hauriet sine tædio, itaque secum statuat velim Tyro Analyseos, tantum se profecturum in Mathematicis, ac Philosophia naturali, quantum exercitatus fuerit in Algebra Geometriæ juncta, cujus prima principia duntaxat Recentiorum more, ad captum Tyronum methodo clara in DEI *Gloriam concinnata, isthic propono. Velim autem ea sibi in memoriam revocet Tyro monita, quæ Elementis Arithmeticæ præmiseram.*

CONSPECTUS PARTIUM, ET CAPITUM *Algebræ.*

PARS I.

De Arithmetica literali, seu Algebra tam speciosa quam numeroso integrorum cum fractis.

PARS II.

De Potentiis Quantitatum, & Earundem Radicibus.

PARS

PARS III.

De Analysi speciosa, seu Arte Resolvendi Problemata, & Quæstiones quantumvis reconditas.

PARS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, Usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

ELE-

ELEMENTA ALGEBRÆ PARS I.

DE ARITHMETICA LITERALI, SEU *Algebra tam ſpecioſa, quam numeroſa integrorum cum fractis.*

CAPUT I.

Hypotheſes, & Definitiones in Algebram univerſam.

DEFINITIO I.

Algebra eſt ſcientia, quæ ope literarum alphabeti, & certis adhibitis ſignis per regulas ſibi proprias inquirit in quantitates, & veritates ignotas, eaſque ex datis quibuſdam cognitis, ſecundum axiomata *Æqualitatis*, infallibiliter eruit, ac demonſtrative determinat. Dicitur etiam *calculus univerſalis*, quia literæ univerſaliter ſignificant quamcunque quantitatem, pro qua ſignificanda aſſummuntur.

SCHOLION.

2. *Dividitur* Algebra *in* Arithmeticam literalem, *ſeu* ſpecioſam, & *in* Analyſim ſublimiorem; Illa, *ſubſtitutis loco numerorum literis, in naturam numerorum, & veritates arithmeticas* univerſaliter *inquirit. Hæc quantitates quaſvis finitas, & menſurabiles per univerſam Matheſim, ac Philoſophiam vagantes eruit, demonſtrat, ac regulas univerſales invenit, & ſtatuit. Prior illa, ſi numeris (non ſubſtitutis literis) utatur, appellatur etiam* Algebra numeroſa.

DEFINITIO II.

3. *Quantitas* dicitur, quidquid addendo augeri, aut ſubtrahendo minui poteſt. *Quantum* verò appellatur, quod conſtare partibus intelligitur; harum reſpectu vocatur etiam *Totum.*

HYPOTHESIS I.

4. *Literæ Alphabeti minuſculæ ſubſtituuntur in Algebra pro* quantitatibus; *& quidem literæ Alphabeti priores,* Ex. gr. a, b, c, *&c. adhibentur pro quantitatibus nobis* notis, & cognitis. *Ultimæ vero* x, y, z, *pro* ignotis, *ſeu* quærendis, & determinandis *uſurpantur.*

SCHOLION I.

5. *Cum* quantitatis *nomine intelligatur quidquid augerì vel minuì poteſt* (§. 3.), *literæ alphabeti non tantum pro numeris, ſed etiam pro lineis, areis, corporibus, & univerſim pro omni quantitate ſubſtitui poſſunt; Utiliter autem quantitates cognitæ per primas, ignotæ per ultimas alphabeti literas exprimuntur, ut imaginationi, ac memoriæ diſtincte exhibeatur quantitas, cui inquirendæ per datas regulas inſiſtit operans. Sunt, qui, ut memoriæ, & imaginationi adhuc melius ſubvenirent, literis utuntur initialibus eorum nominum, per quæ, quantitates tanquam cognitæ denominantur.* Ex. gr. *Locò datæ quantitatis cognitæ* Temporis, *ponunt literam* T, *locò* ponderis P. *locò* milliarium M, *locò* celeritatis C, *&c. quod laudabile Recentiorum inventum etiam nos in Algebra ad Geometriam applicata ſequemur; Ignotas tamen, ſeu quærendas quantitates non aliter, quàm per ultimas literas* x, y, z, *appellabimus.* Vieta *poſt antiquiores Algebræ Reſtaurator, & Inventor uſus eſt literis majoribus alphabeti, alii cum Anglis ſecuti* Harriotum *incognitas quantitates per* vocales, *cognitas per* conſonantes *exprimebant. Literis minuſculis uſus eſt* Carteſius, *cujus praxim hodierni ferè omnes ſequuntur præter Anglos quosdam.*

SCHOLION II.

6. *Quoniam literæ ſubſtituuntur pro quacunque quantitate* (§. 4.) *eæque ſic ſubſtitutæ,* univerſaliter ſignificant *illam quantitatem, pro qua ſubſtitutæ ſunt* (§. 1.) *ſequitur calculum literalem Algebræ, eſſe calculum* quantitatum indeterminatarum; *non quidem in hoc ſenſu, quaſi talis quantitas in ſe non eſſet determinata, & certa, ſed quod relate ad* unitatem *(quæ nobis arbitraria eſt) per quam determinatur talis quantitas, non ſit determinata, eò quod unitas non ſupponatur determinata; determinata*

minata autem unitate, & *ipsa quantitas determinata intelligitur. Sic, si litera* a *significet* altitudinem Ex. gr. *montis, aut turris, hæc litera* a *significare potest altitudinem magnam, aut parvam, mensurabilem per perticas, aut pedes, aut tantum per digitos, & hoc modo dicitur quantitas* a indeterminata; *si vero supponatur altitudo* a, Ex. gr. montis, *esse centum pedum, determinata habetur* unitas *nempe* pes, *à qua determinata, determinatur quoque quantitas altitudinis* a. *Et in hoc sensu calculus literalis, dicitur calculus* universalis, *seu* indeterminatorum, *vimque obtinet* Regulæ, *ac* Theorematis universalis, *quidquid per* literas *rite expressum habetur, ut inferius declarabitur.*

SCHOLION III.

7. *Ut Tyronibus (qui usu idæarum universalium destituti in primis Algebræ algorithmis, & principiis, nescio, quas tenebras experiri solent, aut è præjudiciis aliorum sibimet monstrosa mysteria fingunt)* virtus, *ac non satis laudanda* vis universalis *Algebræ ob oculos ponatur; paritate desumpta ex Arithmetica numerica, ut puto,* universalitatem, & indeterminationem *quantitatum literis alphabeti expressarum, ad captum declarabimus. Itaque, quemadmodum in Arithmetica numerica,* signa, *seu* notæ numericæ puræ, & abstractæ *ab omni materia.* Ex. gr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. *significant suo modo* universaliter, & indeterminatè *omnem numerum mixtum, & concretum,* Ex. gr. *numerus* purus, & abstractus 5, *significare potest* 5 Studiosos, *vel* 5 Domos, *vel* 5 Libros, *aut* 5 Urnas vini, 5 Perticas, 5 Ulnas &c. *ita pariter (imò magis universaliter) literæ alphabeti pro quantitatibus in Algebra usurpatæ, ac substitutæ, significant quantitatem* universaliter, *ac* indeterminatè, *ut* exemplum in priore scholio adductum declarat; *Et verò quid magis universaliter significare potest, quam litera* a, *aut* b, *denotans* Ex. gr. lineam, *quæ cum multorum milliarium longa, aut tam brevis esse possit, ut unius, alteriusve capilli latitudinem vix excedat, certè litera hujusmodi magnam æquè, ac parvam denotabit, aut significabit lineam. Et hinc, sicut numerus* purus Ex. gr. 5. *ante applicationem ad materiam erat* signum, *seu* nota universalis *quinque unitatum suo modo* indeterminatarum, *applicatus vero ad materiam* Ex. gr. *Urnas vini jam* determinatus *evadit; ita litera alphabeti* Ex. gr. a, *aut* b, *substituta pro significanda quantitate lineari, significat universaliter omnem longitudinem lineæ, assumpto autem determinato numero* Ex. gr. *perticarum, cujus* unitas *(nempe pertica) determinata intelligitur, jam determinata evadit quantitas per literam prius universaliter indicata; Aut quemadmodum in dialectica vox* Domus *significat omne ædificium habitabile, atque* indeterminatè *significat domum, vel religiosam, vel sæcularem, aut rusticanam, &c. Et per adjectam vocem aliquam determinantem ad certam speciem* Ex. gr. Principis, *primò restringitur, ita etiam litera pro quantitate substituta;*

stituta; hoc solum discrimine, quod dialectico (propter communem hominum institutionem) voce Domus, *uti non liceat ad significandum* Ex. gr. calamum, *liceat autem utenti Algebrâ, per literam* a, Ex. gr. *significare, & denominare vel lineam, vel numerum, vel milliare &c. non secus, atque in arbitrio Parentis est, nato sibi filio imponere nomen Petri, aut Joannis, aut Stephani, &c.*

AXIOMA I. FUNDAMENTALE.

8. Quantitas, quæ sub considerationem, & calculum Algebraicum aut Mathematicum cadere potest, triplex constituitur: Quantitas *positiva*, vel *affirmativa*, quæ etiam *major nihilo* dicitur. 2. Quantitas *nulla*, aut *æqualis nihilo*. 3. Quantitas *negativa*, aut *minor nihilo*.

DECLARATIO AXIOMATIS FUNDAMENTALIS.

Primo: Petrus *Ex. gr.* habet florenos 8, nullique hominum tenetur, aut debet aliquid; hi 8 floreni relate ad Petrum possessorem sunt quantitas *positiva*, *realis*, & *affirmativa*, atque *major nihilo*, cum plus habeat, quam nihil.

Secundo: Habeat Petrus tantum 8 florenos, teneatur autem ex debito hos 8 florenos, seu totidem Joanni, tali casu, si Petrus Joanni det hos 8 fl. intelligetur habere nihil, id est quantitatem *nullam*, seu *æqualem nihilo*.

Tertio: Habeat Petrus 8 florenos, teneatur autem Joanni flor. 10, tali casu, si Petrus Joanni det hos 8 fl. tenebitur adhuc 2 florenis, qui 2 flor. sunt quantitas *negativa*, & *minor nihilo*, cum ad hoc, ut Petrus nihil habeat, requirantur adhuc 2 floreni positivi, quos tenetur Joanni, iisque habitis, & redditis Joanni, primum intelligetur Petrus habere nihil.

SCHOLION I.

9. *Sunt, qui axioma hoc fundamentale declarant per motum progressivum hominis;* Ex. gr. *Statue te medium inter portam, & fenestram oppositam portæ tui cubiculi, & esto tibi negotium aliquod peragendum*

extra

extra cubiculum, ad quem finem obtinendum necesse est, te propinquum fieri portæ, ut per eam exeas. Itaque 1$^{\text{mò}}$: *si e medio cubiculi, in quo consistis, duos passus versus portam facias, diceris, facere duos passus* positivos, *quia conducunt ad tuum finem, extra cubiculum egrediendi.* 2$^{\text{dò}}$: *Si verò in medio consistens quietus maneas, id est, nec versus portam, nec fenestram versus ullum passum facias, habebis motum* nullum, *id est, quantitatem* nullam *motus progressivi portam versus.* 3$^{\text{tiò}}$: *Si e medio non portam versus (per quam te exire necesse est) sed versus fenestram duos passus retrò facias, diceris fecisse duos passus* negativos, *respectu nempe habito ad exitum per portam, cum non appropinques portæ, sed ab ea magis elongeris, atque ad hoc, ut e medio portam versus non processisse dicaris, necesse est, te per duos passus ad medium redire cubiculi, in quo consistens, deprehendes, te nihil magis portæ appropinquâsse, quam si ibi quietus mansisses.* Cl. Jo. Poëtius *explicat per motum progressivum hominis in navi à prora ad puppim progredientis dum interea navis secundo fluvio defertur. Nobis tamen prima declaratio, utpote magis ad captum Tyronum, placet præ cæteris.*

SCHOLION II.

10. *Tyrones axioma hoc fundamentale (§. 8.) alte menti imprimant, & omnem quantitatem, quæ per decursum Algebræ occurret, per modum illorum 8 & 10 florenorum considerare assuescant, ex qua consideratione maxima tum intelligendi, tum operandi facilitas in Algebra dependet.*

HYPOTHESIS II.

11. *Signum Algebraicum indicans quantitatem aliquam esse* positivam, *vel* affirmativam (§. 8.) *aut* majorem nihilo, *est præfixa quantitati datæ crucula hujusmodi* (+) *minor, & enunciatur per vocem:* plus, *sic* + a, *significat quantitatem* a *esse* positivam, *& enunciatur*, plus a. *Similiter*; a + b, *enunciatur*, a plus b. *Signum quantitatis* negativæ (§. 8.) *aut* minoris nihilo, *est lineola* (—) *præfixa, & enunciatur per vocem* minus; Ex. gr. *sit*, a — b, *dic*, a minus b. *Signum quantitatis* nullius (§. 8.) *est zerus* (0), *qui, cum* nullam quantitatem *significet, præfigi non solet literis, sed tantum inservit in problematibus reductis ad* nihilum, *ut locum unius partis Æquationis occupet*, ut infra dicetur.

SCHOLION I.

12. *Signa hæc* +, & — *afficiunt tantum illas quantitates, aut literas, quibus præfiguntur, nec ultra suam vim exerunt.* NB. Si initio alicujus calculi literalis nullum *expresse* præfigatur signum, semper intelligatur *tacite* præfixum esse signum +, idque ex institutione hominum, adeoque illam quantitatem primam, esse positivam.

SCHOLION II.

13. *Quantitas* negativa, *seu quæ præfixum habet* (—) *signum hoc, non in eo sensu accipienda est, esse* negativa, *quasi esset* non ens, *aut quid imaginarium, existens tantum in cerebro Mathematicorum, sed reipsa est quantitas realis quidem, & existens, sed quæ tantum suam* præsentiam *hic & nunc negat, id est, pro his certis circumstantiis præsens esse non intelligitur, tanquam non conducens ad finem intentum. Exemplum habes in* (§. 9.) *de duobus passibus fenestram versus factis, qui utique* reales, & existentes *intelliguntur, sed solum sunt* negativi *relate ad finem intentum, exeundi nempe per portam, ad quem finem tanquam non conducentes*, præsentiam *suam negant, id est, negativi evadunt respective tantum ad datas circumstantias, licet in aliis circumstantiis positivi esse possint*, Ex. gr. *si consistens in medio cubiculi fenestram aperire velis. Non secus duo illi floreni* negativi (*in* §. 8.) *quos propter debitum 10 florenor. supra 8 floren.* positivos *persolvere tenetur* Petrus Joanni, *tantum* non præsentes *intelliguntur, relate ad Petrum, etsi alibi* reales *sint*, & existant, *atque seclusa circumstantia debiti, etiam relate ad Petrum esse possint* positivi, *id est*, præsentes. *Itaque quantitatem esse* negativam, *est*, non negare existentiam, sed præsentiam *quantitatis pro datis circumstantiis.*

HYPOTHESIS III.

14. *Loco vocis* æqualis, *vel* æquale, *per quam indicamus* æqualitatem *duarum, vel plurium quantitatum, in Algebra usurpantur hæc signa*, (=) *vel* (::) *aut* (∝), *inter quantitates* æquales *posita.* Ex. gr. *Si volumus indicare quantitatem* a *esse æqualem quantitati* b, *scribatur sic*, a = b, *aut* a :: b, *vel* a ∝ b, & *enunciatur*, a æquale b, *ita* 7 :: 7, *dic*, 7 æquale 7.

HYPOTHESIS IV.

15. *Signum* Majoritatis *est* (>); *signum vero* Minoritatis (<) *indicans duarum quantitatum eam esse* mino-

minorem, *versus quam cuspis porrigitur, alteram verò* majorem. Ex.g. a $>$ b, *enunciatur*; a est majus quàm b, *item* b $<$ a, *enunciatur*; b est minus quàm a, *eodem modo*; 8 $<$ 12, *dic*, 8 est minus quàm 12; *aut*, 12 $>$ 8, *dic*, 12 est majus quàm 8.

SCHOLION.

16. *In Algebra etiam per certa signa ipsæ quoque operationes, seu Algorithmi indicantur, uti sunt:* Additio, subtractio, multiplicatio, divisio, extractio radicis, prop -tionis &c.

HYPOTHESIS V.

17. *Signum* Additionis, *seu* collectionis *est* (+) *præfixum quantitati additæ, & enunciatur per vocem*; Plus; Ex.gr. *Summa duarum quantitatum* a *&* b *indicatur, aut scribitur ita*, a + b, *& enunciatur*; a plus b, *hoc est:* ad quantitatem a addita est quantitas b. *Quod si* Ex. gr. 8 *vocetur* a, *&* 5 *vocetur* b, *quantitas* a + b *significabit summam* $8 + 5 = 13$.

HYPOTHESIS VI.

18. *Signum* subtractionis, *seu* diminutionis *est lineola* (—) *præfixa quantitati subtrahendæ, & enunciatur per vocem*; Minus, Ex. gr. *Residuum, aut differentia duarum quantitatum* a *&* b, *indicatur, aut scribitur ita*, a — b, *& enunciatur*, a minus b, *hoc est:* ex quantitate a ablata, *aut* subtracta est quantitas b. *Quod si* Ex. gr. 8 *vocetur* a, *&* 5 *vocetur* b, *significabit residuum* a — b *idem quod* 8 — 5, *id est*, 3.

COROLLARIUM.

19. Quoniam + est signum *Additionis*, simulque signum quantitatis *positivæ* (§.11.) hoc verò — est signum *subtractionis*, & simul signum quantitatis *negativæ* (§.11.) quantitas autem *positiva*, & *negativa*, itemque *additio*, & *subtractio* sibi contrarie opponuntur (§ 121. Arithm.) patet quantitates duas, quarum una habet signum +, altera signum — præfixum, esse sibi *contrarie* oppositas, & invicem *destructivas*; hinc signa + & — vocantur etiam *signa contraria*.

ria, & quantitates his affectæ, vocantur affectæ *fignis contrariis*. Ex qua hypothefi manifeftum eft fequens axioma fundamentale.

AXIOMA II. FUNDAMENTALE.

20. Quantitas pofitiva cum quantitate negativa *æquali*, æquatur *nihilo*, feu *zero* (o), id eft, fe invicem totaliter deftruunt, fic: $a - a = 0$, aut $-a + a = 0$ feu fi a valeat 4, erit $4 - 4 = 0$, aut, $-4 + 4 = 0$.

COROLLARIUM.

21. Si quantitas *pofitiva* major eft quantitate *negativa* fibi conjuncta, tali cafu, quantitas *negativa* tantam partem deftruit ex *pofitiva*, quantam ipfa *negativa* indicat; & viciffim, fi quantitas *negativa* major eft quantitate *pofitiva* fibi conjuncta, quantitas *pofitiva* tantum deftruit ex *negativa*, quantum *pofitiva* fe habere indicat. *Ex.gr.* Sit quantitas $+8$, & altera -5, cum fit $8 > 5$, erit; $8 - 5 = 3$, id eft, quinque unitates *negativæ* ex 8 *pofitivis* deftruunt quinque unitates; & iterum, fit quantitas $+5$, & altera -8, erit $-8 + 5 = -3$. Quia quinque *pofitivæ* unitates, deftruunt ex 8 negativis quinque, unde remanent tres *negativæ*. Ut patet ex (§. 8.)

DEFINITIO III.

22. *Quantitas incomplexa*, aut *monomia*, vocatur quævis quantitas feorfim fumpta, id eft, non conjuncta cum altera quantitate per figna $+$ vel $-$ interpofita: *Ex.gr.* a, vel b, aut c, item ba, vel cba, aut dfc &c.

DEFINITIO IV.

23. *Quantitas complexa*, aut *Polynomia*, dicitur, cum duæ vel plures quantitates interpofitis fignis $+$ vel $-$ fibi junguntur; *E.g.* $a + b$, aut $a - b$, vel $a + b + c$; item: $ba + c - ad$ &c.

SCHOLION.

24. *Quando duæ quantitates per fignum* $+$ *vel* $-$ *conjunguntur; Ex. gr.* $a + b$, *vel* $a - b$, *aut* $ad + bc$ &c. *hujusmodi* complexa quantitas *vocatur*, Binomia, *id eft :* (duarum partium). *Si tres, Ex.gr.*

$a + b$

$a+b+c$, *vel* $a-b+c$, *&c. vocatur* Trinomia; *si* quatuor, Ex. gr. $a+b-c+d$, *&c. dicitur* Quadrinomia. *In genere, si plures per signa* $+$ *vel* $-$ *jungantur, appellatur quantitas complexa* Polynomia.

HYPOTHESIS VII.

25. *Signa Algebraica* multiplicationem *quantitatum indicantia, sunt:* Primo: *usitatissimum signum est, si factores absque ullo signo interposito sibi connexi scribantur*, Ex. gr. *Si volumus indicare productum, quod ortum est ex multiplicatione duorum factorum* a *&* b, *scribatur*, ba, *vel* ab; Secundo: multiplicationem *indicat punctum* (.) *inter factores interjectum, aut duæ lineæ decussatæ* ($\times$) *interpositæ.* Ex. gr. a.b, *vel* $a\times b$, *& enunciatur*, a est multiplicatum per b;

Hoc ultimo ($\times$) *signo nos raro utemur.*

SCHOLION.

26. *Itaque si* Ex. gr. a *valeat* 8, & b *valeat* 3, *erit productum ex* a *per* b; *id est:* $ab = 24$, *item* $a.b = 8.3 = 24$, *aut* $a \times b = 8 \times 3 = 24$. *hoc est* productum 24, *quod factum est ex* factoribus 8 & 3, *indicari potest per signa, vel sic:* 8.3, *vel* 8×3, *quæ significant* multiplicationem. *Adhibent etiam aliqui pro signo multiplicationis* comma (,) *sed minus recte propter confusionem typi, nos* commate *pro signo multiplicationis nunquam utemur, sed sufficiat insinuasse, ne erroris Typographos arguamus, cum pro signo multiplicationis* comma *positum legerimus.*

HYPOTHESIS VIII.

27. *Si multiplicatio quantitatis polynomiæ per monomiam, & vicissim, item multiplicatio quantitatis polynomiæ per polynomiam indicanda sit, quantitas polynomia parenthesi includatur, & alteri quantitati vel cum, vel sine signo multiplicationis* (§. 25.) *jungatur.* Ex. gr. *Sit indicanda multiplicatio ex factore* $a+b-c$ *in factorem* d; scribatur $(a+b-c)\,d$, vel $d\,(a+b-c)$ vel interjecto puncto $(a+b-c).d$, vel interjecto $\times$ signo, $(a+b-c)\times d$, seu $d\times(a+b-c)$, *sit item indicanda multiplicatio quantitatis* polynomiæ, $a+b-c$,

 per

per polynomiam $d + f - m$; ſcribatur: $(a + b - c)(d + f - m)$ vel $(a + b - c).(d + f - m)$, aut etiam $(a + b - c) \times (d + f - m)$.

SCHOLION I.

28. *Vulgo, exempla a nobis expreſſa ita etiam ſcribuntur:* $\overline{a + b - c}, d$; *vel* $\overline{a + b - c}. d$, *aut* $\overline{a + b - c} \times d$, *item exempla noſtra polynomiorum vulgo ſic exprimuntur:* $\overline{a + b - c}. \overline{d + f - m}$, *aut* $\overline{a + b - c} \times \overline{d + f - m}$; *in quibus* notandum; *quod ſi ſuperducta linea non omnes quantitates includat;* Ex. gr. $a + \overline{b - c} \times \overline{d + f}$, *intelligi debet, illas quantitates, ad quas linea ſuperducta non porrigitur, non eſſe multiplicatas per cæteras, uti in hoc exemplo eſt quantitas* a, *quæ non intelligitur multiplicata per* $\overline{d + f}$, *ſed ſolum quantitas* $\overline{b - c}$: *quia linea ſupra* $\overline{b - c}$ *ducta, non extenditur ſupra quantitatem* a. *Unde, quia per ductum hujusmodi lineæ facile error committi poteſt, tutius erit uti parentheſi, & ab uſu hujuscemodi expreſſionis abſtinere, niſi caſus* ſcholii ſequentis *urgeat.*

SCHOLION II.

29. *Contingit non nunquam, ut per ſigna* (§. 27.) indicatam *jam duorum Factorum* multiplicationem *per novum tertium factorem aliquem, multiplicatam eſſe, indicare cogamur; tali caſu, ſuper priori modo indicatam multiplicationem linea ducenda erit, quæ indicet, an uterque factorum prioris expreſſionis, an unus aliquis tantum per novum tertium factorem multiplicatus ſit.* Ex. gr. *Sit quantitas, quæ jam eſt expreſſa per ſigna multiplicationis hæc:* $a + b - c).(d + f - m)$ *denuo ſuperindicanda, eſſe tota multiplicata per novum factorem;* $n + u$, *ſcribatur ſic:* $\overline{(a + b - c).(d + f - m)} \times (n + u)$, *vel ſic:* $\overline{(a + b - c).(d + f - m)} \times \overline{n + u}$. *Quodſi linea ſuper unum ex factoribus ducta non ſit, intelligendum eſt, illum non eſſe multiplicatum per tertium novum factorem;* Ex. gr. *Si ſcribatur:* $(a + b - c).\overline{(d + f - m)} \times \overline{n + u}$, *vel ſic:* $\overline{(a + b - c)}.\overline{(d + f - m) \times n + u}$; *Vulgo hæc exempla ſic exprimuntur:* $\overline{\overline{a + b - c}. \overline{d + f - m}} \times \overline{n + u}$, *vel etiam hoc modo:* $\overline{a + b - c. \overline{d + f - m}} \times \overline{n + u}$, *aut* $\overline{a + b - c}. \overline{\overline{d + f - m} \times \overline{n + u}}$; *ſed hæc Tyronibus inſinuaſſe ſufficiat, cum ejuscemodi exempla rarius occurrant.*

HYPOTHESIS IX.

30. *Signa Algebraica* Diviſionem *indicantia ſunt* Primo: *uſitatiſſimum ſignum eſt, ſi indicetur per modum* fractionis, *id eſt, ſi* dividendus *ſubducatur linea, & infra lineam ſcribatur* diviſor; Ex. gr. *indicare volumus quantitatem dividendam* a *eſſe diviſam per diviſorem* b,

ſcriba-

ſcribatur ſic, $\frac{a}{b}$ *& enunciatur*, a diviſum per b. Secundo: *Non minus uſitatum ſignum* diviſionis *ſunt duo puncta* (:) *interjecta inter totum* dividendum, *&* diviſorem; Ex. gr. *Si ſcribatur* a : b, *dic*, a *eſt* diviſum per b.

SCHOLION.

31. *Quemadmodum* multiplicatio indicata (§. 25.) *ſignificat* productum, *ita* diviſio indicata, *ſignificat* quotum, *adeoque hæ expreſſiones* $\frac{a}{b}$ *vel* a : b *exprimunt* quotum *ex* diviſione *ortum*. Ex. gr. *Si* a *valeat* 12, b *valeat* 4, *erit* $\frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3$, *item* $a : b = 12 : 4 = 3$, *cum* 3 *ſit* quotus *ortus ex diviſione* 12 *per* 4.

HYPOTHESIS X.

32. *Si* diviſio *quantitatis* polynomiæ *per* monomiam, *& viciſſim, item, ſi* diviſio polynomiæ *quantitatis per* polynomiam *indicanda ſit, polynomia quantitas parentheſi includatur, ſi nempe pro ſigno* diviſionis *uſurpentur* (:) *duo puncta*; *ſi verò per modum fractionis exprimere placeat, omittatur parentheſis, ſed linea ſub* dividendo *ducta ad totum dividendum, & diviſorem extendatur*; Ex. gr. *Sit quantitas* a + b *indicanda eſſe diviſa per* c, *ſcribatur*, (a + b) : c, *vel* $\frac{a+b}{c}$ *eodem modo, ſi dividendus ſit* a, *& diviſor ſit* b + c, *ſcribatur*, a : (b + c) *vel* $\frac{a}{b+c}$ *item, ſit quantitas* polynomia a + b − c *indicanda eſſe diviſa per polynomiam* d + m, (a + b − c) : (d + m) *vel ſic* $\frac{a+b-c}{d+m}$.

SCHOLION.

33. *Vulgo, ut in multiplicatione indicanda* (§. 28.) *dictum eſt, etiam in indicanda* diviſione *pro* parentheſi *uſurpatur linea.* E. g. *loco* (a + b) : c, *ita* ſcribitur : $\overline{a+b} : c$, *item diviſio* polynomiæ *per* polynomiam, *ſic exprimitur* : $\overline{a+b-c : d+m}$. *Hinc, quæ de his ſignis in ſcholio* (§. 28. & 29.) *monuimus huc quoque cum analogia applicari poſſunt.*

COROL-

COROLLARIUM I.

34. Quoniam, *quod multiplicatio componit, tollit divisio* (§. 121. Arith.) patet *multiplicationem*, & *divisionem* sibi *contrarie* opponi, atque adeo adducta (§. 25.) *signa multiplicationis*, & adducta (§. 30.) *signa divisionis* esse signa *contraria*, & *hinc destructiva*, sive *deletiva* quantitatum earundem his signis affectarum; quantitates his signis affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Unde manifestum est, sequens corollarium.

COROLLARIUM II.

35 Quantitas aliqua *multiplicata* per quantitatem aliam quamcunque, & per eandem simul *divisa*, manet *invariata*, id est, nec illi quantitati aliquid accedit per *multiplicationem*, nec per *divisionem* decedit aliquid. *Ex. gr.* Sit a quantitas *multiplicata* per b, & *divisa* per eandem b, erit expressio hujusmodi; $\frac{ab}{b}=a$, vel $\frac{a.b}{b}=a$, aut $\frac{a\times b}{b}=a$, item sic: $(a.b):b=a$, vel sic: $(a\times b):b=a$.

Idem patet in numeris, si *Ex. gr.* a valet 5, b valeat 2, erunt priores literales expressiones in numeris hujusmodi: $\frac{10}{2}=5$, vel $\frac{5.2}{2}=5$, aut $\frac{5\times 2}{2}=5$, item sic: $(5.2):2=5$, vel $(5\times 2):2=5$.

COROLLARIUM III.

36. Unde quantitas *multiplicans* simul, & *dividens* aliam aliquam quantitatem tanquam si non adesset, id est, pro *nulla* quantitate habetur, atque adeo *deleri*, & *omitti* potest.

SCHOLION.

37. *Ut memoriæ tyronum consuleretur, Hypothesium hucusque declaratarum tabellam compendiariam, velut* memoriæ adjumentum quoddam *subjicere placuit, in qua residuas quoque nondum adductas* signorum Hypotheses *quæ explicatione vix egent, subjungimus.*

TABULA COMPENDIARIA.

38. *Exhibens Hypotheses signorum in Algebra hodierna usitatorum.*

$+$ Est signum quantitatis *Positivæ*, seu *Affirmativæ*, & *Præsentis* (§. 11.) item signum est *Additionis*, seu *colle-*

collectionis, (§. 17.) & enunciatur per vocem: *plus*; sic $a+b$, dic, *a plus b*.

NB. *Hoc signum initio formulæ alicujus Algebraicæ, non præfigitur, præfixum tamen subintelligitur.* (§. 12.)

— Est signum quantitatis *Negativæ* (§. 11.) item *Subtractionis*, seu *diminutionis* (§. 18.) & enunciatur per vocem, *minus*; sic, $a-b$, dic, *a minus b*.

× vel (.) aut (,) est signum *Multiplicationis*, seu *producti*, sic, $a\times b$, vel $a.b$, dic *a est multiplicatum per b*, usitatissimè sic scribitur ab (§. 25. & seq.)

: *Divisionis*, seu *quoti*, sed usitatissimè per modum fractionis; sic, $a:b$, vel $\frac{a}{b}$, dic, *a est divisum per b*, (§. 30. & seq.)

= vel (::) aut (∝) est signum *Æqualitatis*; sic, $a=b$, vel $a::b$, aut $a \propto b$, dic, *a est æquale b*, (§. 14.)

> Est *Majoritatis*, sic, $a>b$, dic, *a est majus, quàm b*, (§. 15.)

< *Minoritatis*; sic, $b<a$, dic, *b est minus, quàm a*, (§. 15.)

o *Nullitatis*; sic, $a=0$, dic, *a est æquale nihilo*, id est, *nulla quantitas*, (§. 20.)

∽ *Similitudinis*, sic, $a \backsim b$, dic, *a est quantitas similis quantitati b*.

∞ *Infinitudinis*; sic, $a=\infty$, dic, *a est æquale infinito*, vel potius, *indefinito*.

√ Est signum *Radicis*; sic, $a=\sqrt{b}$, dic, *a est æquale radici de quantitate b*.

$\sqrt{\sqrt{}}$ Significat *Radicem radicis*, sic, $a=\sqrt{\sqrt{b+d}}$, dic, *a æquale radici de radice b+d*.

∺ Est

$\div\!\!\div$ Est signum *Proportionis geometricæ continuæ*, ut suo loco dicetur.

Cætera pauca per algebram occurrentia signa suis locis adferentur.

SCHOLION I.

39. *Iisdem omnino signis utitur* Algebra numerosa (§. 2.), *seu ea pars Algebræ, quæ pro numeris* puris, & abstractis *non substituit litteras alphabeti, sed adhibitis signis Algebræ cum numeris suas operationes peragit.*

SCHOLION II.

40. *Tyrones significationem, & usum horum signorum admodum familiarem sibi reddant oportet, in quorum recto usu stupenda totius Algebræ virtus, & admiranda vis, ac efficacia potissimum consistit. His enim solis signis in acceptis referre debemus artem, ac methodum proprio marte inveniendi, ac demonstrandi veritates mathematicas, seu* Theoremata; *His signis debemus, resolutiones per quam faciles problematum seu quæstionum, quorum solutio vix possibilis fore crederetur; His signis adjuti plus hora, velut aliud agendo, sine fatigio, & intensione intellectus condiscimus, quam alia methodo vix mense integro ex aliorum libris non sine tædio, & molestia hauriremus. His signis adjuti regulas nobis formamus ipsemet generales, quæ litteris, & signis paucis expressæ memoria ita retinentur, ut earum ætate tota vix oblivisci possimus; si tamen oblivisceremur, in his signis, penum mathematicam, velut in nuce Iliadem, collectam habemus, è qua sine magno labore regulam universalem, dum illa opus habemus, ultro nobismet ipsis depromimus. Signa hæc vices docentis, & nos instruentis Magistri fideliter obeunt, nihil recondunt, sed arcana omnia pandunt, & clarius longe, paucisque verbis veritates eloquuntur mathematicas, quam dissertissimus Mathematicorum unquam præstare potuerit;* Verbo, *in his mysteria omnia totius artis Analyticæ contineri usus ipse docebit; hujus vero stupendæ signorum horum virtutis ratio in eo sita est, quod* notiones signis expressæ, *sint imagines quædam sistentes imaginationi nostræ ea præsentia, quæ alias, aut ultra ejus agendi sphæram ascenderent, aut ob imaginationis evagationem facilem, elaberentur.*

HYPOTHESIS XI.

41. *Quantitatis cognitæ* eædem *seu æquales*, literis iisdem; diversæ, *literis etiam* diversis *denominandæ sint.* Ex. gr. *Sint in data aliqua quæstione* floreni, grossi, cruciferi, *denominetur jam* arbitrarie *florenus per literam*

literam a, *igitur per hanc literam* a, groſſum *denominare non licet*, *ſed* groſſum *per diverſam literam* Ex. gr. b, *item* cruciferum, *nec per literam* a, *nec per* b, *ſed per tertiam aliquam* c *denominare cogimur*, (intelligendo in eadem tractanda quæſtione) *quia* floreni, groſſi, & cruciferi, *ſunt inter ſe diverſæ ſpeciei*, *quam diverſitatem*, *ſeu heterogeneitatem literæ ſubſtitutæ per ſeipſas exprimere tenentur.*

COROLLARIUM.

42. Quoniam numeri *puri*, & *abſtracti* (§.18. Arith.) Solam multitudinem unitatum ſignificant; unitatum autem multitudo una, altera multitudine major, minorve eſſe poſſit; ſequitur *numeros puros* eandem multitudinem unitatum habentes, pro quantitatibus *æqualibus*, id eſt *iisdem* haberi, *Ex. gr.* 8, & 8, numeros verò puros majorem unitatum multitudinem habentes pro *inæqualibus*, id eſt *diverſis*, cenſeri, *Ex. gr.* 5, & 8; Et hinc, ſi pro numeris literæ ſubſtituantur, *Numeri ejusdem multitudinis per literas easdem*, *diverſæ multitudinis per literas etiam diverſas denominandi ſunt*; ut ſi denominandi ſunt numeri per literas, *Ex. gr.* 5, 8, 24, cum omnes inter ſe ſint diverſi; ſi ſit $5 = a$, & $8 = b$, numerus 24 nec vocari poteſt a, nec dici b, ſed per tertiam aliquam *Ex. gr.* $24 = c$, intelligendo in eadem quæſtione tractanda.

SCHOLION.

43. *Quod de quantitatibus cognitis denominandis dictum eſt*, *idem in denominandis incognitis tenendum*, *ut diverſæ incognitæ per diverſas ultimas alphabeti literas*, *eædem verò per easdem denominentur*, *niſi diverſæ quantitates incognitæ propter certam relationem ad ſe invicem*, *ad eandem reduci poſſint*, Ex. gr. *Sit una* x, *altera* y, *conſtet autem ex circumſtantiis*, *vel aliunde*, y *quantitatem eſſe* duplam *de quantitate* x, *tali caſu*, *utique loco* y, *ſcribere poſſum* 2x, *adeoque* y *ſub eadem expreſſione* x, *exhibere licet*; ut infra dicetur, *quod monitum etiam ſervit in denominandis cognitis.*

DEFINITIO V.

44. Quantitas monomia *compoſita*, dicitur, quæ duabus, vel pluribus literis (nullo intermediante ſigno

aliquo)

aliquo) ſibi invicem conjunctis expreſſa habetur; *Ex.gr.* bc, vel bca, aut $abdc$; item aa, vel aab, aut dfc, &c.

COROLLARIUM.

45. Ex (§. 25.) patet, quod quantitas monomia compoſita exprimat Hypotheſim multiplicationis *primo modo* indicatam, & viciſſim Hypotheſis multiplicationis *primo modo* indicata, exprimat quantitatem monomiam compoſitam.

DEFINITIO VI.

46. Quantitas monomia *affecta coëfficiente*, dicitur, cui ad partem ſiniſtram (NB. *nequaquam ad dextram*) præfixus eſt numerus aliquis, vel absque ſigno ullo intermediante, *Ex.gr.* $3a$, vel $4ab$, aut $15bc$; vel etiam intermediante ſigno, ſed *ſolius multiplicationis*, *Ex. gr.* $3.a$, vel $4.ab$, aut $15.ab$. Numeri verò præfixi vocantur *coëfficientes*.

COROLLARIUM I.

47. *Coëfficientes* itaque indicant, quoties ſibimet quantitas literalis *addita* eſt, *Ex.gr.* $3a$ ſignificat quantitatem *a ter* ſibimet *additam*, & *Coëfficiens* 3 conjunctus quantitati a, ſupplet hanc longiorem expreſſionem; $a+a+a$; item $4ab$ ſignificat quantitatem *ab quater* ſibimet *additam*, & ſupplet vicem hujus longæ expreſſionis; $ab+ab+ab+ab$; unde porro liquet, quod expreſſio per *coëfficientes*, ſit modus quidam ſcribendi per *abreviationem* quantitates literales, ſibimet aliquoties additas, ita *Ex. gr.* loco hujus ſeriei; $bc+bc+bc+bc+bc+bc+bc$, breviſſime ſcribitur, $7bc$. Item loco hujus, $2bd+3bd+5bd+7bd$, ſcribatur: $17bd$. Idem intelligendum de quantitatibus negativis, ſic $-4a$, eſt compendioſa expreſſio hujus, $-a-a-a-a$.

COROLLARIUM II.

48. Quoniam omnis quantitas monomia (conſiderata per modum *totius*) ſeipſam *ſemel* ſumptam, id eſt, *unum* totum ſignificat, omnis quantitas monomia non affecta coëfficiente, *unitatem* tacitè præfixam habere intelligitur; *E. gr.* a idem eſt quod $1a$, aut $bc=1bc$; &c. NB. *Hæc unitas nunquam expreſſe præfigitur*, (niſi circumſtantiæ aliud ſuadeant) *ſemper tamen tacite præfixa intelligitur.*

DEFI-

DEFINITIO VII.

49. Quantitas literalis *affecta exponente*, illa dicitur, quæ ad dextram ſurſum verſus, vel numerum, vel literam appoſitam habet; *Ex.gr.* a^3, vel ab', aut a', vel a^{vi}; numeri verò, vel literæ ad dextram poſitæ, vocantur *Exponentes*.

COROLLARIUM.

50. Cum *exponentes* ex Hypotheſi indicent repetitam datæ quantitatis per ſemetipſam multiplicationem, *E.gr.* a^3 indicat quantitatem a eſſe multiplicatam per eandem a ſeu aa, & hoc factum aa, eſſe iterum multiplicatum per a, ſeu aaa; ſequitur, expreſſionem hanc a^3, ſupplere hanc longiorem, aaa, vel $(a.a).a$, aut hanc $(a \times a) \times a$; & hinc liquet, expreſſionem per *exponentes*, eſſe modum ſcribendi per *abreviationem* quantitates easdem in ſemet aliquoties multiplicatas. Sic loco hujus ſeriei; $a.a.a.a.a$, vel loco hujus; $aaaaa$, breviſſime ſcribitur: a^5.

SCHOLION.

51. *Obſervent tyrones, atque altè menti imprimant* notiones diſtinctas coëfficientium, & exponentium, *nè ſcilicet* coëfficientes, *cum* exponentibus *confundantur, aut pro eodem accipiantur; Alia enim longe quantitas indicatur per* coëfficientem, & *alia per* exponentem. *ſic* E. gr. *alia quantitas eſt* 3a, & *alia* a^3; *nam* 3a *ponitur loco hujus expreſſionis*, $a + a + a$ (§. 47.) *Hæc verò* a^3, *loco hujus* aaa, *vel loco hujus* $(a.a).a$, (§. 50.) *quarum prior nempe* 3a *ſignificat* additionem ſimpliciter *toties factam, quot unitates habet coëfficiens numerus* 3. (§. 47.) *Altera verò*, a^3, *multiplicationem ſuimetipſius*, & *quidem iteratam indicat*, (§. 50.) *ut patet ad oculum ſi pro litteris ſubſtituantur numeri;* Ex. gr. *Sit* $a = 4$. *erit;* $3a = a + a + a$, *hoc eſt* $4 + 4 + 4 = 12$. (47.) *Hæc verò* $a^3 = (a.a).a$, *hoc eſt:* $(4.4).4 = 64$ *per* (§. 50.) *Adeoque* $3a = 12$, & $a^3 = 64$, *patet autem* 12, & 64 *eſſe quantitates utique valde inter ſe diſcrepantes.*

DEFINITIO VIII.

52. Quantitates monomiæ dicuntur *Homogeneæ* (§. 20. Arith.) quæ, & iisdem literis conſtant (§. 41. & 43.) & *exponentes* (ſi adſint) eosdem habeant, tametſi diverſis affectæ ſint coëfficientibus; ſic Homogeneæ ſunt *Ex.gr.* $3a$, & $4a$, item, $2ab$, & $5ba$, vel $3a^2$, & $7a^2$.

SCHOLION.

53. *Animadvertant Tyrones* Homogeneitatem *in quantitatibus monomiis* compoſitis *non tolli per diverſum præciſe* earundem *litterarum inter ſe ordinem, & ſitum; ſic quantitas compoſita monomia*, Ex. gr. abc *manet* homogenea, *licet* ejusdem *litteræ quocunque ordine, & ſitu permutatæ combinentur*, Ex. gr. abc, acb, bca, bac, cba, cab, & *hinc adductæ hæ quantitates ſingulæ exprimunt* Hypotheſim multiplicationis (§. 45. & 25.) factum *autem ſeu* productum *manet idem, quomodocunque factores inter ſe ducantur*, (§. 49. Arith.) *igitur manifeſtum eſt, adductas quantitates eſſe inter ſe easdem, & æquales, id eſt*, homogeneas.

DEFINITIO IX.

54. *Heterogeneæ* quantitates monomiæ (§. 21. Arith.) dicuntur, quæ vel per unam literam diverſam inter ſe diſcrepant, aut *exponentes* (ſi adſint) diverſos habeant; diverſitas autem *coëfficientium* non inducit *heterogeneitatem*, (§. 52.) ſic *heterogeneæ* ſunt, *Ex. gr.* a & b, item, ab, & bc, aut cba, & bcd; *Heterogeneæ* quoque ſunt, numeri ſeorſim poſiti, & literæ, *Ex. gr.* ab, & 15, aut $3bc$, & 3, &c.

SCHOLION.

55. *Quod de* homogeneitate, & heterogeneitate *quantitatum monomiarum* compoſitarum, exponentibus *affectarum, dictum eſt, idem omnino cum analogia intelligendum eſt de quantitatibus monomiis habentibus præfixum ſignum* ($\sqrt{}$), *ut ſuo loco declarabimus.*

DEFINITIO X.

56. *Formula*, aut *Propoſitio practica Algebraica*, dicitur quodvis literale complexum, exhibens univerſaliter per ſigna Algebraica factas, aut faciendas operationes algebraicas; *Ex. gr. Hoc complexum Algebraicum*, $x = \frac{bc}{a}$ *exhibens quantitatem incognitam* x, *eſſe* æqualem *quantitati* b, multiplicatæ *per quantitatem* c, & diviſæ *per quantitatem* a, & hinc.

DEFI-

DEFINITIO XI.

57. *Resolutio Algebraica*, (quæ etiam *constructio* in Geometria appellatur) est, si formula algebraica secundum suam expressionem universalem proposita, resolvatur in suos valores determinatos, substituendo videlicet pro literis, vel *numeros arithmeticos*, vel *figuram per lineas* geometricè construendo; si in numeros simpliciter resolvatur, dicitur *Resolutio*, si verò per lineas geometricas determinetur, dicitur *constructio*. *Ex.gr.* Sit $b=4$, $c=3$, & $a=2$, sitque *formula Algebraica resolvenda in numeros substitutos hæc*; $x=\frac{bc}{a}$ *erit in numeris*; $x=\frac{4.3}{2}$, seu, $x=\frac{12}{2}$, id est, $x=6$; *adeoque x est* æqualis *quantitati numericæ* 4, multiplicatæ *per numerum* 3, & divisæ *per numerum* 2; quod ipsum faciendum *formula algebraica* eloquitur.

DEFINITIO XII.

58. *Demonstratio*, seu *propositio speculativa algebraica*, est formula algebraica, quæ per sua signa, ac literas exhibet, & eloquitur eam veritatem universalem, quam demonstrandam proposuimus, simulque continet tacitè argumentationem demonstrativam. *Ex.gr.* Sit algebraicè demonstranda hæc veritas universalis: *Quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt*; erit demonstratio algebraica hæc formula: $-a+a=0$, quæ formula universalis dictam propositionem exactè eloquitur, & simul hanc tacitam argumentationem continet: *Quantitas* $-a$ *est quantitas* negativa *per* (§.11.), & *quantitas* $+a$, *est quantitas* positiva *per* (§.11.); *eadem hæc quantitas positiva* $+a$, *est simul* æqualis *quantitati* $-a$, *per* (§.41.) *præterea quantitas* $+a$, *est simul* addita *quantitati* $-a$, *per* (§.17.), *ergo*, (in hac formula) *habetur quantitas*

positiva conjuncta cum quantitate negativa æquali; sed quantitas positiva cum quantitate negativa æquali æquantur nihilo, id est, se invicem destruunt totaliter per (§. 20.), *ergo quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt totaliter.* En stupendam signorum energiam.

COROLLARIUM.

59. Liquet itaque formulas algebraicas, & exprimere *propositionem speculativam*, vel *practicam*, & simul continere modum perfectissimum argumentandi, id est, *demonstrationem*, & quidem paucissimis characteribus clarissimò tanquam in imagine expressam, & eloquentem. *Patet secundo:* mira signorum, & literarum virtus, quam (utpote *universaliter*) eloquuntur, hanc virtutem *numeri*, etiamsi sint *puri*, possidere nequeunt, cum numeri determinatas unitatum multitudines exhibeant, id est, numeri sunt *quantitates determinatæ*, & hinc *formula Algebræ numerosæ* (§ 39.) *declarationi* tantum, non autem *demonstrationi* inservire potest. *Tertio:* clarum est, *formulas Algebraicas*, esse quoddam *compendium universale* veritatum mathematicarum, quo una linea sæpe tot veritates eloquitur, quas, si per voces consignare, & explicare vellemus, non una pagina conscribenda foret, *ut patebit inferius.* Qua propter.

SCHOLION.

60. *Tyrones seriò* contemplationi, *ac* resolutioni *formularum Algebraicarum incumbant*, quod ipsum monitum in Prolegomenis ad Tyrones dedi, *atque habita præ oculis formula Algebraica quacunque, identidem sibimet ipsis hanc cantilenam occinant;* Quid loquitur hæc formula? Quam veritatem per sua signa, & literas indicat, & exprimit? quid jubet faciendum? *Experto credant velim, cantilenam hanc* millies *repetitam*, millies *placituram magis, cum fructu Rei litterariæ, & quod consequens est, Reipublic. nullo non tempore satis æstimando, proprio experimento discent, dum ea in lucem* marte proprio *proferent, quæ hactenus, vel acutissimos etiam Mathematicos, & Philosophos, aut latuerunt, aut quæ repererunt adeo obscuris ambagibus, ad nos transmissa dolemus, ut iis explicandis, & enodandis Oedipi sagacitatem vix suffecturam crederes.*

THEOREMA I. PRÆLIMINARE.

16. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propositionem speculativam rite per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, vices obit* Theorematis Mathematici.

DEMONSTRATIO.

Theorema mathematicum est complexum constans propositione speculativa universali, & demonstratione propositionis, seu est veritas proposita, & demonstrata, per (*Prolegom.*), sed hujusmodi complexum est omnis formula algebraica continens propositionem speculativam ritè per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, per (§. 58.) ergo. Q. E. D.

THEOREMA II. PRÆLIMINARE.

62. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propositionem practicam rite per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, vices obit* problematis Mathematici.

DEMONSTRATIO.

Problema Mathematicum, est complexum constans propositione practica, resolutione propositionis, & demonstratione resolutionis, per (*Prolegom.*) sed hujusmodi complexum est omnis formula algebraica continens propositionem practicam ritè per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam per (§. 56. & 57.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

63. Quidquid igitur formula algebraica ritè per suas regulas, hypotheses, & axiomata deducta exprimit, & eloquitur, pro *demonstrato* ab omnibus concedendum, & admittendum est.

SCHOLION.

64. *Tyrones singula, quæ hoc capite, quod jure clavim totius Algebræ dixerim, continentur, sæpius relegendo repetant, ac memoriæ mandent. Expertus loquor, eos, qui hæc intelligendo penetraverint, &*

memoria retinuerint, vix aliquam per decursum hujus doctrinæ difficultatem habituros. Iis verò, qui hoc neglecto capite ad cætera Algebræ secreta sine clavi hac se penetraturos confidunt, suadeo, pedem referant, atque tempus pretiosum, in hoc perdendum, in alio scientiæ genere redimant.

CAPUT II.

De Additione Algebraica.

DEFINITIO XIII.

65. Quantitates *literales*, seu *Algebraicæ* dicuntur quantitates quæcunque per literas alphabeti (§. 4.) denominatæ, & expressæ. *Ex. gr.* Si linea vocetur a, aut numerus 1000 appelletur b. Quantitates a & b vocantur *literales*, seu *algebraicæ*.

DEFINITIO XIV.

66. *Additio Algebraica* est quarumcunque, & quomodocunque affectarum quantitatum literalium, (sive eæ numeris permixtæ sint, sive non sint) in unum complexum algebraicum collectio. Hoc complexum vocatur *Totum*, seu *Summa*.

THEOREMA III. FUNDAMENTALE.

67. PROP. *Complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium* suis signis *affectarum, non variatur quoad quantitatem,* id est, *valor complexi algebraici nec augetur, nec minuitur.* E.g. Complexum algebraicum ($a+b-c$) idem manet quoad quantitatem seu scribatur; ($b+a-c$), sive ($b-c+a$), sive ($-c+a+b$), aut ($-c+b+a$) &c.

DEMONSTRATIO.

Complexum Algebraicum est *totum quoddam*, aggregatum ex quantitatibus literalibus duabus, vel pluribus,

bus, tanquam partibus (§. 23. & 24.) *totum* autem variari non intelligitur quoad quantitatem, nisi varientur quoque quoad quantitatem partes constituentes totum (§. 5. Arithm.) sed partes quoad quantitatem non variantur per solam permutationem loci aut ordinis (§. 3.), ergo complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium *suis signis* affectarum non variatur quoad quantitatem. Q.E.D.

SCHOLION.

68. *Theorema hoc per modum axiomatis assummi poterat, cum penetratis ritè terminis veritas per se nota sit; certum nempe clarumque est, numerum* Ex. gr. 100 *hominum non variari quocunque ordine* 100 *homines disponantur, semper enim numerus* 100 *hominum, erit centum, & nunquam major, aut minor per solam transpositionem localem evadere potest.*

COROLLARIUM I.

69. Quoniam summa ex *Additione algebraica* resultans est *complexum algebraicum*; eadem erit summa, quocunque ordine quantitates literales cum suis signis collectæ scribantur; Et hinc *Additio* quantitatum literalium inchoari potest à quacunque quantitate literali ad arbitrium operantis, modo in summa, omnes ritè collectas esse, exprimatur.

COROLLARIUM II.

70. Cum in *subtractione algebraica* residuum, sit differentia quantitatum, & quidem singularum à singulis (§. 37. Arithm.) differentiam quoque per solam permutationem quantitatum literalium suis signis affectarum, non variari, clarum est.

COROLLARIUM III.

71. In *multiplicatione* quoque *algebraica* factum totale per solam permutationem factorum partialium non variari, clarum est ex notione totius complexi algebraici (§. 67); In factis autem partialibus combinatio literarum per (§. 25.) non variat factum, quocunque ordine factores inter se combinentur ut patet ex (§. 53.). Et hinc *multiplicatio algebraica* inchoari potest à quacunque quantitate *multiplicandi*, & per quamcunque quantitatem *multiplicantis*; *ut infra patebit.*

COROLLARIUM IV.

72. Ex eodem Theoremate ſequitur, quod in *Diviſione algebraica*, arbitrarium ſit operanti, diviſionem inchoare à quacunque quantitate *dividendi*, & per quamcunque quantitatem *diviſoris*; item quotos ex diviſione reſultantes quocunque ordine ſcribi poſſe, infra docebitur.

SCHOLION.

73. *Liquet itaque multo faciliores eſſe operationes Arithmeticæ litteralis, quam numerorum, cum in operationibus numericis opus ſit multis regulis ſolum ſitum, & ordinem concernentibus, easque regulas caute obſervandas habeat operans, quibus in calculo litterali tutò ſuperſedemus.*

PROBLEMA I.

74. PROP. *Quantitates quascunque ſignis algebraicis expreſſas addere.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates addendæ ſint inter ſe homogeneæ* (§. 52. & 53.)

I. *Coëfficientes* quantitatum homogenearum iisdem ſignis (hoc eſt, quarum quælibet habet ſignum +, vel quævis ſignum —) affectarum, colligantur in unam ſummam ſub ſuis ſignis per (§. 47. & 48.) exprimendam. *Hic revocentur in memoriam* (§. 12. & 48.) *Vide Exempl. I. Caſus I.*

II. Si quantitates homogeneæ ſint affectæ diverſis, ſeu contrariis ſignis (§. 19.) id eſt, (una harum habeat ſignum +, altera —), *coëfficiens* minoris ſubtrahatur à majore, & reſiduum ſcribatur in loco ſummæ, præfixo ſigno habentis majorem coëfficientem per (§. 21.) *Vide Exempl. II. Caſus I.*

III. Si quantitates homogeneæ, diverſis ſignis affectæ, ſint æquales, id eſt (ſi æquales habeant coëfficientes) in loco ſummæ omittantur, ſeu non ſcribantur. *Vide Exempl. III. Caſus I.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Regula I. eſt hypotheſis (§. 47. & 48.) Regula II. continetur in (§. 21.) Regula III. innititur axiomati (§. 20.) Q. E. D.

CASUS II. *Si quantitates addendæ ſint heterogeneæ* (§. 54.)

Regula unica; Quantitates heterogeneæ manentibus ſuis ſignis in loco ſummæ ſibi tantum juxta ſcribantur, quocunque ordine; Hic in *memoriam* etiam *revocandus* (§. 12.) *Vide Exempl. I. & II. Caſus II.*

DEMONSTRATIO.

Patet hanc collectionem eſſe ſolum additionem indicatam (§. 17.) cum heterogeneæ quantitates reipſa per coëfficientes addi nequeant per (§. 31. Arithm.) Q. E. D.

CASUS III. *Si ex quantitatibus addendis, quædam ſint homogeneæ, quædam vero heterogeneæ.*

I. *Homogeneæ* addantur *per regulas caſus I.*

II. *Heterogeneæ* ſibi juxta ponantur in loco ſummæ cum ſuis ſignis per Reg. caſus II. *Vide Exempl. I. & II. Caſus III.*

CASUS IV. *Si quantitates addendæ ſint numeri ſeorſim cum ſignis algebraicis poſiti.*

I. Cum numeri ſint quantitates inter ſe homogeneæ, addendi ſunt *per Regulas Caſus I. V. Exemp. I. Caſ. IV.*

II. Cum numeri ſeorſim poſiti ſint quantitates heterogeneæ reſpectu quantitatum literalium, ſi cum iis addendi veniant, ſervetur *Reg. Caſus II. Vide Exemp. II. Caſus IV.* Hic caſus jam demonſtratus eſt.

PARADIGMA.

Exemplorum Additionis algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I. REGULA I.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} 3a - 2b + c & ♂ \\ 4a - 3b + c & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Summa } 7a - 5b + 2c \quad ☿$$

EXEMPLUM II. REG. II.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} a^2 + 7b - 4c & ♂ \\ 7a^2 - 9b + 7c & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Summa } 8a^2 - 2b + 3c \quad ☿$$

EXEMPLUM III. REG. III.

$$\text{Add.}\begin{cases} 2a + 3b - c + d & ♂ \\ 3a - 3b + c + 2d & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Summa } 5a + 3d \quad ☿$$

CASUS II.

EXEMPLUM I.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} 3ab + cd - f & ♂ \\ ac + 5ab - 7 & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Sum. } 8ab + ac + cd - f - 7 \quad ☿$$

EXEMPLUM II.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} 12a - 4c + b & ♂ \\ -3b + ad + 4c & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Summa } 12a - 2b + ad \quad ☿$$

EXEMPLUM III.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} 5x + 3y - 8b & ♂ \\ 2xy - 3y + 12 & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Sum. } 5x + 2xy - 8b + 12 \quad ☿$$

CASUS III.

EXEMPLUM I.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} 4a^3 + 3b & ♂ \\ 3ab - db & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Summa } 4a^3 + 3b + 3ab - db \quad ☿$$

EXEMPLUM II.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} a^2 + a^3 - 15 & ♂ \\ 2a - bc + 8c & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Sum. } a^2 + 2a + a^3 - bc + 8c - 15 \quad ☿$$

CASUS IV.

EXEMPLUM I.

$$\text{Add.}\begin{cases} 24 + 8 - 4 = 28 & ♂ \\ 15 - 10 + 4 = 9 & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Sum. } 39 - 2 = 37 \quad ☿$$

EXEMPLUM II.

$$\text{Addendæ}\begin{cases} ad + b - 4 & ♂ \\ 6 + ad - f & ♃ \end{cases}$$
$$\text{Summa } 2ad + b - f + 2 \quad ☿$$

SCHO-

SCHOLION.

75. *In gratiam Tyronum (qui in idæis universalibus veritatem propositam non illico assequuntur) adductum* universale exemplum I. casûs I. *claritatis gratia ad determinatas quantitates applicare placuit, substituendo videlicet loco litterarum, vel certas quantitates, vel numeros. Igitur significet:* a *unum florenum Germ.* b *unum grossum,* c *crucif. erit in numeris determinatis.*

EXEMPLUM I. CASUS I.

		Algebraicæ numericè.	
	$3a - 2b + c$ *id est:*	3 *flor.* $-\ 2$ *groß.* $+\ 1$ *cr.*	♂
	$4a - 3b + c$ *seu*	$4 \quad -\ 3 \quad +\ 1$	♃
Summa	$7a - 5b + 2c$	$= 7$ *flor.* $-\ 5$ *gr.* $+\ 2$ *cr.*	☿

Idem Arithmeticè.

flor.	*groß.*	*crucif.*	
2	18	1	♂
3	17	1	♃
6	15	2	☿

Idem exemplum substituendo pro literis numeros
Sit: $a = 5,\ b = 4,\ c = 7.$
erit

	$3a - 2b + c$	$= 15 - 8 + 7$	$= 14$	♂
	$4a - 3b + c$	$= 20 - 12 + 7$	$= 15$	♃
Summa	$7a - 5b + 2c$	$= 35 - 20 + 14$	$= 29$	☿

Eodem modo, & reliqua exempla substitutis loco litterarum numeris, vel certis quantitatibus, veritatem doctrinæ declarant.

CAPUT III.

De Subtractione Algebraica.

DEFINITIO XV.

76. *Subtractio Algebraica*, eſt inventio, vel expreſſio complexi alicujus algebraici, quod per ſua ſigna exhibet *differentiam*, ſeu *reſiduum* alterius majoris, vel ſimplicis, vel complexæ quantitatis. *Ex.gr.* Si

Si ex quantitate a, ſit ſubtrahenda quantitas b, erit complexum $a - b$, exhibens differentiam, ſeu reſiduum de quantitate a, (§. 18.)

AXIOMA III.

77. Ablatio, ſeu ſubtractio quantitatis poſitivæ, eſt ejusdem quantitatis ſubtrahendæ poſitio negativa; & vice verſa, ablatio, ſeu ſubtractio quantitatis negativæ, eſt ejusdem negativæ quantitatis ſubtrahendæ, poſitio poſitiva. (§. 20. & 21.) *Ex. gr.* Si Petrus habeat flor. 8. poſitivos, & eidem aufferantur 3. flor. poſitivi, habebit Petrus tantum 5. flor. id eſt: $8 - 3$. Et vice verſa; ſi Petro habenti 5. fl. ſeu $8 - 3$, donentur 3 fl. habebit utique $5 + 3$, ſeu 8, id eſt $8 - 3 + 3 = 8$. (§. 20.)

PROBLEMA II.

78. PROP. *Quantitates quascunque, ſignis algebraicis expreſſas, ab aliis quantitatibus algebraicis ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quantitates ſubtrahendæ ſubſcribantur quantitatibus, à quibus ſubtractio fieri debet. *Vide Exemp. I. & II. &c.*

II. Signa in quantitatibus ſubtrahendis mutentur in contraria, id eſt, (ſignum + mutetur in —, & ſignum — mutetur in +) *Vide Exempl. I. & II. &c.*

III. Sic affectæ quantitates ſub ſignis ſuis contrariis, addantur (per regulas Problema. prior.) cum quantitatibus ſuperioribus in unam ſummam, dabit ſumma hæc differentiam, ſeu reſiduum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Subtractio quantitatis poſitivæ à poſitiva eſt ejusdem quantitatis ſubtrahendæ poſitio negativa, & vice verſa per axioma (§. 77.), ſed hoc factum eſt per datas

tas regulas, ergo per datas regulas ritè peracta habetur ſubtractio, ergo ritè inventa differentia, ſeu Reſiduum (§. 76.)

SCHOLION.

79. *In his & cæteris ſubtractionum algebraicarum adducendis exemplis*, mutationem ſignorum in contraria, *indicabimus ſignis inferiore loco in ſubtrahendo poſitis*, Ex. gr. *Si* + *in* — *ſit mutatum, indicabitur hoc modo* ($\underset{-}{+}$) *& vice verſa* — *in* +, *hoc modo* ($\underset{+}{-}$), *unde pro facienda additione* (juxta datam regulam III. hujus) *ſigna inferiore loco poſita uſurpanda erunt, ſuperiora verò in ſubtrahendo poſita ſigna, pro non adjectis habenda.*

PARADIGMA.

Exemplorum Subtractionis Algebraicæ deſumptis exemplis ex Additione (§. 74.)

CASUS I. EXEMPLUM I.

	$7a - 5b + 2c$	☿
Subtrah.	$4a - 3b + c$	
Mut. ſig.	$-4a + 3b - c$	♃
Reſid.	$3a - 2b + c$	♂

EXEMPLUM II.

	$8a^2 - 2b + 3c$	☿
Subtrah.	$7a^2 - 9b + 7c$	
Mut. ſig.	$- \quad + \quad -$	♃
Reſid.	$a^2 + 7b - 4c$	♂

EXEMPLUM III.

	$5a + 3d$	☿
Subtrah.	$3a + 2d - 3b + c$	
Mut. ſig.	$- \quad - \quad + \quad -$	♃
Reſid.	$2a + d + 3b - c$	♂

CASUS II. EXEMPLUM II.

	$a^2 + 2a + a^3 - bc + 8c - 15$	☿
Subtrah.	$2a \quad - bc + 8c$	
Mut. ſig.	$- \quad + \quad -$	♃
Reſid.	$a^2 + a^3 - 15$	♂

CASUS

CASUS III. EXEMPLUM III.

	$12a - 2b + ad$	☿
Subtrah.	$- 3b + ad + 4c$	
Mut. sig.	$+ \quad - \quad -$	♃
Resid.	$12a + b - 4c$	♂

CASUS IV. EXEMPLUM I.

	$39 - 2 = 37$	☿
Subtrah.	$15 - 10 + 4 = 9$	
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	♃
Resid.	$24 + 8 - 4 = 28$	♂

SCHOLION I.

30. *Ut veritas doctrinæ Tyronibus magis eluſcat, bina exempla in ſcholio Additionis* (§. 75.) *adducta, & ad quantitates determinatas applicata, hic exhibemus. Igitur ſignificet* a *flor.* b *groſſ.* c *crucif. ut in additione.*

CASUS I. EXEMPLUM I.

	$7a - 5b + 2c$		7 *flor.* $-$ 5 *gr.* $+$ 2 *cr.*	☿
Subtrah.	$4a - 3b + c$	*ſeu*	$4 \quad - 3 \quad + 1$	
Mut. ſig.	$- \quad + \quad -$		$- \quad + \quad -$	♃
Reſid.	$3a - 2b + c$	*ſeu*	3 *flor.* $-$ 2 *gr.* $+$ 1 *cr.*	♂

Id eſt

flor.	*groſſ.*	*crucif.*	
6	15	2	☿
3	17	1	♃
2	18	1	♂

Idem in numeris juxta ſubſtitutionem (§. 75.)

Sit $a = 5, \quad b = 4, \quad c = 7.$

erit

	$7a - 5b + 2c = 35 - 20 + 14 = 29$	☿
Subtrah.	$4a - 3b + c = 20 - 12 + 7 = 15$	
Mut. ſig.	$- \quad + \quad - \qquad - \quad + \quad -$	♃
Reſid.	$3a - 2b + c = 15 - 8 + 7 = 14$	♂

SCHO-

SCHOLION II.

81. *Examen Additionis sive proba (si eam facere placet) in Algebra, fit per regulas subtractionis* hujus Problem. *ut exempla omnia declarant. Eodem modo examen subtractionis fit per regulas additionis* (§. 74.) *adductas. Videlicet, si quantitas subtrahenda non mutatis signis, seu cum signis superioribus expressa, addatur residuo, summa restituit quantitatem, à qua subtractio facta est. En Examen, seu probam exempli I. casus I.*

		$7a - 5b + 2c$	☿
	Subtrah.	$4a - 3b + c$	♃
	Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	
Addendæ	*Resid.*	$3a - 2b + c$	♂
	Subtrah.	$4a - 3b + c$	♃
	Summa	$7a - 5b + 2c$	☿

CAPUT IV.

De Multiplicatione Algebraica.

DEFINITIO XVI.

82. Multiplicatio algebraica, est *ductus* quantitatis algebraicæ unius in aliam, qui *ductus* exprimitur per hypothesim *multiplicationis primo modo* (§. 25.) *indicatæ.*

THEOREMA IV.

83. PROP. *Multiplicatio quantitatis negativæ per positivam, & vice versa, quantitatis positivæ per negativam,* factum *producit* negativum; *id est: signum* — *cum* +, *item* + *cum* —, *dat in facto signum* —.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Multiplicatio est *iterata additio*; (§. 46. Arith.) sed additio ejusdem quantitatis negativæ iterata, seu toties facta quoties quantitas positiva affirmat, producit summam negativam, (§. 47. & 74.) id est, *factum negativum*, ergo; *quod erat primum.*

Pars

Pars II. *Productum*, seu *factum* non variatur, sive multiplicans in multiplicandum, sive multiplicandus in multiplicatorem ducatur per (§. 49. Arithm.) sed *(per partem I. hujus)* quantitas negativa, multiplicata per positivam, factum producit negativum, ergo etiam eadem quantitas positiva, multiplicata per negativam, *factum* producit *negativum*. *Cum, tam affirmare negationem, quam negare affirmationem, sit simpliciter negare. Quod erat alterum.*

SCHOLION.

§. 84. *Demonstratio hæc, uti & sequentis Theorem. Tyronibus (qui algebraicis nondum assuevere demonstrationibus) interea sufficiat, donec ad calcem hujus doctrinæ Algebraicæ, hoc, & cætera quæpiam Theoremata ope Æquationum algebraicarum directe demonstraturi sumus. Ne quis verò me criminis*, admissi *in demonstratione* paralogismi *arguat; videlicet, eadem, sed inversa ratione, argumentando, probari quoque:* multiplicationem quantitatis positivæ per negativam, & vicissim negativæ per positivam, factum producere debere positivum; *adeoque eadem demonstratione* contradictorium *confici; Is noverit, argumentationem hanc meam huic initi fundamento, quod*, tam affirmare negationem, quam negare affirmationem, sit simpliciter negare; *quantitas autem positiva est affirmativa, & negativa est negativa* (§. 11.) ut patebit inferius in schemate affirmationum, & negationum; *cui fundamento, cum inversa ratio argumentandi initi non possit, crimine* admissi paralogismi *me absolvendum, sano quisquis utitur judicio, haud difficile intelliget.*

THEOREMA V.

85. PROP. *Multiplicatio quantitatis negativæ per negativam*, factum *producit* affirmativum, *seu* positivum; *id est, signum — cum —, dat in facto signum +.*

DEMONSTRATIO.

Negare negationem est simpliciter affirmare (per Scholion §. 87.) sed multiplicare quantitatem negativam per negativam, est unam quantitatem negativam toties negare, esse sibi negative additam, quoties altera negativa negat, ergo se invicem affirmant, seu ponunt positive, ergo *factum* producunt *positivum*. Q. E. D.

COROL-

COROLLARIUM.

86. Ex his duobus Theorematibus deducitur Regula in multiplicatione algebraica cautè observanda, videlicet; *Signa eadem factorum, dant in facto* +, *diversa verò* —; id est: si uterque factorum habeat + præfixum, vel uterque habeat præfixum signum —, in facto ponendum est signum +; si verò unus factorum habeat +, alter —, in facto scribendum est —.

SCHOLION I.

87. *Ut veritas datæ Regulæ, ex Theorematibus deductæ, vel ipsis oculis Tyronum pateat,* schema affirmationum, & negationum *subjectum, inspicere velint, in quo quantitas positiva, seu affirmativa, respondet affirmationi, seu signo* +: *quantitas verò negativa; negationi, id est signo* —.

Schema affirmationum, & negationum.

Qui affirmat + { *Se negâsse aliquid, ille id ipsum negat.* (— … —)
Qui affirmat + { *Se affirmâsse aliquid, ille id ipsum affirmat.* (+ … +)

Qui negat — { *Se negâsse aliquid, ille id ipsum affirmat.* (— … +)
Qui negat — { *Se affirmâsse aliquid, ille id ipsum negat.* (+ … —)

Ergo:

\+ *cum* —, *dat* —.
\+ *cum* +, *dat* +.
— *cum* —, *dat* +.
— *cum* +, *dat* —.

SCHOLION II.

88. *Ante faciendam multiplicationem per sequens problema, in memoriam velim revocentur* (§§. 25. 53. & 71.) *cum* ductus *quantitatis algebraicæ unius in alteram, fiat per solam litterarum conjunctionem, seu combinationem.*

PROBLEMA III.

89. PROP. *Quantitates algebraicas quasvis, per quantitates alias quascunque multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates litterales non sint affectæ coëfficientibus, aut exponentibus, nec numeris aliis permixtæ.*

I. Infra multiplicandum ſcribatur multiplicans cum ſuis ſignis, & ſubducantur lineâ. *Vide Exempl. I. & II.*

II. Singula membra *multiplicantis* ducantur in ſingula membra *multiplicandi*, ut *in Arithmetica*. Ductus autem iſte fit præcise combinando litteras *multiplicantis* cum litteris *multiplicandi*. (§. 25.) *Vide facta partialia in Exempl. I. & II.*

III. Signa in factis partialibus præfigantur *juxta regulam* (§. 86.) videlicet; *ſigna eadem, dant* +, *diverſa* —; *Vide Exempl. I. & II.*

IV. Facta partialia (*ducta lineâ*) colligantur, ſeu addantur in unam ſummam totalem, *per Reg. Addit.* (§. 74.) ſumma hæc dabit factum totale. *Vide Exemplum I. & II.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. demonſtratione non eget. Reg. II. conſtat ex (§. 53. Arith.) Reg. III. eadem eſt, quæ (§. 86.) & denique Regula IV. habetur demonſtrata (§. 74.) Q. E. D.

CASUS II. *Si quantitates inter ſe multiplicandæ affectæ ſint coëfficientibus.*

Præter Regulas datas in Caſu I. obſerventur hæ:

I. Coëfficientes ſingulorum membrorum in multiplicando, multiplicentur per coëfficientes ſingulos multiplicantis, ut *in Arith.* & facta coëfficientium ſingulorum adſcribantur ſingulis factis litteralibus partialibus, ad ſiniſtram, præfixo ſigno *juxta Reg. III. C. ſ. I. Vide Exempl. I. Caſ. II.*

II. Si factorum unus habeat coëfficientem, alter verò careat coëfficiente, tum coëfficiens invariatus præfigatur facto litterali partiali; *V. Exempl. II. Caſ. II.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Regula I. patet ex (Arith. §. 53.) cum coëfficientes ſint numeri. Regula II. clara eſt; quia coëfficiens quantitatis litteralis carentis coëfficiente eſt (1) tacitè præfixa (§. 48.) unitas verò non multiplicat, hinc rectè præfigitur facto litterali, coëfficiens alterius quantitatis invariatus.

CASUS III. *Si quantitates affectæ ſint exponentibus.*

Præter regulas caſus I. has ſervare neceſſe eſt;

I. Videatur an *factorum* litteræ, exponentibus affectæ, ſint inter ſe homogeneæ; ſi homogeneæ ſunt, numeri, vel (ſi exponentes etiam ſint litteræ) litteræ exponentium, addantur, & pro *facto* (loco combinationis litterarum homogenearum) una duntaxat ex homogeneis littera ſcribatur, cui ad dextram furſum verſus ſumma inventa exponentium ſuperſcribatur, ceteræ verò litteræ heterogeneæ adhærentes per *Regul. Caſ I.* combinatæ exprimantur. *Vide Exempl. I. & II. Caſ. III.*

II. Si unus ex factoribus habeat exponentem, alter verò eidem homogeneus careat exponente; Exponens factoris homogenei augeatur unitate, & ita auctus ſuperſcribatur uni litteræ homogeneæ, ut in *Regula I.* hujus. *Vide Exempl. IV. Caſ. III.*

III. Exponentes heterogenearum litterarum invariati, cum ſuis litteris quas afficiunt, ſcribendi ſunt in facto. *Vide Exempl. III. Caſ. III.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 49. 50. & 51.) Reg. III. ex (§. 41.)

SCHOLION.

90. *Tyrones adductum poſt exempla hujus III. Caſus poſitum Scholion (§. 91.) non prætermittant legendo, in quo fundamentum additionis exponentium, declaratur ad illorum captum.*

CASUS IV. *Multiplicare algebraice inter ſe quascunque quantitates datas, affectas coëfficientibus, exponentibus, ac aliis numeris permixtas.* Serventur Regulæ Caſus I. II. & III. ac præterea Regulæ Arithmeticæ (§. 53. Arith.) *Vide Exempl. I. & II. Caſ. IV.* Hic Caſ. IV. demonſtratione non eget, cum in hoc antecedentes omnes Caſus collecti habeantur.

PARADIGMA

Exemplorum Multiplicationis Algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I.

Multiplicand.	$a - b$	Factores.
Multiplicans	$a - b$	
Facta	$aa - ab$	
Partialia	$- ab + bb$	
Fact. tot.	$aa - 2ab + bb$	

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} a + b - c \\ a + b \\ \hline aa + ab - ac \qquad\qquad \\ + ab + bb - bc \\ \hline aa + 2ab + bb - ac - bc \end{array}$$

CASUS II.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{lr} & 3a + b \\ & 5a - 4b \\ \hline & 15aa + 5ab \qquad \\ & - 12ab - 4bb \\ \hline \textit{Fact.} & 15aa - 7ab - 4bb \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{lr} & 2a + 3b - 2c \qquad\qquad \\ & 4a + 5b \qquad\qquad \\ \hline & 8aa + 12ab - 8ac \qquad\qquad \\ & + 10ab + 15bb - 10bc \\ \hline \textit{Fact.} & 8aa + 22ab + 15bb - 8ac - 10bc \end{array}$$

CASUS III.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l} a^3 + b^2 \\ a^3 - b^2 \\ \hline a^6 + a^3 b^2 \\ \quad - a^3 b^2 - b^4 \\ \hline \text{Fact. } a^6 - b^4 \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} a^n + a^x - b^m \\ a^n \\ \hline a^{2n} + a^{n+x} - a^n b^m \end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{l} a^2 + b^3 d - d \\ a^3 b^4 \\ \hline a^5 b^4 + a^3 b^7 d - a^3 b^4 d. \end{array}$$

EXEMPLUM IV.

$$\begin{array}{l} a + b^4 \\ a^6 + b \\ \hline a^7 + a^6 b^4 + ab + b^5 \end{array}$$

SCHOLION.

91. *Cum* (§. 50.) *expressio per exponentes sit tantum modus scribendi brevior, idcirco, Tyrones ut multiplicationem quantitatum habentium exponentes menti fixius imprimant, exempla bina prioris Casus III. per modum hasce fuse scribendi, expressa damus, ut, si Tyro dubitaverit in casu simili, quomodo per abreviationem scribenda sint* facta, *hac methodo servata, seipsum instruat.* En exempla hujus Casus III. fusè descripta.

EXEMPLUM I. CASUS III. fusè.

$$\begin{array}{lll} & aaa + bb & \\ & aaa - bb & \\ \hline \textit{Fuse} & aaaaaa + aaabb & \\ & \quad - aaabb & - bbbb \\ \hline \textit{Factum} & aaaaaa & - bbbb. \\ \hline \textit{Brevius} & a^6 & - b^4 \end{array}$$

EXEMPLUM III. CASUS III. fusè.

$$\begin{array}{ll} & aa + bbbd - d \\ & aaabbbb \\ \hline \textit{Fuse} & aaaaabbbb + aaabbbbbbbd - aaabbbbd \\ \hline \textit{Brevius} & a^5 b^4 + a^3 b^7 d - a^3 b^4 d. \end{array}$$

CASUS IV.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r}
2a^3 - 4b + 1 \\
5a^4b - 7 \\
\hline
10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b \\
-14a^3 + 28b - 7 \\
\hline
10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b - 14a^3 + 28b - 7.
\end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r}
a^5 + 4a - d^n \\
3a^2 + 8 \\
\hline
3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n \\
+ 8a^5 + 32a - 8d^n \\
\hline
3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n + 8a^5 + 32a - 8a^n.
\end{array}$$

SCHOLION.

92. *Ut doctrina de multiplicatione algebraica hactenus tradita clarior Tyronibus evadat, præsertim quæ de signis demonstrata sunt, Exemplum I. Casus I. ad numeros, seu determinatas quantitates applicabimus, quam applicationem in omnibus Exemplis Tyronibus faciendam suadeo. Sit igitur* $a = 8$, & $b = 2$.

Erit

$$\begin{array}{r}
a - b = 8 - 2 \\
a - b = 8 - 2 \\
\hline
aa - ab = 64 - 16 \\
- ab + bb = \quad - 16 + 4 \\
\hline
aa - 2ab + bb = 64 - 32 + 4 = 36
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\textit{sed } 8 - 2 = 6 \\
\textit{\&} \ 8 - 2 = 6 \\
\hline
\textit{factum ex multipli-} \\
\textit{catione 6 per 6} \\
\hline
\textit{id est} = 36.
\end{array}$$

CAPUT V.

De Divisione Algebraica.

DEFINITIO XVII.

93. *Divisio Algebraica* est producti, sive facti alicujus algebraici in suos factores *Resolutio*; & hinc *dividere algebraice*, est, dato factore uno invenire alterum.

terum. *Ex. gr.* Dato facto algebraico *abc*, tanquam *dividendo*, datoque factore uno *a*, tanquam *divisore*, invenire factorem alterum *bc*, tanquam *quotum*, qui factores in se ducti produxerunt factum *abc*.

THEOREMA VI.

94. PROP. *Quantitas* negativa *divisa per quantitatem* positivam, & *vicissim* positiva *per* negativam, *pro quoto dat quantitatem* negativam. *Quantitas vero* negativa *divisa per* negativam, *dat* positivam; *seu universaliter:* signa eadem *in divisore*, & *dividendo*, *dant pro quoto* +, diversa *dant* —, *quemadmodum in multiplicatione ostensum est.*

DEMONSTRATIO.

95. Quod multiplicatio componit, hoc solvit divisio (§. 121. Arith.) sed factum seu productum algebraicum per eandem regulam signorum componitur (§. 86.) ergo etiam per eandem signorum regulam resolvi debet. Nam quotus, tanquam unus ex factoribus, multiplicatus per divisorem, tanquam factorem alterum, restituere debet dividendum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

96. In divisione itaque algebraica eadem regula studiose observanda; nempe *signa in divisore*, & *dividendo eadem*, *dant pro quoti signo* +, *diversa* —.

SCHOLION.

97. *Cum usus divisionis algebraicæ actualis per* Problema infra tradendum, *haud frequens sit*, *propterea quod exacta hujusmodi divisio*, *seu resolutio in factores raro fieri possit*, *idcirco præcipua duntaxat exempla*, *quæ usui Tyronum futura sint*, *adferentur.*

PROBLEMA IV.

98. PROP. *Productum algebraicum in suos factores resolvere*, *seu Dividere algebraice.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si* diviſor *ſit quantitas monomia nullo* coëfficiente, *aut* exponente *affecta*, & dividendus *ſimiliter non ſit affectus aliquo* coëfficiente, *aut* exponente.

I. Si littera, vel litteræ diviſoris reperiantur in omnibus dividendi membris, peracta habetur diviſio, ſimpliciter delendo in membris dividendi litteras diviſoris, erunt reliquæ dividendi litteræ quotus (§. 35.) obſervata tamen cautè regula ſignorum (§. 96.) tradita. *Vide Exempl. I. Caſ. I.*

II. Si aliquod membrum dividendi ſit idem cum diviſore, ſeu præcisè eadem quantitas litteralis, pro quoto illius membri ſcribenda eſt *unitas*, ſeu numerus 1. *Vide Exempl. II. Caſ. I.*

III. Si in aliquo membro dividendi littera, vel litteræ diviſoris non reperiantur, interpoſitâ lineâ exprimendus eſt quotus *juxta doctrinam* (§. 30.) *V. Exempl. III. Caſ. I.*

CASUS II. *Si tam diviſor, quam dividendus ſint quantitates* polynomiæ *nullo aut* coëfficiente, *aut* exponente *affectæ*.

I. Ductis ad ſiniſtram, & dextram deorſum verſus lineis, includatur totus dividendus, diviſor ſcribatur ante lineam ſiniſtram dividendi, latus vero dextrum poſt lineam dextram deſerviat quotis ſcribendis. *Vide Poſitionem I. in omnibus Exemplis.*

II. Diviſoris polynomii membrum unum eligatur, quod placet, (*illud tamen præ cæteris eligendum, cujus littera, vel litteræ in pluribus dividendi membris reperiuntur,*) cum quo tota diviſio peragenda eſt; nam uno ſemel aſſumpto, aliud diviſoris membrum intra eandem diviſionem aſſumere non licet.

III. Videatur in quo *dividendi* membro reperiatur aſſumptum membrum *diviſoris*, & reliquæ litteræ membri

bri dividendi, quæ in diviſore non habentur, pro quoto ſcribantur, *ut in Caſu I. dictum*, ſervata regula de ſignis (§. 96.) adducta. *Vide Poſitionem I. Exempli I. Caſ. II.*

IV. Per hunc litteralem quotum, juxta regulas multiplicationis algebraicæ, multiplicentur *omnia membra* diviſoris, & facta partialia ſub membris dividendi homogeneis ſcripta, ſubtrahantur algebraicè. *Vide Exemplum I. Caſus II.*

V. Cum membris dividendi reſiduis, eodem modo per easdem Regulas III. & IV. inquiratur in quotum litteralem, donec facta ſubtractione ultima nihil remaneat, *vide Poſitionem I. Exempli I. Caſus II.* ſi aliquid remaneat, quod porro dividi non poſſit, illud juxta Hypoth. (§. 30.) exprimendum erit. *Vide Exempl. II. Caſus II.*

SCHOLION.

99. *Plenam diviſionis praxim Tyrones oretenus edocendi ſunt, nec enim ea à Typothetis impetrare potui, quæ ad plenam neceſſaria fuerunt doctrinam. Hic quoque recolenda, quæ (§. 72.) dicta ſunt, nullum videlicet, ordinem, aut in inquirendo quoto, aut in ſubtrahendis factis partialibus obſervari, ſed quemadmodum quotum literalem partialem ex quocunque membro dividendi eruere licet, ita facta partialia à quibusvis membris homogeneis ſubtrahi poſſunt.* Vide Paradigma Exempl. diviſ.

CASUS III. *Si tam diviſor, quam dividendus affecti ſint* coefficientibus.

Præter Regulas Caſ. II. ſervanda iſthæc: per coëfficientem diviſoris dividantur etiam coëfficientes dividendi arithmeticè. *Vide Exempl. Caſ. III.*

CASUS IV. *Si tam diviſor, quam dividendus affecti ſint* exponentibus.

Servatis regulis ſupra adductis, ſi quantitates affectæ exponentibus in diviſore ſint homogeneæ quantitatibus dividendi, exponentes diviſoris ſubtrahantur ab exponentibus dividendi, reliqua fiant, ut in Caſu I. *Vide Exempl. I. & II. Caſ. IV.*

Regulæ harum Reſolutionum demonſtratione non egent, cum ex definitione diviſionis (§. 93.) pateat, hac ratione inventum quotum in ſingulis membris, eſſe factorem alterum dividendi, ut per multiplicationem diviſoris in quotum liquet.

PARADIGMA.

Exemplorum Diviſionis Algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I.

Dividendus. Quotus totalis.

$$\textit{Diviſor } a \left\{ \begin{array}{ccc} ab & +ac & -ad \\ | & | & | \\ a & a & a \end{array} \right\} b + c - d.$$

NB. *Signum deletivum ad libitum eſt lineola (|) interpoſita.*

EXEMPLUM II.

Dividendus.

$$\textit{Diviſor } -ab \left\{ \begin{array}{ccc} abc & -abdc & -ab \\ || & || & || \\ -ab & -ab & -ab \end{array} \right\} \begin{array}{c} \textit{Quotus.} \\ -c + dc + 1. \end{array}$$

EXEMPLUM III.

Dividendus. Quotus.

$$\textit{Diviſor } d \left\{ \begin{array}{ccc} db & +ad & +bc \\ | & | & \\ d & d & d \end{array} \right\} b + a + \frac{bc}{d}.$$

CASUS II.

Exempla ſequentium caſuum deſumpta ſunt ex exemplis in multiplicatione adductis.

EXEMPLUM I. quod eſt primum CAS. I. Multipl.

Dividendus.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{Poſitio I.} \\ \textit{Diviſor } a-b \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} aa & -2ab & +bb \\ aa & -ab & \\ - & + & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textit{Quotus part.} \\ a \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \text{Poſitio II.} \\ \textit{Diviſor } a-b \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} \textit{reſid.} & -ab & +bb \\ & -ab & +bb \\ \textit{ſubt.} & + & - \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textit{Quotus part.} \\ -b \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textit{Quotus} \\ \textit{totalis} \\ a-b \end{array}$$

$$0 \quad 0$$

Scilicet,

Scilicet, in Positione I. *assumpta ad libitum ex divisore litera* a, *dico:* a *in* aa, *dat quotum* a, *per hunc quotum* a *multiplico totum divisorem* a — b, & *factum* aa — ab, *subscribo membris homogeneis dividendi*, vide Posit. I. *deinde subtrahendo mutantur signa in contraria*, *unde* — aa, & + aa *se destruunt*, *item* + ab *destruit ex* — 2ab *unum* — ab *adeoque remanet adhuc* — ab *residuum, ad hoc residuum depono tertium membrum dividendi* + bb, ut factum vides in Positione II.

In hac Positione II. iterum ex divisore assumpta eadem litera a, *dico:* a *in* — ab, *dat quotum* — b, & *per quotum* — b *multiplicando totum divisorem* a — b, *dat factum*, — ab + bb, *unde subtrahendo*, *mutatis in contraria signis*, *membra sibi homogenea ex dividendo totaliter destruunt*, & *nihil residui reliquunt*, *itaque quotus totalis emersit* a — b, *qui per divisorem* a — b *multiplicatus restituit dividendum*, aa — 2ab + bb.

Ut veritas *Reg. II. Cas. II.* pateat, de assumendo ad libitum quocunque divisoris membro, in gratiam Tyronum idem exemplum repetere placet assumendo ex divisore *a* — *b* secundam literam, nempe — *b*, sit itaque

	Dividendus.		
Positio I.	$aa - 2ab + bb$	*quot. part.*	*Quotus*
Divis. $a - b$	*fact.* $- ab + bb$	$- b$	*totalis*
	subt. $+ \quad -$		$- b + a.$
Positio II.	*res.* $aa - ab$	*quot. part.*	
Divis. $a - b$	$aa - ab$	$+ a$	
	$- \quad +$		
	$0 \quad 0$		

In Positione I. assumpta igitur ex divisore litera — b, *dico:* — b *in* + bb, *dat quotum* — b, & *multiplicando totum divisorem* a — b, *per* — b, *dat factum* — ab + bb, *subtrahendo mutatis signis fit* + ab — bb, *unde* — bb & + bb *se invicem destruunt*, & + ab *ex* — 2ab *destruit unum* — ab *unde remanet* — ab, vide Positionem I. *ad hoc residuum* — ab, *depono tertium membrum dividendi* aa, vide Positionem II.

In Positione II. retenta eadem divisoris litera — b, *dico:* — b *in* — ab, *dat quotum* + a, & *multiplicando per quotum* a, *totum divisorem*, a — b *dat factum* aa — ab, *mutatis itaque signis fit* — aa + ab, *unde cum* — aa & + aa, *item* + ab & — ab, *se invicem destruendo nihil relinquant*, *patet quotum totalem esse* — b + a, *qui idem est cum quoto operationis primæ*; a — b, *cum translocatio literarum non variet complexum.* (§. 67.) *Ex hac operatione secunda*, *etiam liquet veritas tum Reg. III. Cas. II. tum Coroll.* (§. 72.) *adducti.*

EXEM-

EXEMPLUM II. CASUS II.

Dividendus

Positio I. Div. $a+b$	$aa+2ab+bb+dc$	quot. part.

Positio I. Div. $a+b$	$aa+2ab+bb+dc$	quot. part.
	$aa+ab$	a
	$-\quad -$	
Positio II. Div. $a+b$	Resid. $ab+bb+dc$	quot. part.
	Fact. $ab+bb$	$+b$
	Subtr. $-\quad -$	
Positio III. Div. $a+b$	Residuum $+dc$	$\frac{dc}{a+b}$

quot. totalis $a+b+\frac{dc}{a+b}$

CASUS III.

Exemplum, quod est primum Casus II. multiplicationis.

Dividendus

Positio I. Div. $5a-4b$	$15aa-7ab-4bb$	quot. part.
	$15aa-12ab$	$3a$
	$-\quad +$	
Positio II. Div. $5a-4b$	Resid. $5ab-4bb$	quot. part.
	$5ab-4bb$	$+b$
	$-\quad +$	
	$0\quad 0$	

quotus totalis $3a+b$

CASUS IV.

Exemplum I. quod est primum Cas. III. multiplicationis.

Dividendus

Positio I. Divis. a^3-b^2	a^6-b^4	quot. part.
	$a^6-a^3b^2$	a^3
	$-\quad +$	
Positio II. Divis. a^3-b^2	Res. $a^3b^2-b^4$	quot. part.
	$a^3b^2-b^4$	$+b^2$
	$-\quad +$	
	$0\quad 0$	

quotus totalis a^3+b^2

Exemplum II. quod est secundum Casus III. multiplic.

Dividendus

Divis. a^n	$a^{2n}+a^{n+x}-a^nb^m$	quotus totalis
	$a^{2n}+a^{n+x}-a^nb^m$	$a^n+a^x-b^m$
	$-\quad -\quad +$	
	$0\quad 0\quad 0$	

SCHO-

SCHOLION.

100. *Examen divisionis fit ope multiplicationis algebraicæ, & vicissim examen multiplicationis fit per divisionem algebraicam. Tyrones sequentia Corollaria ex praxi divisionis orta, perspecta habeant, ut ea, quæ inferius de resolutione problematum tractabuntur facilius intelligant.*

COROLLARIUM I.

101. Quemadmodum in multiplicatione (§. 89. Cas. II. Reg. II.) si unus factorum careat coefficiente, alter verò factorum affectus sit aliquo coefficiente, in facto invariatus præfigitur coefficiens alterius factoris, ita in divisione, si *dividendus* habeat coefficientem, non item *divisor*, in quoto manet invariatus coefficiens. *Ex. gr.* Sit dividendus $3abd$, & divisor db, erit quotus, $3a$; Ratio clara est, quia db est idem quod $1db$ (§. 48.) sed unitas non dividit (§. 77. Arith.) ergo. Quodsi verò *divisor* habeat coefficientem, non item *dividendus*, pro quoto scribenda erit illa litera, quæ in divisore non comparet, & subscripto coefficiente divisoris per Hypothes. (§. 30.) exprimenda. *Ex. gr.* Sit dividendus, abd, divisor $3bd$, erit quotus $\frac{a}{3}$ ut patet ex Cas. I. §. 98.

COROLLARIUM II.

102. Ex Cas. I. §. 98. colligitur, quod in complexo algebraico per hypothes. (§. 30.) expresso, *Ex. gr.* $\frac{ab+ac}{a}$, aut $(ab+ac):a$, deleri simpliciter possint literæ homogeneæ, tam in divisore, quam dividendo, atque adeo loco hujusmodi expressionum, scribi potest, $b+c$, item loco hujus $\frac{xb+ax}{x}$, scribi potest: $b+a$, item $\frac{xb+b}{b}$ dat quotum $x+1$, aut $\frac{ac}{b}$ quotum $\frac{a}{b}$ dat (§. 36.)

COROLLARIUM III.

103. Quoniam *Ex. gr.* $ax-bx$, est factum ex quantitate $(a-b).x$, si occurrat formula $\frac{ax-bx}{a-b}$, deletis ex formula utrobique, $a-b$, erit quotus x, (non $x-x$) ut patet ex regula divisionis; item $\frac{ax+bx}{a+b}$ dat quotum x, (non $x+x$, seu $2x$); hinc in occurrente hujusmodi formula

mula considerandum, an litera in dividendo sæpius repetita non compareat in divisore, hæc enim sola erit quotus, si cæteræ dividendi literæ in divisore compareant; sic, $\frac{ax+bx-cx}{a+b-c}$, valet tantum x.

COROLLARIUM IV.

104. Cum, quod ponit multiplicatio, tollit divisio (§. 121. Arithm.) si in formula per divisionem expressa, *E. g.* $\frac{x}{a+b}$, dividendum x multiplicari deberet per $a+b$ seu per divisorem suum, tali casu simpliciter delendus est divisor, manente solo dividendo; nam $\frac{x}{a+b}$, & idem x multiplicatum per $a+b$, dat factum $(ax+bx):a+b$, seu $\frac{ax+bx}{a+b}$, sed (per Corol. §. 103.) $\frac{ax+bx}{a+b}$, est $=x$. ergo

COROLLARIUM V.

105. Divisio actualis per datas regulas fieri non potest, quoties litera, vel literæ divisoris non reperiuntur in membris dividendi. *E. g.* Sit dividendus; $(ac+bc+cm)$ per divisorem, $(d+n)$; tali casu tantum exprimenda est divisio per hypothes. (§. 30.) videlicet, $\frac{ac+bc+cm}{d+n}$.

SCHOLION.

106. *Hæc de quatuor algorithmis adduxisse in compendio sufficiat Tyronibus, quorum plenior doctrina viva docentis voce dabitur; monitos iterum iterumque volo Tyrones, in his quatuor algorithmis præcipue versati sint, seque exerceant sedulo, nam ulterius progressi sine facilitate tractandi hos algorithmos sæpe sæpius ad hos redire cogentur, non secus atque in arithmetica numerica, nemo ullus divisionem instituit, sine notitia additionis, subtractionis, & multiplicationis propterea, quod hæ operationes divisionis algorithmum ingrediantur.*

CAPUT

CAPUT VI.

De natura, & proprietatibus fractionum in genere.

DEFINITIO XVIII.

107. *Fractio* eſt quantitas unitate minor, id eſt, pars, vel partes alicujus totius, quod totum per modum *unius* conſideratur. *Ex.gr. 2. crucif. qui ſunt partes duæ totius groſſi per modum unius conſiderati.*

HYPOTHESIS XII.

108. *Fractio exprimitur, vel deſignatur per expreſſionem hypotheticam diviſionis (§. 30.) declaratam.* E.g. Algebraicè, $\frac{a}{b}$ vel $a : b$. Numericè, $\frac{3}{4}$ vel $3 : 4$.

SCHOLION.

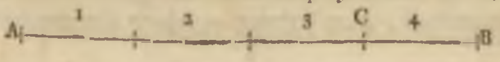
109. *Expreſſio prior fractionis per lineam interjectam uſitatiſſima eſt.* Ex.gr. $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$ *etſi duo puncta interpoſita æque fractionem indicent.*

DEFINITIO XIX.

110. Litteræ, vel numeri ſupra lineam ſcripti, vocantur *Numeratores*, infra lineolam poſiti, *Denominatores* appellantur, ſic *in his* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$, Numeratores *ſunt a, vel numerus* 3, Denominatores *verò* b, *vel* 4.

SCHOLION.

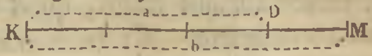
111. *Ratio, cur notæ infra lineolam ſcriptæ vocentur* denominatores, *ſupra lineolam poſiti* numeratores, *hæc eſt: quod nota inferior repræſentans totum per modum unius, denotet, aut exprimat, ſeu* denominet, *in quot partes illud unum totum ſit ſectum, ſeu diviſum. Superior verò ſeu* numerator, *numerat, quot hujusmodi partes (quales denominator exprimit) ex* illo uno *ſint accipiendæ ad hoc, ut valor fractionis cognoſcatur. Sic* Ex. gr. *in hac fractione* $\frac{3}{4}$ *numerus* 4 *denominat illud unum eſſe ſectum, ſeu diviſum in quatuor partes, numerator verò* 3, *numerat ſeu dicit, tres partes ex illis quatuor accipiendas eſſe, ad conſtituendum valorem hujus fractionis* $\frac{3}{4}$. *Rem hanc ad oculum in gratiam Tyronum declarare juvat. Sit linea* A B *repræſentans unitatem*, Ex. gr.



unam

unam ulnam, ſitque ſecta hæc linea AB *in quatuor partes æquales :* 1,2,3,4. *Sint itaque exprimendæ, ſeu indicandæ tres partes* AC, *de hac linea, ſeu de una ulna* AB, *recte igitur per fractionis expreſſionem ſic indicabitur,* $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, *in qua expreſſione, clarum eſt, denominatorem* 4 *indicare totam unitatem ſeu ulnam* AB *in quatuor partes ſectam, numeratorem verò* 3, *numerare tres hujuſmodi partes (quæ ſunt* AC*), de tota linea* AB *in quatuor partes ſecta.*

Idem algebraice oſtenditur in hac linea KM.



In qua tota linea KM *vocetur E.g.* b, *partes* KD, *vocentur* a, *recte algebraice exprimetur linearis fractio :* $\frac{a}{b}$.

COROLLARIUM I.

112. Hinc liquet *Primo :* fractionem *veram* eſſe, cujus *numerator* minor eſt ſuo *denominatore*, quia exprimit quantitatem unitate *minorem* (§.107.): *Secundo :* Fractio vulgo *ſpuria* erit, ſi numerator ſit *æqualis* ſuo denominatori, ut $\frac{b}{b}$ vel $\frac{4}{4}$, quia tali caſu valor fractionis eſt æqualis toti unitati, *ut patet ex linea* AB (§ 111.). Multo magis *ſpuria* vocabitur, ſi numerator *major* ſit ſuo denominatore, ut $\frac{5}{4}$, quia numerator plures partes numerat, quam ſint in *denominatore*, ſeu in unitate. *Ut ex contemplatione lineæ* AB *clarum eſt.*

COROLLARIUM II.

113. Inter duas, vel plures ejusdem unitatis fractiones, id eſt, (quæ habent eundem denominatorem) illas eſſe quoad valorem *majores*, quæ habent *majores numeratores*, *Ex.gr.* $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$ quia numerator 3, ex æqualibus ejusdem unitatis partibus, plures partes numerat, quam numerator 2. *Vide expreſſionem linearum* AB (§. 111.) Et hinc manifeſtum eſt, quod ſi maneute eodem denominatore augeantur, vel minuantur numeratores, valores quoque fractionum augeantur, vel minuantur, id eſt, vel majores, vel minores quoad valorem efficiuntur, igitur univerſaliter, valores fractionum homogenearum à ſolis numeratoribus cognoſcuntur.

DEFINITIO XX.

114. Fractiones dicuntur *homogeneæ*, ſeu *ejusdem denominationis*, quæ habent eundem denominatorem, ut

ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, aut $\frac{a}{ba}$ & $\frac{bc}{ba}$, item $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{4}$. *Heterogeneæ* appellantur, quæ ſub diverſis denominatoribus comparent, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{a}$, vel $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$.

DEFINITIO XXI.

115. Fractiones *ejusdem valoris*, ſeu æquales ſunt, quarum numeratores æqualiter continentur in ſuis denominatoribus; *Ex. gr.* $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ &c. *in quibus, numeratores ſinguli in ſuis denominatoribus* bis *continentur*, ſic pariter æquales ſunt, $\frac{6}{18}$ & $\frac{8}{24}$, quia in utraque numerator ter continetur in ſuo denominatore, quod per diviſionem innoteſcit.

SCHOLION.

116. *Obſervent Tyrones, æqualitatem* valoris *fractionum confundendam non eſſe, cum æqualitate* denominationis; *nam fractiones poſſunt eſſe æquales quoad valorem, quin habeant æquales denominatores, ut patet ex (§. 115.), & viciſſim, poſſunt habere æqualem denominationem quin tamen ſint æquales, quoad valorem, ut clarum eſt ex (§. 113.)*

THEOREMA VII.

117. *Si ejusdem fractionis tam numerator, quam denominator multiplicetur, per eandem aliquam quantitatem tertiam, fractio nova ex productis orta, erit æqualis quoad valorem priori fractioni nondum multiplicatæ.*

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ cujus numerator a, & denominator b, multiplicetur per eandem quantitatem tertiam c, erit fractio nova ex productis orta $\frac{ac}{bc}$ ſed $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ per (§. 35. & 102.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{1}{2}$ cujus tam numerator, quam denominator multiplicetur per 3, & erit nova fractio $\frac{3}{6}$ ſed $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ per (§. 115.) ergo.

THEOREMA VIII.

118. *Si tam numerator, quam denominator ejusdem fractionis exacte dividatur per eandem aliquam tertiam quantitatem, fractio nova ex quotis orta quoad valorem erit eadem, quæ fuit ante divisionem.*

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{ac}{bc}$ cujus numerator ac, & denominator bc dividatur per eandem tertiam quantitatem c, erit fractio nova ex quotis orta $\frac{a}{b}$ sed $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ per (§. 117.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{3}{6}$ cujus tam numerator, quam denominator dividatur per 3, erit nova fractio $\frac{1}{2}$ sed $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ per (§ 115. & 117.) ergo.

COROLLARIUM I.

119. Hinc si tam in numeratore, quam denominatore fractionis numericæ reperiantur zeri finales, deletis utrinque zeris numero æqualibus, fractionis valor non variatur. *Ex. gr.* Loco $\frac{1000}{2000}$ scribi potest $\frac{1}{2}$ item $\frac{20}{40}=\frac{2}{4}$, aut $\frac{1500}{1700}=\frac{15}{17}$ &c. ratio patet, quia zeri finales oriuntur ex multiplicatione decadica, vel numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ergo per eosdem divisæ (quod fit delendo zeros) manent eædem.

COROLLARIUM II.

120 Ex hoc Theoremate patet ratio compendii (§. 76. Arith.) adducti, cum omnis divisio expressa per Hypothesim (§. 30.) repræsentet fractionem spuriam, in qua numerator est *dividendus*, denominator vero *divisor.*

COROLLARIUM III.

121. Idem Theorema suppeditat methodum, fractionem numericam in numeris majoribus exhibitam, redducendi ad numeros minores, valore fractionis invariato. Videlicet I. Dividendo exacte tam numeratorem, quam denominatorem per eundem aliquem numerum. *Ex. gr.* Sit fractio $\frac{12}{24}$, cujus numeratorem 12, & denominatorem 24 exactè dividat numerus 6, erit facta divisione per numerum

rum 6, nova fractio $\frac{2}{4}$ æqualis $\frac{12}{24}$ per (§.118.), item $\frac{30}{60}=\frac{3}{6}$ per (§.119.) & dividendo $\frac{3}{6}$ per 3, erit $\frac{1}{2}$, ergo $\frac{30}{60}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. *Secundo:* Eadem hac methodo, fractio ad *minimos*, ut dicitur, *terminos* reducetur in casu, si numerator exacte dividat denominatorem suum; *Ex. gr.* in fractione $\frac{12}{24}$, cum 12 exacte contineatur bis in 24, si tam numerator, quam denominator, per 12 dividatur, erit fractio $\frac{1}{2}$ in terminis *minimis.*

SCHOLION.

122. *Reductio hæc ad terminos minores sua utilitate non caret; nam* Primo: *valor fractionis, si sit in numeris minoribus, facilius innotescit, sic facilius intelligitur, quota pars sit* $\frac{1}{2}$ *de uno floreno, quam* $\frac{36}{72}$ *unius floreni, etsi quoad valorem idem sint* $\frac{36}{72}$, *quod* $\frac{1}{2}$. Secundo: *Reductio hæc compendium subministrat operationum arithmeticarum, cum compendiosior sit modus operandi per parvos, quam magnos numeros.*

PROBLEMA V.

123. PROP. *Ex numero quocunque dato* integro, *efficere fractionem vulgo spuriam datæ denominationis, manente valore numeri integri invariato.*

RESOLUTIO.

Datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, erit *productum* numerator, cui, interposita lineola, subscribatur datus denominator. Q. E. F.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit quantitas integra *Ex. gr.* a reducenda ad datum denominatorem b, erit per datam resolutionem fractio spuria $\frac{ab}{b}$, sed $\frac{ab}{b}=a$, per §. 35. & 102.) ergo. Q. E. D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit ex numero 4, *facienda fractio spuria, quæ habeat denominatorem* 6, *igitur multiplicando* 4 *per* 6, *erit productum* 24 numerator, *cui subscriptus datus* denominator 6, *exhibebit fractionem spuriam* $\frac{24}{6}$ *æqualem quoad valorem numero* 4 *integro.*

COROLLARIUM.

124. Hinc liquet methodus reducendi numerum integrum ad datæ fractionis alicujus denominatorem; si

nempe datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, & producto addatur numerator fractionis datæ, ac ducta lineola subscribatur prior datæ fractionis denominator. *Ex. gr.* Sit numerus 3 reducendus ad denominatorem fractionis $\frac{2}{5}$, erit multiplicando 3 per 5, productum 15, cui addendo numeratorem 2, efficitur summa 17, & huic subscribendo denominatorem 5, erit fractio spuria $\frac{17}{5}$.

PROBLEMA VI.

125. PROP. *Datam fractionem* vulgo *spuriam ad integra reducere.*

RESOLUTIO.

Dividatur numerator per suum denominatorem, quotus erunt integra, vel cum, vel sine fractione vera remanente. Q. E. F.

Demonstratio algebraica patet; nam $\frac{ab}{b} = a$ per (§. 35. & 102.) Q. E. D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit data fractio spuria $\frac{24}{6}$, igitur dividendo 24 per 6, erit quotus 4 numerus integer. Item sit fractio spuria $\frac{17}{5}$, itaque dividendo 17 per 5, erit quotus 3, cum remanente fractione vera $\frac{2}{5}$.

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Invenire, quid data quæcunque fractio valeat in data quavis certa specie.* Ex. gr. *Si quæratur $\frac{3}{9}$ unius flor. Germ. in specie cruciferorum, vel nummorum, quot faciunt cruciferos, vel nummos?*

RESOLUTIO.

Data species, in qua valor fractionis quæritur, multiplicetur per numeratorem datæ fractionis, factum dividatur per denominatorem ejusdem fractionis, & quotus dabit valorem fractionis quæsitum in data specie. Q. E. F. *Demonstratio dabitur in parte ultima hujus.*

EXEM-

EXEMPLUM NUMERICUM.

Ex. gr. *Quæratur* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. quot faciunt cruciferos; igitur cum flor. Germ. habeat 60 xr. multiplicentur 60 per numeratorem 3, erit factum 180, hoc factum dividatur per denominatorem 9, & quotus emergens 20, erunt cruciferi, seu valor fractionis* $\frac{3}{9}$, *unius flor. Germ. in specie cruciferorum. Item* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. in nummis, quid valent? igitur cum 120 nummi faciunt flor. Germ. multiplicentur 120 per 3, & factum 360, dividatur per 9, erit quotus 40, seu nummi, quos valet data fractio* $\frac{3}{9}$.

Item: Quæratur Ex. gr. $\frac{24}{32}$ *unius urnæ Transylvanicæ, quot faciunt mensuras? cum urna Transylv. habeat 8 mensur. multiplicentur 8 per 24, & factum 192, dividatur per 32, erit quotus 6, exhibens mensuras, quas valet data fractio* $\frac{24}{32}$ *unius urnæ Transf.*

SCHOLION I.

127. *Problema hoc utilissimum, & in praxi summe necessarium est, quotiescunque certum quantum in datas partes distribuendum occurrit, quæ distributio, cum ope divisionis indagari debeat, ut* (§. 62. Arith.) *dictum, plerumque autem quoto ex divisione orto adhærere soleat fractio, quæ indicat partem, vel partes aliquot unitatis, illius speciei, cujus erat dividendus, necessarium est ad æquam distributionem, ut sciatur, quid data fractio in specie illius unitatis valeat? res exemplo declaratur. Sint distribuendi 26 fl. Germ. in 3 pauperes, igitur ope divisionis Arithm. invenietur quotus* $8\frac{2}{3}$ *unius fl. Germ. dandi cuilibet pauperi; sed* $\frac{2}{3}$ *unius fl. Germ. ignorantur, ergo per hoc problema operando, ut habeatur valor* $\frac{2}{3}$ *unius fl. Germ.* Ex. gr. *In nummis, multiplico 120 nummos (tot enim habet flor. Germ.) per numeratorem 2, & factum 240, divido per denominatorem 3, erit quotus 80 nummi, igitur ex 26 florenis, cuilibet pauperi obveniunt 8 flor. & 80 nummi.*

SCHOLION II.

128. *Ad hoc Problema rite tractandum necessariæ sunt* Tabulæ Reductionum, in Parte III. Arithm. *adductæ, ut sciatur in data quavis specie, quot unitates species major contineat ex specie minore,* vide usum tabularum (§. 140. Arithm.)

CAPUT VII.

De quatuor Algorithmis fractionum.

PROBLEMA VIII.

129. PROP. *Duas, vel plures fractiones* heterogeneas (§. 114.) *reducere ad fractiones* homogeneas (§. 114.) *seu ad eundem denominatorem, valore fractionum invariato.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si duæ fractiones reducendæ sint.* Multiplicetur tam numerator, quam denominator *primæ* fractionis, per denominatorem fractionis *secundæ*, & vicissim tam numerator, quam denominator fractionis *secundæ*, multiplicetur per denominatorem *primæ* fractionis, erunt reductæ ad eundem denominatorem valore fractionum invariato. Q E. F.

Algebraice, & Demonstrative.

Sint reducendæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, erunt per datam resolutionem reductæ $\frac{a.d}{b.d}$ & $\frac{c.b}{d.b}$, seu $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{db}$, habentes eundem denominatorem bd, sed habent etiam valorem priorem, nam $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ per (§. 117.) & $\frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$ per eundem (§. 117.) ergo. Q.E.F.D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$, erunt reductæ per datam resolutionem, *prima* fractio $\frac{3.7}{4.7}$, & *secunda* $\frac{5.4}{7.4}$, seu *prima* $\frac{21}{28}$, *secunda* vero $\frac{20}{28}$, & hinc $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$, & altera $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ per (§. 117.)

SCHOLION.

130. *In gratiam Tyronum ad firmandam memoriam, reductionem duarum fractionem sub hoc schemate exhibeo: in quo ductus linearum ostendit ad oculum, quod in prima fractione* $\frac{3}{4}$, *tam numerator* 3, *quam denominator* 4 *multiplicari debeat per denominatorem* 7 *fractionis secundæ; quodque*

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

id est

$\frac{21}{28}$ $\frac{20}{28}$

in

in secunda fractione $\frac{5}{7}$ tam numerator 5, quam denominator 7, multiplicari debeat per denominatorem 4 fractionis primæ.

CASUS II. *Si plures fractiones reducendæ sint.*

I. Numerator fractionis primæ, multiplicetur per denominatorem secundæ, hoc factum multiplicetur per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum multiplicetur per denominatorem quartæ, & sic porro; erit productum ultimum numerator fractionis primæ.

II. Numerator fractionis secundæ multiplicetur per denominatorem primæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, (nam per proprium denominatorem multiplicari non debet) productum hoc per denominatorem quartæ, &c.

III. Eodem modo reliquarum numeratores multiplicandi sunt per omnes denominatores *aliarum* factionum, (NB. *aliarum*) emanente videlicet proprio denominatore.

IV. Ut communis omnium denominator obtineatur, multiplicetur denominator fractionis primæ, per denominatorem secundæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum per denominatorem quartæ, & ita porro; erit productum omnium denominatorum, communis denominator omnium fractionum reductarum: hæ quatuor regulæ in sequente quinta regula universaliter continentur.

Regula universalis: Numerator fractionis reducendæ multiplicetur per denominatores *aliarum* fractionum, communis autem denominator, erit factum omnium denominatorum in se invicem ductorum. Q.E.F.

Algebraice, & Demonſtrative.

Sint fractiones reducendæ.

Prima: $\frac{a}{b}$, *ſecunda* $\frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{f}{g}$, *quarta* $\frac{m}{n}$.

Erunt reductæ per datam Reſolutionem

Prima: $\frac{adgn}{bdgn}$, *ſecunda* $\frac{bcgn}{bdgn}$, *tertia* $\frac{bdfn}{bdgn}$, *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn}$.

ſed per (§. 117.) *Prima* $\frac{adgn}{bdgn}=\frac{a}{b}$, *ſecunda* $\frac{bcgn}{bdgn}=\frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{bdfn}{bdgn}=\frac{f}{g}$, *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn}=\frac{m}{n}$, *ergo.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$.

Erit numerator primæ: $2 \cdot 5 \cdot 7$, *ſeu* $10 \cdot 7 = 70$.
ſecundæ: $4 \cdot 3 \cdot 7$, *ſeu* $12 \cdot 7 = 84$.
tertiæ: $6 \cdot 5 \cdot 3$, *ſeu* $30 \cdot 3 = 90$.

Communis denominator: $3 \cdot 5 \cdot 7$, *ſeu* $15 \cdot 7 = 105$.

Igitur reductæ erunt

Prima: $\frac{70}{105}$, *ſecunda* $\frac{84}{105}$, *tertia* $\frac{90}{105}$.

SCHOLION I.

131. *Vulgo, & uſitatiſſime plures fractiones ad eundem denominatorem reductæ, ſemel tantum ſubſcribendo denominatorem communem exprimi ſolent, ſic adductum prius exemplum algebraicum, ita exprimitur* $\frac{adgn,\ bcgn,\ bdfn,\ bdgm}{bdgn}$ *datum item exemplum numericum ſic ſcribitur vulgo* $\frac{70,\ 84,\ 90}{105}$ *quæ expreſſio, priore compendioſior, idem prorſus ſignificat.*

SCHOLION II.

132. *Quandoque in Reductione ad eundem denominatorem datur locus compendio. Videlicet I. per* (§. 117.) *ſi unius fractionis denominator major, alterius fractionis denominatorem minorem exacte aliquoties contineat, tali caſu, ſi minor denominator, ſimulque & illius numerator, multiplicetur per eum numerum, quoties minor in majore continetur, manente illæſa altera fractione, habebuntur fractiones reductæ;* Ex. gr. *Sit Prima* $\frac{4}{10}$, *ſecunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* ſecundæ 5, *in denominatore* primæ 10 *bis continetur, multiplicetur fractionis* ſecundæ $\frac{3}{5}$ *tam numerator* 3, *quam* denominator 5 *p r* 2, *erit fractio* ſecunda $\frac{6}{10}$, *ſub eodem denominatore, ſub quo eſt* prima $\frac{4}{10}$.

II. Locus eſt compendio per (§. 118.) *quando per eum numerum, per quem denominator minor in majore continetur, dividi poteſt exacte*

tam

tam numerator, quam denominator fractionis habentis majorem denominatorem; manente illæsa altera fractione. Ex. gr. *Sit prima* $\frac{4}{10}$, *secunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* secundæ 5, *bis continetur in denominatore* 10, *numerus verò* 2 *exactè dividat tam numeratorem fractionis* primæ 4, *quam ejus denominatorem* 10, *igitur dividendo per* 2, *erit fractio prima* $\frac{2}{5}$, *sub eodem denominatore, sub quo est secunda* $\frac{3}{5}$; *Quoniam vero horum compendiorum rarior usus occurrit, hinc Tyrones problema reductionum, utpote universale, frequenti exercitio familiare sibi reddant oportet, cum fractiones heterogeneæ nec* addi, *nec* subtrahi *possint, nisi prius ope problematis antecedentis homogeneæ efficiantur.*

COROLLARIUM.

133. Quod si inter duas, vel plures fractiones heterogeneas quæratur, quænam illarum sit quoad valorem major, vel minor, ope hujus problematis reductionum, quæstio resolvetur; nam si datæ fractiones reducantur ad eundem denominatorem, illa erit quoad valorem major, cujus numerator major erit. *Ex. gr.* Si quæratur inter datas fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{6}{7}$, quænam illarum sit majoris valoris, erunt reductæ per (§. 129.) Prima $\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$, secunda $\frac{6}{7}=\frac{24}{28}$, & hinc $\frac{6}{7}>\frac{3}{4}$, quia $\frac{24}{28}>\frac{21}{28}$ per (§. 113.)

DEFINITIO XXII.

134. *Addere fractiones*, est colligere valores partiales datarum omnium fractionum homogenearum in unam fractionem homogenearum, tanquam in unum totum, continens valorem omnium.

PROBLEMA IX.

135. PROP. *Fractiones quasvis datas addere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones addendæ sint homogeneæ, id est, ejusdem denominationis*, addantur tantum numeratores. Summæ omnium numeratorum subscribatur denominator communis. *Vide Exempl. I. & II.* Q. E. F.

II. *Si fractiones sint heterogeneæ*, reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reductæ addantur per Reg. I. hujus. *Vide Exempl. III. & IV.* Q. E. F.

DEMONSTRATIO.

Valores partiales fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§.113.) ergo fractio ejusdem denominationis, habens pro numeratore summam omnium numeratorum fractionum homogenearum, continet valores partiales omnium; jam verò *per Resolutionem huius*, numerator fractionis ejusdem denominationis continet omnes numeratores datarum fractionum homogenearum, ergo continet valores partiales omnium, ergo *per datam resolutionem* habetur fractio homogenea tanquam totum, continens valorem omnium (§. 25. Arith.) ergo facta habetur additio fractionum. (§. 134.) Q. E. D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, *erit summa* $\frac{a+c}{b}$.

EXEMPLUM II. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{3}{8}$ & $\frac{2}{8}$, *erit summa* $\frac{5}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ* $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$ (§.129.) & *hinc additæ*, $\frac{ad+cb}{bd}$, *vel sine reductione simpliciter* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

EXEMPLUM IV. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, & *hinc summa* $\frac{244}{105}$, *quæ per* (§.125) *dat integra* $2+\frac{44}{105}$.

SCHOLION.

136. *Quoniam ex additione fractionum plerumque emergit fractio vulgo spuria, hæc ad integra reducitur per* (§. 125.) *quemadmodum in exemplo IV. factum est. Examen verò additionis, fit per subtractionem.*

DEFINITIO XXIII.

137. *Subtrahere fractiones*, est invenire fractionem, quæ contineat differentiam valoris duarum fractionum homogenearum valore inæqualium.

PRO-

PROBLEMA X.

138. PROP. *Fractionem valore minorem à fractione majoris valoris subtrahere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones sint homogeneæ;* numerator minor subtrahatur à numeratore majore, & residuo subscribatur denominator communis. *V. Exemp. I. & II.* Q.E.F.

II. *Si fractiones sint heterogeneæ;* reducantur prius ad homogeneas per (§.129.) reductæ subtrahantur per Reg. I. hujus. *Vide Exempl. III. & IV.* Q.E.F.

DEMONSTRATIO.

Valores fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§.113.) ergo fractio homogenea, habens pro numeratore differentiam, seu residuum duorum numeratorum, continet differentiam valoris duarum fractionum homogenearum; sed *per datam Resolutionem*, fractio homogenea exhibens residuum, continet differentiam numeratorum, ergo continet differentiam valoris earundem fractionum, ergo facta habetur subtractio fractionum (§.137.). Q.E.D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *subtrahenda fractio* $\frac{c}{b}$ *erit differentia* $\frac{a-c}{b}$.

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{5}{8}$, *subtrahenda fractio* $\frac{3}{8}$ *erit differentia* $\frac{2}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *subtrahenda* $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, & *hinc differentia* $\frac{ad-bc}{bd}$, *vel etiam sine reductione* $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

EXEMPLUM IV. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{6}{7}$, *subtrahenda* $\frac{2}{3}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{18}{21}$ & $\frac{14}{21}$, & *hinc differentia, seu residuum* $\frac{4}{21}$.

SCHO-

SCHOLION.

139. *Examen ſubtractionis fit, ſi numerator reſiduæ fractionis, addatur ad numeratorem fractionis ſubtrahendæ, prodire debet numerator fractionis, à qua ſubtractio facta eſt; ſic ſi numerator differentiæ* $\frac{2}{8}$, *addatur ad numeratorem* $\frac{3}{8}$, *erit fractio* $\frac{5}{8}$ *ipſiſſima, à qua ſubtractio facta eſt. Contra examen additionis fractionum fit per ſubtractionem, ſic in dato Exemplo II. additionis fractionum* (§. 135.) *ſi à ſumma* $\frac{5}{8}$, *ſubtrahatur* $\frac{3}{8}$, *prodire debet* $\frac{2}{8}$, *& viciſſim.*

PROBLEMA XI.

140. PROP. *Fractiones per fractiones multiplicare.*

RESOLUTIO.

I. Multiplicentur numeratores inter ſe, & factum numeratorum erit numerator novæ fractionis *Producti.*

II. Multiplicentur quoque denominatores inter ſe, & factum denominatorum erit denominator novæ fractionis *Producti. Vide Exempl. I. & II.* Q. E. F.

SCHOLION.

141. *Demonſtratio dabitur ſequenti problemate, alia verò magis ordinata dabitur ad calcem* Partis ultimæ hujus.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint datæ fractiones $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *erit productum* $\frac{ac.}{bd}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint multiplicandæ inter ſe $\frac{4}{5}$ *&* $\frac{6}{7}$, *erit productum* $\frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7}$ *ſeu* $\frac{24}{35}$.

SCHOLION.

142. *Illud à Tyronibus obſervatu dignum, quod fractio nova, producta ex multiplicatione fractionum,* (ut videre eſt in Exemplo II.) *quoad valorem longe minor ſit, quam valores ſingularum fractionum, ex quibus per multiplicationem fractio nova orta eſt, cum tamen in multiplicatione integrorum factum longe majus producatur, quam ipſi factores ſint. Ratio itaque hæc eſt: Quod ſi quantitas aliqua per* 1 *multiplicetur, ipſa quantitas invariata ſemel ponitur, ut clarum eſt; igitur ſi quantitas multiplicanda ſit per aliquid minus unitate, id eſt per fractionem, minus neceſſario poni debet, quam ſit ipſe multiplicandus, igitur pars tantum multiplicandi poni debet pro facto, & hinc productum minus evadit, quam factores ſingillatim accepti.*

PRO-

PROBLEMA XII.

143. PROP. *Fractionem per fractionem dividere.*

RESOLUTIO.

I. Fractionis *dividendæ* numerator multiplicetur per denominatorem fractionis *divisoris*, erit factum numerator fractionis novæ.

II. Fractionis *dividendæ* denominator multiplicetur per numeratorem fractionis *divisoris*, erit factum denominator fractionis novæ exhibentis *quotum. V. Exemp. I. & II.* Q E.F.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit divisor $\frac{a}{b}$, *dividenda* $\frac{c}{d}$, *erit quotus* $\frac{bc}{ad}$.

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit divisor $\frac{4}{5}$, *dividenda fractio sit* $\frac{2\cdot4}{3\cdot5}$, *erit quotus* $\frac{2\cdot4\cdot5}{3\cdot5\cdot4}$ *seu* $\frac{40}{60}$, *id est* $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ *per* (§. 121.)

DEMONSTRATIO.

Quotus multiplicatus per divisorem æquatur dividendo per (§. 61. Arithm.) igitur quotus $\frac{bc}{ad}\times\frac{a}{b}$ debet æquari dividendo $\frac{c}{d}$, sed $\frac{bc}{ad}\times\frac{a}{b}=\frac{bac}{bad}$ per (§. 140.) & $\frac{bac}{bad}=\frac{c}{d}$ per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D.

Demonstratur quoque resolutio prioris Problem. XI. de multiplicatione fractionum. Si factum, sive productum dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum, per (§. 57. Arith.) igitur *(in Exemp. I. Probl. XI.)* productum $\frac{ac}{bd}$, si dividatur per unum ex suis factoribus $\frac{c}{d}$ prodire debet alter $\frac{a}{b}$, sed $\frac{ac}{bd}:\frac{c}{d}=\frac{adc}{bdc}$ per (§. 143.), & $\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}$, per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D.

SCHO-

SCHOLION I.

144. *Demonstrationes hæ binæ, si in exemplis numericis adductis exhibeantur, veritatem ad oculum declarant, simulque examen seu probam multiplicationis per divisionem, & divisionis per multiplicationem edocent.*

SCHOLION II.

145. *In gratiam Tyronum resolutionem problematis hujus de divisione fractionum, sub hoc schemate exhibeo: ubi ductus linearum, datas supra regulas manifeste exhibent, nempe: quod* c *numerator dividendi multiplicari debeat per* b *denominatorem divisoris, & denominator* d, *quod multiplicari debeat per* a *numeratorem divisoris, ut*

divis.		*divid.*
$\frac{a}{b}$	$\times$	$\frac{c}{d}$
	Quotus $\frac{bc}{ad}$	

prodeat quotus $\frac{bc}{ad}$. Aliter: *Invertatur divisor, id est, loco numeratoris scribatur denominator proprius, & loco denominatoris scribatur numerator, deinde fiat multiplicatio numeratorum inter se, itemque denominatorum inter se, ut (§.140.) dictum, erit nova fractio quotus,* Ex. gr. *sit dividendus* $\frac{c}{d}$, *divisor* $\frac{a}{b}$, *erit divisor inversus* $\frac{b}{a}$, *& hinc* $\frac{b \times c}{a \times d} = \frac{bc}{ad}$. *Quæ praxes in idem problema recidunt.*

SCHOLION III.

146. *Quotus, ex divisione fractionum ortus, major quoad valorem emergit ipso dividendo, imò sæpe ad fractionem vulgo spuriam assurgit, contra, ac in divisione integrorum fieri debere docuimus. Cujus ratio est, quod, quo minor sit divisor* (etiam in integris) *eo major emergat quotus, manente eodem dividendo; sic si* Ex. gr. 18 *dividatur per* 2, *quotus erit* 9, *è contra si dividatur per* 6 *quotus erit* $3 < 9$. *Igitur cum divisor in fractionibus, sit minor unitate, quotus prodire debet major, quam sit dividendus.*

SCHOLION IV.

147. *Quoniam in praxi arithmetica fractiones cum numeris integris frequenter tractandæ occurrant, plerique Arithmeticorum novas regulas integrorum cum fractis fuse proponere solent; nos labori Tyronum parcentes, simulque studentes compendio doctrinæ, artem numeros integros cum fractis tractandi non aliam proponimus, atque eam, quam de fractionibus hucusque exposuimus; hinc unico problemate universali Algorithmos omnes numerorum fractorum cum integris complectemur, sit igitur.*

PROBLEMA XIII. ET UNIVERSALE.

148. PROP. *Algorithmos omnes fractorum cum integris tractare, id est*, Addere, Subtrahere, Multiplicare, & Dividere *integra cum fractis.*

RESOLUTIO.

I. Quantitas integra exprimatur per modum fractionis vulgo spuriæ, quod fit subscribendo unitatem loco denominatoris.

II. Sub hac ficta imagine fractionis tractetur tanquam fractio vera secundum omnia problemata fractionum hucusque tradita. *Vide Exempla subjecta.* Q.E.F.

DEMONSTRATIO.

Regula I. ostenditur. Data expressio fractionis, est expressio divisionis (§.108.) dividendus autem divisus per unitatem manet invariatus (§. 77. Arithm.) ergo expressio hæc quantitatis integræ per fractionem vulgo spuriam non immutat valorem integri. *Quoad erat primum.*

Regula II. Fractio vulgo spuria habet imaginem fractionis, ergo tractari potest, per modum fractionis, ut *constat ex tota doctrina fractionum.*

EXEMPLUM ADDITIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *addenda in unam fractionem cum* $\frac{c}{b}$, *erit per datam Resolut.* $\frac{a}{1}$ *addenda ad* $\frac{c}{b}$, *& hinc addendæ per* (§. 135.) *igitur reductæ erunt per* (§. 129.) $\frac{ab}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *quarum summa est* $\frac{ab + c}{b}$ *per* (§. 135.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint numerus 4 addendus cum $\frac{2}{3}$, *in unam fractionem, erit numerus 4 sub ficta imagine fractionis* $\frac{4}{1}$ *igitur addendæ sunt* $\frac{4}{1}$ *ad* $\frac{2}{3}$ *per* (§. 135.) *quare reductæ erunt* $\frac{12}{3}$ *&* $\frac{2}{3}$ *per* (§. 129.) *& additæ in unam fractionem* $\frac{14}{3}$ *per* (§. 135.)

EXEM-

EXEMPLUM SUBTRACTIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit ex quantitate a *subtrahenda fractio* $\frac{c}{b}$, *ergo ex* $\frac{a}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{c}{b}$ *per* (§. 138.), *igitur reductæ erunt* $\frac{ab}{b}$ & $\frac{c}{b}$, & *hinc differentia* $\frac{ab-c}{b}$ *per* (§.138.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit à numero 4 *subtrahenda fractio* $\frac{2}{3}$, *ergo ab* $\frac{4}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{2}{3}$ *per* (§.138.) *igitur reductæ erunt* $\frac{12}{3}$ & $\frac{2}{3}$, & *hinc differentia* $\frac{10}{3}$ *per* (§.138.)

EXEMPLUM MULTIPLICATIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *multiplicanda per* $\frac{c}{b}$, *ergo* $\frac{a}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{c}{b}$ *juxta* (§.140) *erit igitur productum* $\frac{ac}{b}$ *per eundem* (§.140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 *multiplicandus per* $\frac{2}{3}$, *ergo* $\frac{4}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{2}{3}$ *juxta* (§.140.) *erit igitur productum* $\frac{8}{3}$ *per eundem* (§ 140.)

EXEMPLUM DIVISIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *dividenda per divisorem* $\frac{c}{b}$, *erit dividendus* $\frac{a}{1}$, & *divisor* $\frac{c}{b}$ *igitur per* (§.143.) *quotus* $\frac{ab}{c}$.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 *dividendus per divisorem* $\frac{2}{3}$, *erit dividendus* $\frac{4}{1}$, & *divisor* $\frac{2}{3}$ *igitur per* (§.143.) *quotus* $\frac{12}{2}$.

COROLLARIUM.

149. Eadem methodo procedendum eſt, ſi numerus complexus ex fracto & integro tractari debeat cum alio numero complexo itidem ex fracto & integro, aut numerus complexus ex fracto & integro, cum fracto tantum; nam ſubſcribendo integris unitatem, tractentur ut fractiones. Idem eſt in literalibus.

SCHOLION.

150. *In adductis hucusque Theorematibus, ac problematibus fundamentalibus tota fractionum vulgarium, & ſimplicium doctrina continetur, de cæteris fractionibus potentiarum, ut ſunt fractiones quadraticæ, cubicæ, &c. agetur in* Parte II. hujus; *de earundem progreſſionibus, & cæteris affectionibus in* Parte IV. *tractabitur. Ne verò aliquid à nobis deside-*

desideretur præstitum fuisse, quod ab aliis quoque pertractatur, bina problemata, non quia necessaria, sed quod sua utilitate in certis circumstantiis non careant, adseremus.

DEFINITIO XXIV.

151. *Communis mensura*, simpliciter, dicitur quantitas, major unitate, quæ alias binas, vel plures quantitates exacte metitur, quod per divisionem exactam innotescit; sic communis mensura respectu numerorum 8, & 12, est numerus 2, item numerus 4, quia per hos tam 8, quam 12 exacte dividitur; Hæc communis mensura vocatur etiam *Pars aliquota communis.*

DEFINITIO XXV.

152. Communis mensura (cum addito) *maxima*, dicitur quantitas, quæ, metiendo plures quantitates inæquales, est mensura maxima respectu quantitatis inter datas minimæ, prout cum aliis conjunctæ. Ita numerorum 8 & 12 communis mensura maxima est numerus 4, quia 4 respectu numeri 8 prout conjuncti cum numero 12, est divisor *maximus*, qui numerum 8 & 12 simul exacte dividit.

COROLLARIUM.

153. Cum duorum, vel plurium numerorum communis mensura maxima, sit divisor, qui respectu numeri inter datos minimi, est maximus, sequitur, quod si numerus inter datos minimus sit divisor respectu reliquorum, erit ipse numerus inter datos minimus communis mensura omnium maxima, quæ in dato casu haberi potest. *E. g.* Sint numeri 8 & 16, cum 8 sit mensura communis, & respectu sui, & respectu numeri 16, cumque respectu sui sit maxima, erit etiam respectu numeri 16 prout conjuncti cum 8, mensura maxima, ita, ut ea major in dato casu haberi non possit, cum divisor respectu dividendi major esse nequit, quam sit ipse dividendus, per (§. 62. Arith.) ergo eidem æqualis, omnium maximus est.

PROBLEMA XIV.

154. PROP. *Invenire communem menſuram maximam, ſeu diviſorem communem maximum, per quem exactè dividendo tam numeratorem, quam denominatorem fractionis datæ, fractio reducitur ad terminos minimos poſſibiles.*

RESOLUTIO.

I. *Denominator* dividatur per *Numeratorem*, quod ſi ex hac diviſione nihil remaneat, erit ipſe *numerator*, communis menſura maxima, per quam diviſus tam numerator, quam denominator datæ fractionis, producit novam fractionem in terminis minimis. *V. Exemp. I.*

II. Si ex prima diviſione denominatoris per numeratorem ſuum, relinquatur Reſiduum aliquod, ſic procedendum erit; *Numerator* (qui fuit diviſor) fiat *dividendus*, & Reſiduum fiat *diviſor*, qui, ſi exacte dividat numeratorem ſine reſiduo, erit hic communis menſura maxima. *Vide Exempl. II.*

III. Quod ſi ex ſecunda diviſione numeratoris per reſiduum, iterum emergat reſiduum, tum ex ſecundo *diviſore* (qui fuit primum reſiduum) fiat iterum *dividendus*, & ſecundum reſiduum fiat *diviſor*; atque hac alternativa methodo tamdiu procedendum eſt, donec inveniatur aliquis diviſor major unitate, qui ſuum dividendum exacte ſine aliquo reſiduo dividat, erit hic ultimus diviſor communis menſura maxima reſpectu datæ fractionis, ut ſupra dictum.

IV. Quod ſi hac methodo procedendo ſemper aliquod reſiduum emergat, donec tandem ad diviſorem perveniatur, qui ſit *unitas*, cum unitas non dividat per (§. 77. Arithm.) ſignum eſt, datam fractionem ad minores terminos irreducibilem eſſe. *Vide Exempl. III.*

EXEMPL.

EXEMPLUM I.

Sit fractio reducenda $\frac{36}{144}$ *erit*

Dividend.	144	*quotus.*
Divisor	36	4
Fact. subt.	144	
Residuum	000	

Igitur dividendo tam numeratorem 36, quam denominatorem 144 per 36, erit fractio $\frac{1}{4}$ *in terminis minimis valore* = $\frac{36}{144}$.

EXEMPLUM II.

Sit reducenda fractio $\frac{108}{144}$ *erit*

Dividend.	144	*quotus*
Divisor	108	1
Residuum	36	

Secundo.

Dividend.	108	*quotus*
Divisor	36	3
	108	
Residuum	000	

Igitur divisor maximus tam respectu numeratoris 108, quam denominatoris 144 est 36, qui producit fractionem in terminis minimis $\frac{3}{4}$ *æqualem datæ* $\frac{108}{144}$.

EXEMPLUM III.

Sit reducenda $\frac{88}{105}$ *erit*

Divid.	105	1
Divis.	88	
Residuum	17	

secundo

Divid.	88	5
Divis.	17	
fact. subt.	85	
Residuum	3	

tertio

Divid.	17	5
Divis.	3	
fact. sub.	15	
Residuum	2	

quarto

Divid.	3	1
Divis.	2	
Resid.	1	

Cum ultimus divisor sit unitas, fractio $\frac{88}{105}$ *est irreducibilis.*

Algebraice.

In fractione algebraica cum omnes factores pateant, E. g. $\frac{abcd}{acdf}$ *deletis per* (§. 35. & 36.) *utrinque terminis homogeneis* acd; *erit in terminis minimis prior fractio* $\frac{b}{f}$.

DEMONSTRATIO.

Regula I. patet ex (§. 121.) Regula II. demonstratur per gradationem retrogradam; nam divisor secundus 36, seipsum seu 36 exacte dividit, sed idem etiam exacte dividit divisorem primum 108, ergo 36 exacte dividit quantitatem 36 + 108, sed 36 + 108 = 144 per (§. 43. Arithm.) ergo 36 est communis mensura, & quidem maxima respectu numerorum 108 & 144. Q. E. D.

Q.E.D. Eodem modo Regula III. demonſtratur. Regula IV. demonſtratione non eget, cum unitas, ad quam devenitur, non dividat, per (§.77. Arithm.)

SCHOLION.

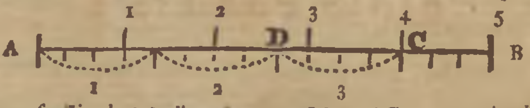
155. *In hujusmodi diviſione*, quotorum *nulla habetur ratio. Cæterum moleſta hæc initio Tyronibus praxis, ſuppleri poteſt per methodum aliam tentativam; videlicet: ſi tam numerator, quam denominator finales numeros habeant pares*, Ex.gr. 2, 4, 6, 8. *Diviſio utriusque exacta tentanda per numeros pares. Si verò finalis unius ſit par, alterius impar, tentanda erit diviſio exacta per imparem, eodem modo ſi uterque ſit impar.*

DEFINITIO XXVI.

156. *Fractio fractionis*, vocatur fractio, quæ eſt pars, vel partes, alterius alicujus fractionis, ſeu eſt pars, vel partes, alicujus partis per modum unius conſideratæ. *Ex.gr.* $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$.

SCHOLION.

157. *Claritatis gratia; ſit linea AB primum diviſa in 5 partes*



Sitque fractio de tota linea $\frac{3}{5}$, *quæ eſt Pars AC. Porro intelligatur quælibet pars quinta de AB ſubdiviſa in tres particulas, vide figuram. Sit jam de hac ipſa parte AC indicanda pars AD, erit hac* $\frac{1}{3}$ *de* $\frac{3}{5}$, *id eſt fractio* $\frac{2}{3}$ *eſt fractio fractionis* $\frac{1}{5}$.

PROBLEMA XV.

158. PROP. *Fractionem fractionis ad fractionem ſimplicem reducere.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur, per (§.140.) numerator per numeratorem, & denominator per denominatorem illius fractionis, cujus hæc eſt fractio. Q.E.F.

EXEMPL.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ de fractione $\frac{c}{d}$ erit ad simplicem reducta $\frac{ac}{bd}$ per (§.140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit fractio $\frac{2}{3}$ de fractione $\frac{4}{5}$ erit reducta ad simplicem $\frac{8}{15}$. Resolutio hæc jam demonstrata est (§.143.)

COROLLARIUM.

159. Liquet itaque *primo*: toties fieri fractionem fractionis, quoties fractiones quæcunque inter se multiplicantur per (§.140.) *Secundo*: patet, per hanc reductionem innotescere valorem fractionis de fractione, ut clarum fit ex contemplatione lineæ AB in Scholio (§.157.) adductæ. Nam AD, de AC, seu $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ faciunt revera de tota linea AB $\frac{8}{15}$. *Tertio* colligitur, si fractio fractionis addenda, subtrahendave sit ab aliis fractionibus, per hoc problema prius ad simplicem esse reducendam.

SCHOLION.

160. De aliis fractionum proprietatibus agetur suis locis.

FINIS PARTIS I.

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

CAPUT I.

De quantitatum Potentiis, & Radicibus in genere.

DEFINITIO I.

161. Productum, seu *factum*, quod oritur, si quantitas quævis per seipsam semel, vel sæpius multiplicetur, vocatur *Potentia, Potestas*, vel *Dignitas*. *Ex.gr.* Si a per a multiplicetur, erit factum aa, *Potentia, Potestas*, vel *Dignitas*; idem est in numeris sic 3.3 seu 9, est *Potentia* &c.

DEFINITIO II.

162. Multiplicatio quantitatis per seipsam, vocatur *Elevatio*, vel *Evectio* quantitatis ad *Potentiam* &c. Quantitas verò illa, quæ elevatur, vel elevata est ad potentiam aliquam, vocatur *Radix*, vel *Latus* Potentiæ; aut etiam *prima Potentia*. Sic a est radix de aa, vel aaa, item 3 est radix de 3.3 seu de 9.

COROLLARIUM.

163. Omnis itaque quantitas secundum se considerata, & ex qua per elevationem, vel fieri potest, vel facta est potentia, vocari potest *Radix*.

SCHO-

SCHOLION I.

164. *Ut Tyrones genesim dignitatum tam in quantitatibus integris, quam fractis recte intelligant, sequentem Tabulam contemplandam subjicio, quæ quantitatis monomiæ evectionem ad aliquot dignitatis gradus declarat. Sit igitur*

IN INTEGRIS.

Algebraice.	Gradus Potentiæ.	*Numerice.*
$a^0 = 1$	*Nulla Potentia.*	$1 = 1$
$a = a^1$	Radix, *vel prima Potentia*	$3 = 3$
$aa = a^2$	Quadratum, *vel secunda Potentia*	$3 \cdot 3 = 9$
$aaa = a^3$	Cubus, *vel tertia Potentia*	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
$aaaa = a^4$	- - *quarta Potentia*	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
&c. &c. in infinitum.		

Universaliter: a^m *significat omnem potentiam, quam denotat exponens m.*

IN FRACTIS.

Algebraice.	Gradus Potentiæ.	*Numerice.*
$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$	Radix, *seu prima Potentia*	$\frac{3}{4}$
$\frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$	Quadratum, *seu secunda Potentia*	$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$
$\frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$	Cubus, *seu tertia Potentia*	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{27}{64}$
	& ita in infinitum.	

Universaliter: $\frac{a^m}{b^m}$ *significat omnem Potentiam.*

SCHOLION II.

165. *Ex attenta hujus tabulæ contemplatione sequentia Corollaria deducuntur:* I. *Exponentes accurate indicare gradum datæ potentiæ, sic* a^2 *significat* secundam Potentiam, *seu* Quadratum; a^3 *exprimit* Cubum, *seu tertiam Potentiam;* a^4, *quartam*, a^5 *quintam Potentiam, & ita porro.* II. *Quadratum* aa, *seu* a^2 *generari, si radix per seipsam semel multiplicetur,* Cubum *verò* aaa, *vel* a^3 *generari, si* Quadratum aa *iterum per* a, *seu per radicem suam multiplicetur; & ita porro:* III. *Ad hoc, ut fracti ad dignitatem evehantur,* opus *esse, ut tam numeratores, quam denominatores eleventur.*

SCHOLION III.

166. *Eodem modo per exponentes exprimuntur gradus dignitatis, seu potentiæ quantitatum*, binomiarum, *vel polynomiarum; sic* $(a+b)^2$ *vel* $\overline{a+b}^2$ *significat totam quantitatem* $a+b$ *esse elevatam ad secundam potentiam, seu ad* quadratum; *item* $(a+b)^3$, *vel* $\overline{a+b}^3$ *significat* cubum, *seu tertiam* potentiam, *& ita porro. Idem est in numeris; sic* $(3+4)^2$ *est* quadratum, $\overline{3+4}^3$ *significat cubum; ut ex doctrina exponentium (§. 50.) data clarum est.*

SCHOLION IV.

167. *Nomina, & signa peculiaria graduum* dignitatis, *quibus Arabes, & antiquiores mathematici usi sunt:* Ex. gr. Zensus, *vel* zensi-zensus, *aut* surdesolidus, quadrato-cubus, *& cætera heteroclyta, omittenda potius duxi, quam Tyronum memoriam, obsoletis, & inter Recentiores abolitis nominibus. inutiliter onerare, quorum catalogi, quibus legendi animus est, in comentariis antiquiorum non sine tædio passim videri possunt.*

HYPOTHESIS I.

168. *Quoniam signum* Radicale *est* $\surd$ *per* (§. 38.). *Numeri, vel literæ huic signo supra scripti, sunt* Exponentes, *quibus indicatur gradus potentiæ, cujus hæc est radix.* Ex. gr. $\sqrt[2]{}$, vel simpliciter sine exponente $\surd$, *indicat radicem* quadratam, *seu secundæ potentiæ. Sic* $\sqrt[3]{}$ *indicat radicem* cubicam *seu tertiæ potentiæ, &* $\sqrt[5]{}$ *radicem quintæ potentiæ, aut universaliter:* $\sqrt[n]{}$ *radicem cujuscunque potentiæ.*

SCHOLION I.

169. *Itaque* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa}$, *aut* $\sqrt{a^2}$ *significat radicem* quadratam *ex* aa, *quæ cum sit* a *per* (§. 164.) *erit* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa}=a$, *ita* $\sqrt{xx}=x$, & $\sqrt{aabb}=ab$ &c. *item* $\sqrt[3]{aaa}$, *vel* $\sqrt[3]{a^3}=a$, *& universaliter* $\sqrt[n]{a^n}=a$, *eodem modi in fractis* $\sqrt{\frac{aa}{bb}}=\frac{a}{b}$, & $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}=\frac{a}{b}$, *aut* $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{a}{b}$ &c.

SCHOLION II.

170. *Eodem modo in* polynomiis. $\sqrt[2]{(a+b)^2}$, *vel* $\sqrt{\overline{a+b}^2}$, *significat radicem* quadratam *de* $(a+b)^2$, *quæ est* $a+b$, *item* $\sqrt[3]{\overline{a+b}^3}$, *denotat radicem* cubicam &c. *Notent Tyrones quod signum* radicale $\surd$, *afficiat*

afficiat tantum quantitatem sibi ad dextram scriptam; sic in hac, $ab\sqrt{aa}$, *vel* $2\sqrt[2]{ac}$, *signum* $\sqrt{}$ *non afficit* ab, *vel* 2, *sed tantum* aa, *vel* ac, *est tamen quantitas anteposita signo* $\sqrt{}$ *coëfficiens, sic* $2\sqrt{aa}$ *significat* $\sqrt{aa}+\sqrt{aa}$.

SCHOLION III.

171. *Sunt qui Hypothesim expressionis radicalis per exponentes, non signo* $\sqrt{}$ *superscribendo exponentem, sed ad latus dextrum, interpositis inter exponentem, & dignitatem duobus punctis exprimunt; sic* Ex. gr. *loco hujus* $\sqrt[3]{ab^4}$, *scribunt:* $\sqrt{3:ab^4}$, *vel loco hujus* $\sqrt[4]{\overline{a+b}^3}$, *ponunt* $\sqrt{4:\overline{a+b}^3}$, *verum etsi hujusmodi expressio versatis jam in Algebra nihil obturbet, Tyronibus tamen molesta, & perturbata accidit, atque hinc nos ea non utemur.*

DEFINITIO III.

172. *Radix rationalis*, aut *vera*, dicitur illa, quæ numeris exactè exprimi potest; sic numerus 3 (qui est $\sqrt[2]{9}$) est *rationalis*, quia $3.3=9$, ita quoque $\sqrt[3]{8}$, quæ est 2, est *rationalis*, quia $2.2.2=8$.

SCHOLION.

173. *Hinc* Radix irrationalis, *vel* surda *appellatur, quæ numero exactè exprimi non potest, licet in lineis geometricis dari queat; sic* surda, *vel* irrationalis *est* $\sqrt[2]{28}$; *quia nullus numerus per seipsum semel multiplicatus producere potest* 28, *nam* $5.5=25<28$, & $6.6=36>28$. *Sic surda est* $\sqrt[3]{34}$ *nam* $3.3.3=27<34$, & $4.4.4=64>34$.

DEFINITIO IV.

174. Radix *Imaginaria*, vel *Impossibilis* illa dicitur, quæ datur in potentia *negativa*, habente *exponentem* numerum parem 2, 4, 6, 8 &c. sic $\sqrt{-a^2}$, vel $\sqrt[2]{-4}$ imaginaria est, & impossibilis.

SCHOLION I.

175. *Radices hujusmodi dicuntur* impossibiles, *quod nec lineis, nec numeris exprimi possint, propterea, quia nulla quantitas per seipsam, adeoque sub eodem etiam* signo *multiplicata producere potest quantitatem negativam affectam exponente, qui sit numerus par. Sic* impossibilis

bilis *est* $\sqrt{-a^2}$, *quia* a.a *dat* $+a^2$ & $-a \times -a$, *dat etiam* $+a^2$, *per* (§. 86.) *ergo* $-a^2$ *produci non potest ex quantitate multiplicata per seipsam sub eodem signo; item* impossibilis *est* $\sqrt{-4}$, *quia tam* $+2$ *quam* -2 *per seipsum multiplicatum dat* $+4$, *per* (§. 86.) *dicitur autem* Imaginaria *propterea, quia saltem imaginatione nostra concipi potest, comparative nempe ad positivam, cui negative opponitur, eo prorsus modo, quo impossibilia concipere solemus. Neque tamen sua utilitate carent hæ radices imaginariæ, nam præterquam quod in Analysi numerorum, indicent impossibilitatem Problematis, in Geometria flexus, & curvaturas linearum demonstrant.*

SCHOLION II.

176. *In potentia itaque* negativa *habente exponentem numerum imparem*, 3, 5, 7, &c. *radix non est* imaginaria, *aut* impossibilis, *sed vera, etsi* negativa. *Sic* $\sqrt[3]{-a^3}$, *est possibilis, & vera, est enim* $-a$, *nam* $(-a \times -a) \times -a$, *factum dat* $-aaa$ *seu* $-a^3$, *item* $\sqrt[3]{-64}$ *est* -4, *quia* $(-a \times -4) \times -4$ *producit* -64 *per* (§. 86.)

CAPUT II.

De Extractione Radicum quarumvis.

DEFINITIO V.

178. *Extractio Radicis*, est inventio quantitatis radicalis, quæ, aut elevata produxit datam potentiam, aut, si producere non potuit, saltem in illa proxime continetur.

SCHOLION.

179. *In specie* Extractio radicis quadratæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam semel multiplicata generavit* quadratum; *item*, Extractio radicis cubicæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam bis multiplicata produxit* cubum, & *ita porro.*

AXIOMA.

180. Omnis quantitas radicalis considerari, & exprimi potest, tanquam quantitas *binomia*, *Ex. gr.* $a+b$, aut $a-b$, item $x-y$, vel $x+y$.

COROL-

COROLLARIUM.

181. Itaque omnis numerus radicalis monomius, exprimi poteſt per expreſſionem *binomiam*, ſic numerus $7 = 2 + 5$, vel $3 + 4$, aut $1 + 6$ &c.

THEOREMA I.

182. PROP. *Omne Quadratum (generatum ex* $\surd$ *binomia) componitur ex tribus elementis;* Primo: *ex quadrato partis primæ radicalis;* Secundo: *ex duobus factis partium radicalium inter ſe;* Tertio: *ex quadrato partis ſecundæ radicalis.*

DEMONSTRATUR.

	Algebraice.	*In Numeris.*	
Sit Radix binomia	$a + b$	$= 2 + 5$	$= 7$
Per ſeipſam multiplic.	$a + b$	$= 2 + 5$	$= 7$
Erunt facta	$aa + ab$	$= 4 + 10$	-
Partialia	$+ ab + bb$	$= \quad 10 + 25$	-
Quadratum	$aa + 2ab + bb$	$= 4 + 20 + 25$	$= 49$

Sed aa *eſt quadratum de parte prima radicis* a, *&* 2ab *eſt* a. b + a. b, *ſeu duo facta partium radicalium* a *&* b *inter ſe, & denique* bb *eſt quadratum partis ſecundæ radicalis* b, *ergo.* Vide Fig. 1. *In qua ſi linea* CD = DE *ſecta inæqualiter, vocetur* a + b, *hæ in ſe invicem geometrice multiplicatæ per* (§. 90. Arithm.) *producunt* □ DCHE, *conſtans quadratis partium* aa & bb, *& duobus factis* ab.

Idem in Exemplo numerico: Vide Fig. 2. *in qua* DC *æqualis* DE *ſit* Ex. gr. 7 *ſeu* 2 + 5, *conſtabit totum* □ DCHE, *quadrato de* 2, *ſeu* □ 4, *& quadrato de* 5; *ſeu* □ 25, *& duobus factis* 10 + 10, *ſeu* 20, *quæ ſimul faciunt* 49 = 7 · 7 = (2 + 5) · (2 + 5.)

COROLLARIUM.

183. Cum omnis radix eſſe poſſit *binomia*, per (§. 180.) omne quadratum conſiderari poteſt generatum ex radice binomia. Itaque formula algebraica, $aa + 2ab + bb$ univerſaliter repræſentat omne quadratum, ſed hæc formula facta eſt per multiplicationem, ergo inquiſiturus, ſeu extracturus radicem diviſione opus eſt, utatur, cum quod multiplicatio ponit, tollat diviſio per (§. 121. Arith.)

PRO-

PROBLEMA I.

184. PROP. *Extrahere radicem quadratam ex quadrato Algebraico.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sit extrahenda radix

$$\left.\begin{array}{rlll} \text{ex } \square & aa & +\,2ab & +\,bb \\ \text{Subtrah.} & +\,aa & \cdots & \cdot\cdot \\ & - & \cdots & \cdot\cdot \\ \hline \text{Resid.} & & +\,2ab & +\,bb \\ \text{Divis. } 2a) & & +\,2ab & +\,bb \\ \text{Subtrah.} & & - & - \\ \hline & & 0 & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \left\{ a \right. \\ \\ \\ \\ \left\{ +b \right. \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} \text{Radix } a+b$$

Itaque primo: *Quia primum membrum* aa *est quadratum de* a, *erit* $\sqrt{aa} = a$ *per* (§. 169) *quæ locetur post lunulam, erit* a *pars prima radicis binomiæ.*

Secundo: *Ex hac inventa radice* a *fiat quadratum* aa, *quod subscriptum quadrato formulæ* aa, & *subtractum destruit ex formula primum membrum* aa, *remanentibus duobus membris* $2ab + bb$.

Tertio: *Quia in secundo membro* 2ab *continetur pars altera radicis* b, *quæ est multiplicata per* 2a, & *quia* $\frac{2ab}{2a} = b$ *per* (§. 35. & 98.) *itaque* 2ab *dividi debet per divisorem* 2a, & *prodibit quotus* $+b$, *pars nempe altera radicis, quæ ponatur post lunulam.*

Quarto: *Divisor* 2a *multiplicetur per quotum radicalem* b, & *factum* $+2ab$ *membro formulæ homogeneo* 2ab *subscribatur. Fiat quoque quadratum ex* b, *quod est* $+bb$ *idque subscribatur membro formulæ homogeneo* $+bb$, *unde subtrahendo tam* $-2ab$, *ex* $+2ab$, *quam* $-bb$ *ex* $+bb$ *nihil relinquent; igitur* $a+b$ *est* $\sqrt{aa+2ab+bb}$.

SCHOLION.

185. *Hac itaque methodo universali ad numeros applicata ex quocunque numero radicem quadratam extrahere licet, ut paulo post in exemplo declaraturus sum; ante tamen, quam ad numeros descendamus, ut Tyronibus calculum faciliorem reddam, Tabulam sequentem subjicio.*

TABULA

Radicum, Quadratorum, & Cuborum in Numeris unitatum.

I.	$\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt[2]{bb}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sqrt[3]{a^3}$ *vel* $\sqrt[3]{b^3}$
II.	□ aa, *vel* bb	1	4	9	16	25	36	49	64	81	*Quadrata*
III.	*Cub.* aaa	1	8	27	64	125	216	343	512	729	*Cub.* bbb

Series I. *Continet radices tam quadratas, quam cubicas;* Series II. *Continet quadrata numerorum primæ seriei;* Series III. *Exhibet cubos eorundem numerorum primæ seriei. Sic numerus* 2 *seriei primæ est* $\sqrt[2]{}$ *de* □4 *seriei* II. & *idem numerus* 2 *est* $\sqrt[3]{}$ *de cubo* 8 *seriei* III.

PROBLEMA II.

186. PROP. *Extrahere radicem quadratam numericam.*

PARADIGMA EXTRACTIONIS $\sqrt[2]{}$.

Sit extrahenda $\sqrt[2]{}$ *ex numero* 189225.
Erit formula resolutoria $aa + 2ab + bb$.
Itaque

			18,92,25	$\left\{\begin{matrix} a\ b \\ 43\ 5 \end{matrix}\right.$
Operatio I.		$aa =$	$-16\ldots$	
		$2ab + bb = *$	$292\ldots$	$a\ b$ *novum ex operatione II.*
	Divisor	$2a = 4.2. =$	$8\ldots$	
Addend.	*duplum factum*	$2ab = 4.3.2 =$	$24\ldots$	
	quadratum	$bb = 3.3 =$	$..9..$	
	Summa subtrahenda	$2ab + bb = *$	$249..$	
Oper. II. Resid.	*auctum*	$2ab + bb =$	$*4325$	*novum pro operatione II.*
	Divisor novus	$2a = 43.2 =$	86	
Addend.	*duplum factum*	$2ab = 43\,5.2 =$	430	
	quadratum	$bb = 5\,5 =$	$.\ 25$	
	Summa subtrahenda	$2ab + bb =$	$*4325$	
		Residuum	0000	

Numerica extractio $\sqrt[2]{}$ *secundum formulam algebraicam sic procedit. Datus numerus distinguatur in classes à dextris sinistram versus, classibus singulis binas notas assignando (sinistima tamen etiam una constare potest) sit hæc classificatio per binas notas ideo, quia quadratum de* 9, *(qui*

(qui inter unitates maximus est) non excedit duas notas, est enim 9. 9 = 81, *ut patet ex Tabula; hæc classificatio ante operationem ostendit, tot notas numericas habituram radicem extrahendam, quot classes reperiuntur. Itaque operatio prima extractionis* $\sqrt[2]{}$ *(intuendo semper formulam algebraicam præfixam) eadem methodo, ut* (§. 184.) *dictum, procedit.*

I. *Cum in numero classis sinistimæ* 18 *(quem ex formula repræsentat* aa) *contineatur* □ *partis primæ radicalis* a, *quæratur in Tabula radicum in serie II. numerus quadratus æqualis, vel proxime respondens numero* 18, *qui reperitur esse* 16, *cujus superscripta radix numerica* 4 *ponatur post lunulam, voceturque* a ut in Paradigmate factum vides.

II. *Fiat ex invento numero* 4 *quadratum* aa = 4. 4 = 16, *idque subtrahatur ex* 18, *erit residuum* 2, *ad quod ex secunda classe deponantur numeri* 92, *& habebitur numerus* ✻ 292, *quem ex formula repræsentant membra formulæ,* 2ab + bb.

III. *Ut reperiatur pars altera radicis* b *dividatur* 29 *per* 2a = 4. 2 = 8, *& quotus* 3 *post lunulam positus vocetur* b, *quo reperto.*

IV. *Resolvantur termini formulæ algebraicæ* 2ab + bb, *in numeros jam inventos radicis per* a *&* b *designatos. Erit itaque* 2ab = 4.3.2 = 24, *quod factum directe scribatur infra* 29 (vide Paradigma) *fiat quoque* □ bb = 3. 3 = 9 *hoc una nota remotius versus dextram ita scribatur, ut respondeat ultimæ notæ* 2 *ex numero* 292. (vide Paradigma.)

V. *Sic collocati numeri* 2ab *&* bb, *addantur, & habebitur summa* = ✻ 249, *quæ summa* ✻ 249 *subtracta à superiore numero* ✻ 292, *relinquit residuum* 43, *ad quod residuum deponantur numeri tertiæ classis* 25, *erit summa* ✻✻ 4325 *pro secunda operatione, quem iterum ex formula algebraica repræsentant* 2ab + bb.

Notandum: Quod si summa numerica ex $2ab + bb$ subtrahi non posset à superiore numero, signum est inventum quotum b deberi minui, & cum minuto b operationes Reg. IV. & V. repetendas esse.

187. *Inchoetur II. operatio, pro qua inventi jam numeri radicis* 43 *simul vocentur* a *novum.* (vide Parad.) *Ad inveniendum itaque* b *novum.*

I. *Fiat* novus *iterum divisor ex* novo a, *qui erit* 2a = 43. 2 = 86, *per quem dividendo* 432 *reperitur quotus* 5, *qui post lunulam positus vocetur* b novum.

II. *Resolvantur iterum termini formulæ algebr.* 2ab + bb *in numeros per* a *&* b novum *indicatos, erit* 2ab = 43. 5. 2 = 430, *qui directe infra numeros* ✻✻ 432 *scribatur, &* □ bb = 5. 5 = 25, *una nota remotius juxta Reg. IV. scribatur.* Vide Parad.

III. Hi

III. Hi numeri sic collocati, & additi dant summam subtrahendam ✻ 4325, *quæ à superiore* ✻ 4325 *subtracta nihil relinquendo, indicant inventam radicem* 435 *veram, & rationalem esse numeri* 189225, *hujus rectæ inventæ radicis examen est, si* (435. +35.) *producat* 189225. *per* (§. 179.)

SCHOLION.

188. *Hac itaque methodo operationis II. semper procedendum erit cum numeris reliquarum classium, si plures fuerint, observata caute regula: quod pro subsequente quavis operatione, omnes numeri radicis per antecedentes operationes inventi, valere debeant* a novum, *solaque altera pars radicis* b, *per Regula I. II. & III.* (§. 187.) *deinceps investigando eruatur.*

PROBLEMA III.

189. PROP. *Construere formulam universalem pro extrahenda radice quavis, id est, radicem binomiam* a + b *ad datam quamvis potentiam elevare.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur $a+b$, per $a+b$, dabit productum hoc secundam potentiam, seu *quadratum*; secunda hæc potentia iterum multiplicata per $a+b$, dat *Tertiam*, seu *Cubum*; tertia iterum multiplicata per $a+b$, dat *Quartam*, & ita porro procedendum, donec *exponens* membri primi de a, & membri ultimi de b exprimat ipsam potentiam petitam, erit hæc formula universalis pro extrahenda radice petita. Q.E.F.

Resolutio hæc per ipsam genesim potentiarum demonstratur.

SCHOLION.

190. *Hac methodo constructa est sequens tabula quatuor potentiarum ex radice binomia* a + b *productarum, quas in infinitum eadem methodo continuare licet.*

√, *seu* I. Potentia $= a+b$
□, *seu* II. Potentia $= a^2 + 2ab + b^2$
Cub. *seu* III. Potent. $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
IV. Potent. $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Et ita in infinitum.

In his formulis pulcherrima, ac utilissima Theoremata, corollaria, ac praxes continentur, quas (quia referre libelli mole inhibemur) docentium explicationi, ac Tyronum attentioni, relinquimus.

PRO-

PROBLEMA IV. UNIVERSALE.

191. PROP. *Datam cujusvis potentiæ radicem numericam extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Ut habeatur formula operationum, elevetur radix binomia $a+b$ ad datam potentiam, cujus radix quæritur per (§.189.)

II. Ut propositus numerus ritè in classes distinguatur, tot notæ à dextris sinistram versus cuivis classi assignandæ sunt, quot unitates denotat exponens primi membri formulæ de a.

III. Ex classe sinistima semper subtrahatur illa potentia, quam ex formula ostendit primum membrum de a, ejus verò radix numerica scribatur post lunulam, quæ vocetur a, ad residuum sinistimæ classis, si quod fuit, deponantur numeri classis secundæ.

IV. Juxta secundum membrum formulæ algebraicæ formetur ex inventa radice numerica a divisor ad quærendum quotum, qui erit radix numerica b, qua reperta, reliqua omnia formulæ membra per a & b expressa resolvantur in numeros inventæ radicis per a & b denominatæ, ut (§.186.) dictum. *Vide Parad. subjectum.*

V. Resoluta hæc facta numerica, ita sub se invicem scribenda sunt, ut notæ dextimæ singulorum factorum una nota remotius versus dextram promoveantur. *Vide Paradigma subjectum*, hoc modo scripta hæc facta partialia addantur, addita à suprascripto numero classis secundæ, auctæ per residuum si quod fuit, subtrahantur.

VI. Sic absoluta classe secunda, eadem methodo cum classe tertia, & cæteris classibus procedendum erit, *assumendo semper pro formando novo divisore* a *omnes jam repertas (per antecedentes operationes) radices numericas,*

mericas, eæque per novum *a* denominatæ, & juxta membrum ſecundum formulæ in numeros reſolutæ, erunt *novus* diviſor pro inquirendo *novo b*, quo invento juxta *Reg. IV. & V. hujus* procedatur.

Quæ regulæ univerſales, ut clariores evadant, eas ad extrahendam radicem cubicam applicabimus, ſit itaque extrahenda $\sqrt[3]{}$ *ex numero* 14885936, *erit per* (§. 189.).

Formula algebraica,

aaa + 3aab + 3abb + bbb — *Radix* $\begin{cases} a\ b \\ 246 \end{cases}$

14,886,936

Operatio I.	*aaa* = 2.2.2. =	8 . . . . . .
	3aab + *3abb* + *bbb* =	✱6886 . . .
Diviſor	*3aa* = 2 2 . 3 =	12 . . .
Addend.	*3aab* = 4 . 2 . 2 . 3 =	48 . . .
	3abb = 4 . 4 . 2 . 3 =	-96 . . .
	bbb = 4 . 4 . 4 =	--64 . . .
	Subtrahend. =	✱5824 . . .
Operatio II.	*3aab* = *3abb* + *bbb* =	✱1062936
Diviſ. nov.	*3aa* = 24 24 . 3 =	1728
Addend.	*3aab* = 6. 24. 24. 3 =	10368
	3abb = 6. 6 24. 3 =	--2592
	bbb = 6. 6. 6 =	----216
	Subtrabendus =	✱1062936
	Reſiduum nullum =	0000000

a novum operationis II.

b novum ex operatione II.

SCHOLION.

192. *Quod ſi poſt ſubtractionem claſſis ultimæ reſiduum aliquod emergat, conſtat ex* (§. 174.) *radicem inventam non eſſe exactam, adeoque in propoſito numero dari radicem irrationalem, & ſurdam, quæ licet à vera, deficere non poſſit una unitate radicali, quia tamen hic defectus radicalis (ob multiplicationem iteratam, per quam potentiæ generantur) defectum ſæpe inſignem in potentia producit; idcirco neceſſe eſt noſſe methodum per decimales, appropinquandi ad illam unitatem radicalem ita, ut, ſi placet, ne una millioneſima parte unitatis illius aberrare contingat; itaque.*

PROBLEMA V. UNIVERSALE.

193. PROP. *Extracta radice proximè vera ex quavis potentia irrationali, approximare ad radicem veram per fractiones decimales.*

RESOLUTIO.

I. Extracta radice proximè vera per (§.191.) ad residuum ultimum addantur tot zeri, quot unitates denotat præfixæ formulæ algebraicæ exponens primi membri de *a*; *Ex.gr.* In approximatione ad radicem quadratam, addantur zeri duo, in cubica, zeri tres, &c.

II. Cum hoc residuo zeris aucto procedatur secundum Regulas IV. & V. (§ 191.) assumendo scilicet pro novo *a* totam radicem inventam, & per hanc inquirendo, juxta Reg. IV. & V. (§. 191.) in novum *b*, reperietur prima nota numeratoris, (quæ vocetur *b* novum) pro denominatore vero scribatur 10, & habebuntur partes decimæ, unitatis radicalis.

III. Ex hoc numeratore *b*, & cæteris notis per *a* novum denominatis formentur in numeris omnia membra formulæ præfixæ, *ut Regula IV. & V.* (§. 191.) *dictum*, quibus additis, & subtractis, ad residuum iterum addantur tot zeri, quot exponens in formula præfixa signat, & assumendo pro novo *a* omnes notas radicis, una cum nota numeratoris, procedatur iterum ad inquirendum novum *b*, per easdem Reg. IV. & V. (§.191.) quo reperto, & priori numeratori adjuncto, denominator augeatur uno zero, & habebuntur partes centesimæ, atque hac methodo reliquas numeratoris notas eruendo, & post singulas operationes denominatorem uno zero augendo, pervenietur tandem absoluta operatione sexta ad partes millionesimas.

In

In gratiam Tyronum subjungo approximationem ad radicem quadratam. In part. centesimis. Sit itaque extrahenda $\sqrt[2]{}$ *ex numero irrationali* 1286.

	Formula algebraica, $a^2 + 2ab + b^2$		b,b
		12,86	{ 3586
	$aa =$	9	{ ab 100
	$2ab + bb =$	* 386	a
Divisor	$2a = 3\ 2 =$	6	
	$2ab = 5.3.2 =$	30	
	$bb = 5.5 =$	·25	
	Subtrahend. $=$	* 325	
Adproximat I.	*Resid. auct. zeris*	* 6100	
Divisor	$2a = 35.2 =$	70	
	$2ab = 8.35.2 =$	560	
	$bb = 8.8 =$	64	
	Subtrahend. $=$	* 5664	
Adproximat II	*Resid. auct. zeris*	* 43600	
Divisor nov.	$2a = 358.2 =$	716	
	$2ab = 6.358.2 =$	4296	
	$bb = 6.6 =$	---36	
	Subtrahend. $=$	* 42996	
	Residuum pro approximatione III.	604	

& ita porro progrediendum.

SCHOLION.

194. *Extractio radicum, & approximatio eadem methodo peragitur in potentiis fractionum, extrahendo videlicet radicem datam tam ex numeratore, quam denominatore sic* $\sqrt{\frac{9}{64}}$ *erit* $\frac{3}{8}$. *Examen verò rectè inventæ radicis tam in integris, quam fractis est, si inventa radix elevata ad datam potentiam, una cum adjuncto residuo (si quod fuit) adæquet numerum, ex quo radix extracta est, ut tentanti in adductis supra exemplis patebit.*

PROBLEMA VI.

195. PROP. *Potentiam quamvis per exponentes expressam elevare ad aliam potentiam per exponentes indicandam.*

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentiæ elevandæ multiplicetur per exponentem potentiæ ad quam elevari debet. Q.E.F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sit a^3 *elevandum ad* 2 *potentiam, erit* $a^{3.2} = a^6$ *secunda potentia de* a^3, *sic* x^m *elevatum ad potentiam* n, *erit* x^{mn} *&* $(a+b)^3$ *elevatum ad* 3 *potentiam* $(a+b)^9$

Idem est in potentiis numericis per exponentes indicatis.

Demonstratio liquet, hæc enim multiplicatio exponentium tantum supplet vicem additionis iteratæ exponentium, quam fieri debere docuimus in multiplicatione quantitatum exponentibus affectarum in Casu III. (§.89.) nam a^3 elevatum ad secundam potentiam est $a^3.a^3 = a^{3+3} = a^6$, ergo. Q.E.D.

PROBLEMA VII.

196. PROP. *Ex data potentia per exponentes expressa, indicare per exponentes, extractam esse radicem datam quamvis.*

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentiæ dividatur per exponentem datæ radicis. Q.E.F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sit indicandum extractam esse $\sqrt[2]{}$ *de potentia* a^6 *erit* $\sqrt[2]{a^6} = a^{6:2} = a^3$, *item* $\sqrt[n]{x^{mn}} = x^{mn:n} = x^m$, *item* $\sqrt[3]{(a+b)^9} = (a+b)^{9:3} = (a+b)^3$ *&c.*

Demonstratio clara est: Extractio radicis fit per divisionem (§.191.), divisionem autem quantitatum exponentibus affectarum fieri docuimus Cas. IV. (§.198.) per subtractionem, unde sequitur divisionem hanc supplere iteratam subtractionem, sic $a^6 : a^3$, seu per suam radicem, est $a^{6-3} = a^3$, &c. Q.E.D.

SCHO-

SCHOLION I.

197. *Postrema duo Problemata usum amplissimum habent in calculo radicum irrationalium de quo, in compendio sequenti capite; nam ope horum problematum quantitates irrationales reduci possunt ad expressionem rationalium, sub qua, ut rationales tractari possunt; sic* $\sqrt[2]{a} = a^{1:2}$ *item* $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, *aut* $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ &c.

SCHOLION II.

198. *De quatuor algorithmis potentiarum jam actum est* Parte I. *sunt enim potentiæ nihil aliud, quam quantitates affectæ exponentibus, & vicissim. Hinc* Additio *potentiarum fit per Cas. I. & II.* (§ 74.) Subtractio *per* (§. 78.) Multiplicatio *per Cas. III.* (§. 89.) Divisio *per Cas. IV.* (§. 98.) *Illud hic in divisione potentiarum notandum: quod si pro quoto prodeat potentia cum exponente negativo (ut fit in casu, quo* divisoris *exponens major est exponente* dividendi) *hujusmodi potentia sit fractio, cujus numerator est* 1, *denominator verò eadem potentia, sed cum exponente positivo; sic* Ex. gr. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, *nam* Ex. gr. $a^3 : a^5 = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa}$, *sed* $a^3 : a^5 = a^{-2}$ *per Cas. IV.* (§. 98.) *ergo* $a^{-2} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$ *Sic* $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ & $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ &c.

SCHOLION III.

199. *Locus hic esset agendi de potentiis affectis, & deficientibus, ac de earundem extractione radicis, item de inventione radicum verarum, & falsarum in formulis potentiarum reductis ad nihilum, qualis est,* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *quarum singulares observationes ex earundem natura, & genesi referunt cum Carthesio, Hariotus, & cæteri Recentiores, quas, quia ii, qui ad sublimiorem Algebram perdiscendam animum adjecerint, facile ex Recentiorum Analyticorum libris petere possunt, nos (prima duntaxat principia Tyronibus tradentes) prætermittere cogimur, earumque loco calculum quantitatum irrationalium capite sequenti strictim pertractabimus, propterea, quod sine hujusmodi notitia tam Recentiorum Mathematicorum, quam Philosophorum obvii calculi intelligi nequeant. Itaque.*

CAPUT III.

De calculo quantitatum, & radicum irrationalium, seu surdarum tam simplicium, quam compositarum.

DEFINITIO VI.

200. Radices *heterogeneæ* dicuntur, quarum exponentes radicales sunt heterogeneæ, ut (§. 54.) dictum, sic heterogeneæ sunt $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[s]{a^r}$, item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[3]{18}$. Homogeneæ sunt, quæ eosdem habent exponentes radicales, sic $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{b^r}$, item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[2]{8}$.

PROBLEMA VIII.

201. PROP. *Quantitates irrationales heterogeneas reducere ad homogeneas.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sint reducendæ $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[s]{a^r}$ *erunt per* (§. 196.) $\sqrt[n]{b^m} = b^{m:n}$ & $\sqrt[s]{a^r} = a^{r:s}$ *cum itaque exponentes de* $b^{m:n}$ & $a^{r:s}$ *sint expressio fractionum habentium diversos denominatores, hos reducendo ad eundem denominatorem per* (§. 129.) *erunt* $b^{ms:ns}$ & $a^{rn:ns}$, *ergo restituendo signa radicalia erunt* $b^{ms:ns} = \sqrt[ns]{b^{ms}}$ & $a^{rn:ns} = \sqrt[ns]{a^{rn}}$, *sed* $\sqrt[ns]{}$ & $\sqrt[ns]{}$ *sunt homogeneæ per* (§. 200.) *ergo. Q. E. F. & D.*

Eadem resolutio applicata ad radices surdas numericas veritatem problematis declarat.

PROBLEMA IX.

202. PROP. *Quantitates irrationales ad expressionem simplicissimam, seu ad terminos minimos reducere.*

RESO-

RESOLUTIO.

Videatur, an quantitates irrationales in factores suos resolutæ contineant factorem unum, qui sit potentia rationalis, ejusdem potentiæ, cujus est exponens radicis præfixæ, ex hoc factore actualiter extracta radix rationalis ponatur ante signum $\surd$, altero factore manente post signum $\surd$. Q.E.F.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit reducenda $\sqrt[2]{aab}$, *quoniam* $\sqrt[2]{aab} = \sqrt[2]{b.aa}$, *erit per datam resolutionem* $\sqrt[2]{aab} = a\sqrt[2]{b}$, *item* $\sqrt[3]{abbb} = b\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt{48aabc} = \sqrt{3.16.aa.bc} = 4a\sqrt{3bc}$, *idem est in compositis, & fractis.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit reducenda $\sqrt{12} = \sqrt{3.4}$, *erit reducta* $2\sqrt{3}$, *item* $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2.8}$ *erit* $2\sqrt[3]{2}$.

SCHOLION.

203. *Quod si quantitas irrationalis, aut in factores resolvi non possit, aut nullus factorum sit potentia exponentis datæ radicis, quantitates hæ erunt irreducibiles; sic irreducibiles sunt* $\sqrt{7}$ & $\sqrt[3]{5}$, *item* $\sqrt{10} = \sqrt{2.5}$, *aut* $\sqrt{ab}$, *vel* $\sqrt[3]{aab}$.

DEFINITIO VII.

204. Si duæ, vel plures quantitates, ad expressionem simplicissimam reductæ, habentes eosdem exponentes radicales, habeant præterea eandem quantitatem post signum $\surd$ positam, quantitates hæ dicuntur *communicantes*, *Ex.gr.* $3\sqrt{2}$, & $5\sqrt{2}$, item $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[3]{b}$ &c. in aliis expressionibus dicuntur *incommensurabiles.*

PROBLEMA X.

205. *Addere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

Ante operationem reducantur per (§. 202.) ad expressionem simplicissimam.

CASUS I. Si quantitates reductæ fuerint *communicantes* (§. 204.) quantitates ante signum $\surd$ positæ addantur, ut (§. 74.) dictum, harum summa uni quantitati radicali præfixa, erit summa quæsita. Q. E. F. *Vide Exempl. I. & II. Cas. I.*

CASUS II. Si quantitates irrationales sint irreducibiles, aut *incommensurabiles*, addendæ sunt, ut quantitates heterogeneæ per Cas. II. (§. 74.) *Vide Exempl. I. & II. Cas. II.*

CASUS I. EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

$$\begin{array}{lll} \textit{Sint} \left\{ \begin{array}{l} \surd\, 4aab - \surd 9aabc \\ \surd 16aab - \surd\, aabc \end{array} \right. & \begin{array}{l} \textit{erunt} \\ \textit{reduct.} \end{array} & \begin{array}{l} 2a\surd b - 3a\surd bc \quad \textit{per} \\ 4a\surd b - a\surd bc\ (\S.\ 202.) \end{array} \\ \textit{Add.} & \textit{Summa} & 6a\surd b - 4a\surd bc \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\begin{array}{lll} \textit{Sint} \left\{ \begin{array}{l} \surd 48 - \surd 50\ \textit{seu}\ \surd 3.16 - \surd 2.25 \\ \surd 12 + \surd 162\ \textit{seu}\ \surd 3.\ 4 + \surd 2.81 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \textit{erunt} \\ \textit{reduct.} \end{array} & \begin{array}{l} 4\surd 3 - 5\surd 2 \\ 2\surd 3 + 9\surd 2 \end{array} \\ \textit{Add.} & \textit{Summa} & 6\surd 3 + 4\surd 2 \end{array}$$

CASUS II. EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

$$\begin{array}{rl} & \surd ab + a\surd b \\ & \surd cd - a\surd c \\ \hline \textit{Summa} & \surd ab + a\surd b + \surd cd - a\surd c \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\begin{array}{rl} & \surd 7 + 2\surd 3 \\ & \surd 5 - 2\surd 6 \\ \hline \textit{Summa} & \surd 7 + 2\surd 3 + \surd 5 - 2\surd 6. \end{array}$$

PRO-

PROBLEMA XI.

206. PROP. *Subtrahere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

CASUS I. Si quantitates irrationales per (§. 202.) reductæ fuerint *communicantes*, quantitates ante $\surd$ positæ subtrahantur, ut homogeneæ per (§. 78.). *Vide Exempl. I. & II. Caf. I.*

CASUS II. Si fuerint *incommenfurabiles*, tractentur ut heterogeneæ. *Vide Exempl. I. & II. Caf. II.*

CASUS I.

EXEMPLUM I. ALGEBR.

$$\begin{array}{ll} & 6a\surd b - 4a\surd bc \\ \textit{Subtrah.} & 4a\surd b - a\surd bc \\ & - + \\ \hline \textit{Refid.} & 2a\surd b - 3a\surd bc \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMER.

$$\begin{array}{ll} & 6\surd 3 + 4\surd 2 \\ \textit{Subtrab.} & 2\surd 3 + 9\surd 2 \\ & - - \\ \hline \textit{Refid.} & 4\surd 3 - 5\surd 2 \end{array}$$

CASUS II.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

$$\begin{array}{ll} & \surd ab + a\surd b \\ \textit{Subtrah.} & \surd a - a\surd cb \\ & - + \\ \hline \textit{Refid.} & \surd ab + a\surd b - \surd a + a\surd cb. \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\begin{array}{ll} & \surd 7 - 2\surd 6 \\ \textit{Subtrah.} & 2\surd 3 - \surd 5 \\ & - + \\ \hline \textit{Refid.} & \surd 7 - 2\surd 6 - 2\surd 3 + \surd 5. \end{array}$$

PROBLEMA XII.

207. PROP, *Multiplicare quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an quantitates radicales fint homogeneæ per (§. 200.) fi homogeneæ fint, multiplicentur

 quan-

quantitates ante signum positæ, per quantitates signo $\surd$ antepositas, & quantitates post signum positæ, per quantitates signo $\surd$ postpositas, ut (§. 89.) dictum. *Vide Exempl. I. II. III. & IV.*

II. Si sint heterogeneæ (§. 200.) reducantur prius ad eandem denominationem per (§. 201.) reductæ multiplicentur per Reg. I. *Vide Exempl. V.*

EXEMPLUM I. ALGEBR.

$$\text{Factores}\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b}\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\end{cases}$$

$$\text{Fact. part.}\quad \sqrt{aa}+\sqrt{ab}\;-\sqrt{ab}-\sqrt{bb}$$

$$\text{Fact.}\quad \sqrt{aa}-\sqrt{bb}=a-b$$

EXEMPLUM II. NUMER.

$$\begin{array}{l}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ \sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \hline \sqrt{9}+\sqrt{6}\\ \quad -\sqrt{6}-\sqrt{4}\\ \hline \sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2.\end{array}$$

EXEMPLUM III. ALGEBR.

$$\begin{array}{r}a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\\ c\sqrt{m}\\ \hline ac\sqrt{bm}-cc\sqrt{dm}\end{array}$$

EXEMPLUM IV. NUMER.

$$\begin{array}{r}2\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}\\ -4\sqrt[3]{5}\\ \hline -8\sqrt[3]{20}+12\sqrt[3]{10}\end{array}$$

EXEMPLUM V. ALGEBRAICUM.

Sint multiplicandi $\sqrt[n]{b^m}$ *per* $\sqrt[s]{a^r}$, *erunt reductæ per* (§.201.) $\sqrt[ns]{b^{ms}}$ & $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, & *hinc factum* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$.

Eodem modo tractandæ sunt radices numericæ heterogeneæ.

PROBLEMA XIII.

208. PROP. *Dividere quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

Si sint homogeneæ radicales (§. 200.) dividantur quantitates ante $\surd$ positæ per antepositas, post positæ per postpositas, ut (§. 98.) dictum. *V. Exempl. I. & II.*

II. Si sint heterogeneæ, reducantur prius ad homogeneas per (§. 201.) reductæ dividantur per Reg. I. *Vide Exempl. III.*

EXEMPL.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Divisor	*Dividendus*	*Quotus*

$$c\sqrt{m}\left\{\begin{array}{l} ac\sqrt{bm}-cc\sqrt{dm} \\ ac\sqrt{bm}-cc\sqrt{dm} \\ - \qquad\quad + \end{array}\right\} a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$-4\sqrt[3]{5}\left\{\begin{array}{l} -8\sqrt[3]{20}+12\sqrt[3]{10} \\ -8\sqrt[3]{20}+12\sqrt[3]{10} \\ + \qquad\quad - \end{array}\right\} 2\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}$$

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit dividendus reductus per (§. 210.) $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$ *divisor* $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, *erit* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}} : \sqrt[ns]{a^{rn}} = \sqrt[ns]{b^{ms}} = b^{ms:ns} = \sqrt[n]{b^{m}}$.

SCHOLION I.

209. *Eodem modo tractantur radices radicum, seu quantitates sub duplici signo radicali,* Ex. gr. $3\sqrt{\sqrt{2}}$, *aut* $(3+\sqrt{5})\sqrt{6}$, *modo observetur, quod quantitates aut duplici signo radicali antepositæ, aut parenthesi inclusæ, tractari debeant ut rationales; quarum calculus videri poterit apud authores infra referendos.*

SCHOLION II.

210. *Calculus radicum imaginariarum eodem modo peragitur, quo realium, modo notetur in multiplicatione, & divisione signa negativa post radicale signum posita non mutari in positiva, alias ex quantitate imaginaria, & impossibili fieri posset realis, & possibilis, quod est absurdum; hinc regulæ de signis* (§. 86. & 96.) *traditæ tantum respectu signorum ante* $\sqrt{}$ *positorum locum habent. Sic*

Si $\sqrt{-50}$ *addendæ sit ad* $\sqrt{-8}$, *erit* $\sqrt{-50}=\sqrt{-2.25}=5\sqrt{-2}$, & $\sqrt{-8}=\sqrt{-2.4}=2\sqrt{-2}$ *per* (§. 202.) & *hinc summa* $5\sqrt{-2}+2\sqrt{-2}=7\sqrt{-2}$, *id est* $\sqrt{-2.49}=\sqrt{-98}$. *Item*

Ex $\sqrt{-98}$ *subtrahendo* $\sqrt{-8}$, *erunt reductæ*, $\sqrt{-98}=7\sqrt{-2}$, & $\sqrt{-8}=2\sqrt{-2}$, & *hinc differentia* $7\sqrt{-2}-2\sqrt{-2}=5\sqrt{-2}$.

Pariter multiplicando $\sqrt{-6}$ *per* $\sqrt{-3}$ *dat factum* $\sqrt{-18}$, & *dividendo* $\sqrt{-18}$ *per* $\sqrt{-3}$ *dat quotum* $\sqrt{-6}$. *Sed & de his, cum nobis prolixioribus esse non liceat, plura ex infra citandis authoribus petenda erunt.*

SCHO-

SCHOLION III.

211. *Non ignoro celeberrimos Italiæ Analyſtas docere multiplicando, vel dividendo radices imaginarias per imaginarias, ſigna* — *mutari debere in* +, *quod ipſum* Cl. D. Martine *pluribus oſtendere conatur. Sed enim adverto, radicem imaginariam non eſſe negativam, uti nec eſt poſitiva, nam propterea impoſſibilis aſſeritur, quod nec ſit poſitiva, nec negativa; nunquam itaque intelligere poteram, ut ex quantitatibus, quæ nec poſitivæ, nec negativæ forent, quantitas produci queat poſitiva, uti aſſequi non poſſum, quo modo ex duobus entibus involventibus contradictionem, componi poſſit ens unum poſſibile.*

FINIS PARTIS II.

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS III.

De Analysi speciosa, seu arte resolvendi problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

CAPUT I.

Axiomata, Præcepta, & Praxes universales totius artis Analiticæ.

DEFINITIO I.

212. Æ*quatio*, dicitur formula algebraica exprimens per interpositionem signi $=$ certas quantitates quomodocunque affectas esse sibi invicem æquales, vel etiam æquales nihilo: *Ex.gr.* $ax+c=ab-d$, vel $3+5-2=6$, aut $ax-ab=0$.

SCHOLION I.

213. Æquationis *itaque formula exprimit quantitates omnes simul acceptas, & ante signum $=$ positas, æquales esse quoad valorem omnibus quantitatibus simul sumptis, & post signum $=$ positis, seu quod idem est, quantitates ad latus sinistrum signi $=$ positas æquivalere quantitatibus ad latus dextrum signi $=$ collocatis, ut ex hactenus dictis constat.*

SCHOLION II.

214. *Cum unicum medium, quo utitur Algebra ad resolvendas quæstiones etiam abstrusissimas, sit* Æquatio, *seu* Æqualitatis *expressio, totum artis Analyseos artificium fundatur in inventione Æquationis, & arte reducendi (per axiomata de Æqualitate quantitatum,) datam Æqua-*

Æquationem ad unum terminum incognitum, ita, ut ex una Æquationis parte obtineatur unus solus terminus incognitus liber ab omnibus aliis tam cognitis, quam incognitis terminis, ex alia vero Æquationis parte meri termini noti habeantur; quod, qua ratione rite fieri debeat, in quinque operationes artem universam resolvendi quæstiones distinguo, in quibus, si Tyro Analysta recte exercitatus fuerit, nihil tam reconditum proponi eidem poterit, cujus solutionem, harum operationum ope, daturus non esset. Prima itaque operatio Analystæ erit: I. Quæstionis propositæ accurata omnium circumstantiarum discussio, & perfecta, perspectaque propositi status quæstionis intelligentia. II. Apta & debita quantitatum, tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio. III. Inventio, & expressio Æqualitatis. IV. Reductio Æquationis, & V. Æquationis reductæ in numeros resolutio, *vel* figuræ constructio *de quibus in compendio jam specialius.*

OPERATIO I. ANALYSEOS.

215. Quæstionis resolvendæ accurata omnium conditionum, & circumstantiarum discussio.

I. *Analysta resoluturus problema aliquod, considerabit primum accurate, quis sit status quæstionis, seu quid petatur inveniendum? quo cognito.*

II. *Conditiones, & circumstantias in quæstione resolvenda appositas sedulo evolvet.*

III. *Inquiret in quantitates notas; & ignotas, quænam dentur cognitæ; quæ incognitæ lateant.*

IV. *Intelligere allaboret, quænam sit illa quantitas incognita, a cujus notitia dependet solutio problematis, & quamnam relationem quantitates cæteræ ad hanc habeant.*

V. *Quænam quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) ex ipsis conditionibus in problemate appositis, dicantur vel inter se, vel cum tertia aliqua quantitate æquales, aut saltem proportionales. His rite intellectis procedat Analysta ad operationem II.*

OPERATIO II.

216. Apta, & debita quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio.

I. *Quantitates notas per primas, ignotas per ultimas Alphabeti literas denominet, ut* (§. 4. & 5. *item* 41 42. & 43.) *dictum.*

II. *Quando occurrunt plures quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) quæ ob certam relationem ex discussione quæstionis notam,*

notam, paucioribus literis exprimi possunt, id præstat faciendum, ad facilitandam operationem Reductionis, ut si dentur duæ incognitæ, E.g. x *&* y, *constat autem* y *esse duplum de* x, *loco* y, *scribo* 2x, *item si esset* y *subduplum seu una dimidia pars de* x, *eam per* $\frac{x}{2}$ *melius denominabit Analysta, quam per* y, *&* *ita de aliis.*

III. *Denominationem factam ad latus folii aliquod scorsim & distincte, (adscriptis etiam eorum nominibus in quæstione adductis, interposito signo* = *) sibi adnotet Analysta, tum ne e memoria elabantur quantitates, pro quibus substitutio literarum facta est, tum ut Resolutio Æquationis reductæ ordinate peragatur.*

OPERATIO III.

217. Quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum in formulam Æquationis collocatio, seu inventæ æqualitatis expressio.

I *Discussis rite conditionibus quæstionis propositæ, denominatisque terminis, videatur, quæ quantitates (vel simul, vel seorsim acceptæ) dicantur æquales, aut saltem proportionales, nihil respiciendo notæne sint, an ignotæ, sed ignotas tanquam notas juxta conditiones quæstionis promiscue in æquationem ordinabit; seu quod idem est; quæstionem ex idiomate latino, vel alio quocunque, in algebraicum per signa, & hypotheses exprimendum transferet, & eloquetur Analysta; erit hæc elocutio desiderata Æquatio prima ad solutionem ope Reductionis aptanda.*

I. *Tot* Æquationes *formabit, ex conditionibus quæstionis, quot termini inveniuntur incogniti diversi, excepto casu quæstionum indeterminatarum, de quibus infra.*

SCHOLION.

218. *Quemadmodum primæ Æquationis inventio, & expressio acre, ac subtile ingenium Analystæ desiderat, quæ (utpote maximi laboris) lapis est Lydius, in quo sincerum periculum Analysta facere poterit sui met ingenii, ita habita prima Æquatione (quam tamen perspicax ingenium Analystæ ex conditionibus quæstionis propositæ haud difficile formabit) nihil facilius, quam (ope* Reductionis*) quæstionis solutionem reperire, repertamque exhibere.*

OPERATIO IV.

219. Æquationum primarum ad unum terminum incognitum, & solitarium Reductio.

Animad-

Animadvertant Tyrones Analystæ, scopum, & finem unicum hujus operationis esse, ut servato semper utriusque partis Æquationis, valore æquali, Æquatio ita transformetur per operationes contrarias, ut ex una parte terminus ignotus separatus ab omnibus aliis tam notis, quam incognitis compareat, ex altera vero parte meri termini noti, nullis ignotis permixti habeantur; quod ut recte tractent Analystæ per axiomata, & regulas paulo post referendas, sequentem regulam universalem caute velim observent, & menti imprimant, videlicet.

Quæcunque operatio cum una Æquationis parte suscipitur, eadem, & in alia Æquationis parte peragatur, *excepta* Metathesi, *ut infra declarabitur. Itaque sequentia Axiomata, in quibus Reductionis regulæ fundantur, memoriæ cumprimis mandet Analysta.*

AXIOMATA QUANTITATUM, tam Æqualium, quam inæqualium.

220. I. Idem sibimetipsi, & simile, & æquale est ut $a = a$, & $3 + 2 = 5$.

221. II. Quæ sunt æqualia uni tertio, sunt etiam æqualia inter se, ut si $a = x$, & $b = x$, erit quoque $a = b$, item si $3 + 2 = 5$, & $7 - 2 = 5$, erit etiam $3 + 2 = 7 - 2$. Et hinc

222. III. Æquale pro æquali, aut æqualia pro æqualibus substitui, & surrogari possunt, ut si $x = y$, & $y = a$, erit quoque $x = a$.

223. IV. Si Æqualibus addatur æquale, vel æqualia, manent æqualia, ut si $a = x$, & parti utrique addatur b, erit $a + b = x + b$, item si $a = x$, & $c = d$, erit etiam $a + c = x + d$.

224. V. Si ab æqualibus aufferantur, aut subtrahantur æqualia, vel æquale, manent æqualia, ut si $a = x$, & ab utraque parte aufferatur c, erit $a - c = x - c$, item si $a = x$, & $c = d$, erit quoque $a - c = x - d$.

225. VI. Si æqualia per æquale multiplicentur facta manent æqualia, ut si $a = x$, & utraque pars multiplicetur per b, erit $ab = xb$.

226. VII.

226. VII. Si æqualia dividantur per æquale, quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & utraque pars dividatur per c, erit $\frac{a}{c} = \frac{x}{c}$.

227. VIII. Si æqualia per alia æqualia multiplicentur, facta erunt æqualia, ut si $a = x$, & $c = d$, erit $ac = xd$, nam $ac = cx$, & $cx = xd$ per (§. 225.) ergo $ac = xd$ per (§. 222.). Eodem modo, si æqualia per æqualia dividantur quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & $c = d$, erit quoque $\frac{a}{c} = \frac{x}{d}$.

228. IX. Quantitates æquales elevatæ ad eundem gradum potentiæ, manent æquales, ut si $a = x$, erit $a^2 = x^2$, aut $a^3 = x^3$.

229. X. Ex quantitatibus æqualibus, elevatis ad eundem gradum potentiæ, extractæ radices ejusdem gradus, manent æquales, ut si $aa = xx$, erit $\sqrt{aa} = \sqrt{xx}$, id est, $a = x$.

230. XI. Si inæqualibus addantur æqualia, aut ab inæqualibus subtrahantur æqualia, item si inæqualia multiplicentur, dividanturve per æqualia *Summæ*, *Residua*, *Facta*, & *Quoti* manebunt inæqualia.

THEOREMATA ÆQUATIONUM.

231. I. Si duarum quantitatum inæqualium differentia, seu residuum addatur ad earundem summam, erit aggregatum æquale duplo quantitatis majoris, ut si $a > b$,

		In Numeris sit	$12 > 4$
Erit summa	$= a + b$	*Erit summa*	$12 + 4 = 16$
Differentia	$= a - b$	*Differentia*	$12 - 4 = 8$
Aggregatum	$= 2a$	*Aggregatum*	$12 + 12 = 24$

232. II. Si verò à summa duarum quantitatum inæqualium, subtrahatur differentia, erit residuum æquale duplo minoris, ut si $a > b$,

		In Numeris sit $12 > 4$
Erit summa	$= a + b$	*Erit summa* $= 12 + 4 = 16$
Differentia	$= a - b$	*Differentia* $= 12 - 4 = - 8$
Subtrahendo —	$+$	*Subtrahendo* — $+$ 8
Residuum	$= 2b$	*Residuum* $= 4 + 4 = 8$

233. III. Si ad semisummam duarum quantitatum inæqualium addatur semidifferentia, erit aggregatum æquale quantitati majori, ut si $a > b$ erit

$$\textit{Addend.}\left\{\begin{array}{l}\textit{semisumma} = \frac{a+b}{2} \\ \textit{semidifferentia} = \frac{a-b}{2}\end{array}\right. \text{ \& hinc aggregatum per}$$

$$(\S.\ 136.)\ \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a \quad \textit{per } (\S.\ 36.)$$

In Numeris sit $12 > 4$

$$\textit{erit semisumma} = \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\textit{semidifferentia} = \frac{12-4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \textit{sed } 8 + 4 = 12$$

$$\textit{seu } \frac{12+4+12-4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \quad \textit{per } (\S.\ 125)$$

234. IV. Si à semisumma duarum quantitatum inæqualium subtrahatur earundem semidifferentia, erit residuum æquale quantitati minori, ut si $a > b$,

$$\textit{erit semisumma} = \frac{a+b}{2}$$

$$\textit{semidifferentia} = \frac{a-b}{2}$$

$$\textit{seu subtrahendo} = \frac{-a+b}{2} \quad \textit{sed } \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

Idem patet in numeris, si pro literis numeri substituantur, ut in priori Exemplo $12 > 4$.

Ultima quatuor axiomata magnum habent usum in formanda prima Æquatione, de qua (§ 217.) dictum.

SCHO-

SCHOLION.

235. *Axiomatibus his rite intellectis, & memoria retentis, sequentes Reductionum regulas fundatas in axiomatibus, familiares sibi reddat Tyro Analysta, id universaliter notando: quod quemadmodum Medici calida frigidis, frigida calidis, id est contrariis tollere in more habent, ita Analystæ, ut terminum in Æquatione incognitum, seu quæsitum reddant notum ope Reductionis, quidquid eidem, & ex illius parte in Æquatione adhæreat, per contrarias operationes in utraque parte Æquationis instituendas, tollunt. Sunt autem operationes contrariæ,* Additio & Subtractio *per* (§.19.) *aut eorum loco* Metathesis, *item contrariæ sunt* Multiplicatio & Divisio *per* (§. 34.) *item inter contrarias sunt, elevatio radicis ad potestatem, & ex potestate radicis extractio; atque per ejusmodi contrarias operationes (quæ in regulis reductionum continentur) Æquationem tamdiu reducit Analysta, donec ex una Æquationis parte solus terminus ignotus, ex altera verò meri cogniti quomodocunque affecti habeantur.*

REGULÆ
REDUCTIONUM ANALYTICARUM
Æquationis solitariæ.

236. *Æquationem solitariam voco, in qua incognitus unus est, vel si plures, ii sint homogenei, ut si sit* $8x + a = ad - c$.

Reg. I. Si ex parte termini ignoti compareant termini noti per *additionem*, seu signum + conjuncti, ii tollendi sunt per *Subtractionem*, & quidem in utraque parte æquationis faciendam per (§.224.) ut si sit $4x + b = a$, subtrahendo ab utraque parte b, erit $4x + b - b = a - b$, hoc est $4x = a - b$ per (§. 20.)

Reg. II. Si ex parte termini ignoti inveniatur terminus notus per *Subtractionem*, seu signum — connexus, is tollendus est per *Additionem* ejusdem termini in utraque parte æquationis instituendam, ut si sit $3x - c = ab$, addendo utrique parti $+c$, erit $3x - c + c = ab + c$, hoc est $3x = ab + c$.

Reg. III. Loco reductionis per binas nunc traditas regulas instituendæ, ab exercitatis Analystis adhibetur figura *Metathesis*, quæ est translatio terminorum quorumvis ex una Æquationis parte in alteram mutatis ſignis in contraria; eſt hic Modus per Metatheſim operandi admodum compendioſus, utpote vicem binarum antecedentium regularum ſæpius repetendarum unica terminorum translatione ſupplens. Sic ſi detur $4x+b=a$, erit per Metatheſim $4x=a-b$, item $3x-c=ab$, per Metatheſim $3x=ab+c$, aut $5x-c+b+d=ac$ per *Metatheſim* erit $5x=ac+c-b-d$.

Hac figura Metatheſeos nos ſemper utemur, quotiescunque terminos per additionis, aut ſubtractionis ſigna affectos ex una parte Æquationis ſublatos voluerimus.

Reg. IV. Si termino ignoto adhæreat aliquis terminus notus per hypotheſim *multiplicationis* expreſſus, is tollendus eſt per *diviſionem*, dividendo ſcilicet per terminum notum, adhærentem ignoto, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per hunc diviſi non ſunt, ut ſi ſit, $ax=bc$ erit $\frac{ax}{a}=\frac{bc}{a}$ hoc eſt $x=\frac{bc}{a}$ per (§.36.) item ſi ſit $ax+bx=ad+c$, erit $\frac{ax+bx}{a+b}=\frac{ad+c}{a+b}$ hoc eſt $x=\frac{ad+c}{a+b}$ per (§.103.)

Reg. V. Si termino ignoto adhæreat terminus notus per hypotheſim *diviſionis* expreſſus, is tollendus eſt per *multiplicationem*, multiplicando videlicet per terminum notum adhærentem, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per illum terminum diviſi non ſunt, ut ſi ſit $\frac{x}{a}+b=c$, erit $\frac{ax}{a}+ab=ac$, hoc eſt $x+ab=ac$ per (§.36.) & per Metatheſim $x=ac-ab$.

Reg. VI. Quod ſi occurrat Æquatio, in qua *omnes termini* per eandem aliquam quantitatem multiplicati, vel diviſi ſunt, ea quantitas ſimpliciter deleri poteſt; ut ſi ſit $ax+ac=ad$, erit $x+c=d$, item ſi ſit $\frac{x+c}{a}=\frac{d+b}{a}$, erit $x+c=d+b$ per Axiom. (§.226.)

Notent

Notent Tyrones: Analystis in more esse, in casu, quo per multiplicationem, aut divisionem notum ab ignoto tollunt, compendii gratia, delendo simplicetur per (§. 104.) terminum notum ignoto adhærentem, reliquos verò per illum multiplicatos, aut divisos indicare, ut si Æquatio sit $ax - bx = dc$ *statim eam ita exprimunt* $x = \frac{dc}{a-b}$, *item hanc* $\frac{x}{a} = c$, *ita* $x = ac$.

Reg. VII. Si terminus ignotus sit elevatus ad potentiam, ex illo, & cæteris terminis in utraque parte Æquationis repertis, extrahenda est radix ejusdem gradus, cujus est potentia, ut si sit $xx = bb$, erit $\sqrt{xx} = \sqrt{ab}$, hoc est, $x = \sqrt{ab}$, verum de hujusmodi reductione alibi fusius.

Reg. VIII. Si terminus ignotus sit affectus signo $\sqrt{}$, is, & cæteri utriusque partis in Æquatione termini elevandi sunt ad gradum ejus potentiæ, quem indicat exponens radicis, & tum signum $\sqrt{}$ termino ignoto præfixum ommittitur, ut si sit $\sqrt[2]{x} = ab$, erit $x = a^2b^2$, sed, & de his suo loco prolixius.

Reg. IX. Si in utraque parte Æquationis compareat idem terminus ignotus quomodocunque, affectus, tum, minor ignotus ad partem majoris (si major sit positivus) per Metathesim transferendus est, ut si sit $5x = ab + 2x$, erit per Metathesim $5x - 2x = ab$, seu $3x = ab$, è contra, si major ignotus sit negativus, ad partem minoris per Metathesim transferatur, ut si sit $2x = ad - 4x$, erit $2x + 4x = ad$, seu $6x = ad$.

Reg. X. Tyrones Analystas sæpe multum juvat reductio Æquationis ad *nihilum*. Fit hæc reductio (ope Metathesis) transferendo omnes terminos tam notos, quam ignotos ad partem illam Æquationis, in qua habetur major terminus ignotus positivus, aut contra, ad partem minoris, si major sit negativus, ut si sit $10x - c - b = a + 4x - cx$,
erit $10x - c - b - a - 4x + cx = 0$,
hoc est $6x - c - b - a + cx = 0$, dein iterum (per

Metathesim) omnes notos transferendo, erit $6x + cx = a + b + c$, & dividendo per $6 + c$, erit $x = \frac{a+b+c}{6+c}$ per Reg. IV.

Reg. XI. Si qui termini sint, qui se invicem destruere, vel per additionem, aut subtractionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt, ut si sit $x + x + b + x + c = a$, erit $3x + b + c = a$, & per Metathesim $3x = a - b - c$, & dividendo per 3, erit $x = \frac{a-b-c}{3}$ per Reg. IV. Item si sit $5a + 3x = 5b - 3a + 2x$, erit reducendo ad nihilum (per Regul. X.) $5a + 3x - 2x + 3a - 5b = 0$, seu $x + 8a - 5b = 0$, & per Metathesim $x = 5b - 8a$.

Reg. XII. Si occurrant termini (seu noti sint, seu ignoti) expressi per fractiones diversæ denominationis, reducendi sunt illico ad eandem denominationem, ut si sit $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - c = x$, erunt reductæ per (§. 129.) $\frac{12x + 8x + 6x}{24} - c = x$, seu $\frac{26x}{24} - c = x$, & multiplicando per 24, erit $26x - 24c = 24x$, & per Metathesim $26x - 24x = 24c$, seu $2x = 24b$, & dividendo per 2, erit $x = \frac{24c}{2} = 12c$.

Cætera suis locis, & oretenus plura.

OPERATIO V.

237. Æquationis ad unum incognitum, & ab omnibus notis liberum reductæ, in numeros *Resolutio*, vel figuræ *Constructio*.

I. *Cum solutio quæstionis per ipsam Æquationem obtineatur, in qua terminus ignotus ex una Æquationis parte omnino solus, & liber ab omnibus aliis comparet, ex alia vero parte meri termini noti habeantur, nihil amplius laboris Analystæ super est, quam (si quæstio per numeros solvi debet) ut literæ in valores suos numericos, pro quibus in Operatione II. substitutæ sunt, juxta expressionem Æquationis reductæ solvantur, ut si foret*

Æquatio

Æquatio reducta, $x = \frac{a-b-c}{3}$, *& literæ substitutæ fuissent (per Operationem II.) loco numerorum*, Ex. gr. *si fuisset* $a = 485$, $b = 10$, *&* $c = 25$, *erit Resolutio* $x = \frac{485-10-25}{3}$, *hoc est* $x = \frac{450}{3}$, *seu* $x = 150$.

Si vero Æquatio resolvenda sit in lineas, facienda est figuræ constructio, *ut in Geometria docebitur.*

II. *Invento valore termini ignoti, videat Analysta, an substituto loco termini ignoti valore invento, conditionibus propositæ quæstionis satisfiat, si ita, quod semper rite operantibus evenit, non sine voluptate animi virtutem Analyseos admirabitur; secus (si quæstio non fuit impossibilis) errorem se admisisse, deprehendet.*

SCHOLION.

238. *His Regulis universalibus, & in abstracto declaratis, cum Tyro Analysta aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæstionibus primum quidem simplicioribus, dein magis reconditis, & subtilioribus ad Æquationem redigendis, reducendisque tentet, quibus rite applicandis (in sequentibus capitibus) qua licet brevitate, exemplis prælucebo, ac præmissis adhuc quibusdam scitu necessariis, veluti manuducam, identidem commonendo, si cætera mathemata frequentem exercitationem desiderant, eam certo in quæstionum, & problematum resolutionibus cumprimis sedulam esse oportere, propterea, quod Ars Analytica non tam verbis, quam ipsamet praxi quotidiana, & formularum contemplatione seria, mentisque ad operationes acri adversione condiscatur, nec laboris unquam pœnitebit, cum novis inventis (veluti totidem ingenii partubus felix) eruditum orbem, non sine sincera animi voluptate, ad DEI Gloriam, locupletabit.*

CAPUT II.

Analysis Problematum simplicium, & determinatorum, uno incognito affectorum.

DEFINITIO II.

239. Omne Problema, aut Quæstio est vel *possibilis*, vel *impossibilis*; *Possibilis* dicitur, cujus conditiones inter se non pugnant, adeoque solutionem admittunt, ut, si quæratur dimidium de numero 6; est enim numerus 3. *Impossibilis* est, cujus conditiones,

aut ſibi opponuntur contradictorie, aut unam impoſſibilem involvunt, ut, ſi quæratur dimidium de numero 6, hac adjecta conditione, ut id dimidium ſit numerus par; cum enim dimidium de numero 6, tantum ſit numerus 3, qui par eſſe nequit, conditio adjecta quæſtionem reddit impoſſibilem.

SCHOLION.

240. *Quæſtionis impoſſibilitas, ſi ea ex conditionibus in quæſtione appoſitis non illico reluceat per Reductionis regulas manifeſta redditur, ſi enim terminus incognitus in Æquatione reducta evadat negativus, hoc eſt, ſi ſit æqualis meris cognitis negativis, aut, ſi ſit æqualis radici imaginariæ, problema propoſitum Analyſta pronunciabit eſſe practice impoſſibile, ut ſi foret* $x = -4$, *aut* $x = \sqrt{-aa}$.

DEFINITIO III.

241. Problema poſſibile aliud eſt *determinatum*, aliud *indeterminatum*; *Determinatum* dicitur, in quo tot habentur conditiones, quot quantitates ignotæ, ſeu quando (diſcuſſis conditionibus) tot formari poſſunt Æquationes primariæ, quot ſunt incogniti diverſi. *Indeterminatum* appellatur, cujus pauciores reperiuntur conditiones, quam quantitates diverſæ incognitæ. His accedit problema *plusquam determinatum*, quando plures conditiones apponuntur, quam ſint incognitæ, quod ultimum plerumque evadit impoſſibile, ſi adjectæ conditiones ſuperfluæ ſint inter ſe pugnantes.

COROLLARIUM I.

242. Determinata problemata, determinatum etiam numerum ſolutionum admittunt; Indeterminata, quam plurimos Solvendi modos habent, ut patebit inferius.

COROLLARIUM II.

243. Quando problema eſt determinatum, plures incognitæ ad unum reduci poſſunt, in Indeterminatis plures ignotas remanere eſt neceſſe. quarum una, aut altera (arbitrio Analyſtæ) determinanda eſt, per quam cæteræ determinentur, ut ſuo loco dicetur.

DEFI-

DEFINITIO IV.

244. Problemata tam determinata, quam indeterminata, alia sunt *simplicia*, *composita* alia. Simplicia sunt, cujus incognitus est *unius dimensionis*, id est, ad nullam potentiam elevatus, ut si sit $x = ab$. Composita dicuntur, quorum incognitus est duarum, vel trium, aut plurium dimensionum, id est, ad potentiam secundam, tertiam, &c. elevatus, ut si sit $xx = ab$, aut $x^3 = ac$.

SCHOLION.

245. *Problemata tam simplicia, quam composita quandoque affecta sunt incognitis homogeneis tantum, quandoque vero pluribus ignotis heterogeneis permiscentur, de quibus suo loco specialius; hoc capite problematibus simplicibus determinatis, & uno, vel pluribus incognitis homogeneis affectis, ad praxim Analyseos Tyrones manuducam. Sit igitur Resolvendum.*

PROBLEMA I.

Sempronius Parens condito testamento legavit ternis filiis suis *Mathiæ*, *Stephano*, & *Alexio* summam aureorum 485, his conditionibus partiendam, ut *Stephano* natu medio, tot aurei obvenirent, quot *Mathiæ* natu maximo, & præter hos, 10 aureos plures censeret *Stephanus*, quam *Mathias*. *Alexius* quoque totidem, quot *Mathias*, & insuper adhuc 25 aureos obtineret.

Quæritur Legatum singulorum?

OPERATIO I.

Juxta regulas (215.) *discutiendo statum quæstionis, & conditiones appositas, intelligo* Primo: *Quæsitum hujus esse, ut singulorum filiorum legata summa reperiatur.* Secundo: *Clarum fit, si summam particularem* Mathiæ *legatam, notam haberem, jam quoque reliquorum legata in aperto essent, cum tam* Alexius, *quam* Stephanus *(demptis* 10, *&* 25 *aureis supererogatoriis) eundem cum* Mathia *aureorum numerum percipere debeant.* Tertio: *Video, præter* 485 *aureos, dari notos terminos* 10, *&* 25 *aureos.*

His rite intellectis procedatur ad denominationem:

OPERATIO II. DENOMINATIO.

Sit summa Legata 485 $=a$, *aurei* 10 $=b$, *aurei* 25 $=c$, *erit juxta conditiones problematis.*

Legatum natu maximi, seu Mathiæ $=x$
- - - *natu medii, seu* Stephani $=x+b$
- - - *natu minimi, seu* Alexii $=x+c$

Facta rite hac denominatione progrediendum est ad elocutionem quæstionis Algebraicam, seu ad formandam Æquationem, quam conditiones ipsiusmet quæstionis suppeditant. Intelligo enim singulorum filiorum legata particularia, in unam summam collecta, adæquare debere totam summam legatam, id est, legatum x Mathiæ, *plus legato* $(x+b)$ Stephani, *plus legato* $(x+c)$ Alexii, *adæquat summam totalem* a. *Quam Æquationem inventam eloquendo algebraice. Sic exprimo:*

OPERATIO III. ÆQUATIONIS EXPRESSIO.

$$x+x+b+x+c=a.$$

Hanc Æquationem juxta Regulas Operat. IV. (§. 236.) *de Reductione datas, tractando, reducere tamdiu debeo, donec obtineatur Æquatio, seu formula, in qua ex una parte Æquationis terminus ignotus* x *omnino solus, ex altera vero parte meri cogniti habeantur. Itaque.*

OPERATIO IV. REDUCTIO.

Per Reg. XI. (§. 236.) *reducitur ad hanc;* $3x+b+c=a$
& per Metathesim juxta Reg. III. erit - $3x=a-b-c$
dein per Reg. IV. dividendo utramque partem per 3 } *erit* - - - $\frac{3x}{3}=\frac{a-b-c}{3}$
hoc est per (§. 104.) - - - - - - - - $x=\frac{a-b-c}{3}$

Cum habeatur x *reductum, & solitarium ex una, ex altera vero parte meri cogniti, solutio quæstionis in aperto est; si termini noti Æquationis ultimæ juxta expressionem datam in numeros (pro quibus literæ substitutæ sunt) resolvantur. Erit itaque*

OPERATIO V. ÆQUATIONIS REDUCTÆ RESOLUTIO.

$x=\frac{485-10-25}{3}$, *hoc est* $x=\frac{450}{3}$, *seu* $x=150$.

Sunt

Sunt ergo Legata Particularia.

Legatum natu maximi, seu Mathiæ	$x = 150$,	*hoc est*		$= 150$
- - - *natu medii, seu* Steph.	$x + b = 150 + 10$			$= 160$
- - - *natu minimi, seu* Alexii	$x + c = 150 + 5$			$= 175$
Summa omnium	$3x + b + c = 450 + 35$			$= 485$

Quæ summa cum adæquet totam à Sempronio *Parente legatam summam* 485 *aureorum, quæstionem recte solutam esse demonstrat.*

SCHOLION.

246. *Præluxi Tyronibus exemplo facillimo fuse deducto, quo viam commonstrarem, qua deinceps intellectum circa artem Analyticam, in quæstionibus difficilioribus ratiocinando exercere valeant; reliqua enim exempla (supponendo ratiocinium Analyticum) via brevissima resolvemus; Id interea velim notent Tyrones, me iisdem fidelem suasorem esse, ut, tametsi hujusmodi quæstiones resolutionum numericarum, per Algebram numerosam (id est, non substituendo literas pro numeris) tractari possint, & a plerisque tractentur Analystis, Praxim eorum minime sequantur, verum semper literas pro numeri substituendas suadeo, propterea, quod ultimæ resolutionum formulæ literis expressæ, utpote universales, medium, & instrumentum sint Theorematum, & regularum reperiundarum, ut patebit alibi; dein, id commodi præterea habent literæ, quod earum ope molestissimæ cæteroquin numerorum reductiones evitentur, viaque brevissima scopum obtineamus; accedit, quod aptos reddant Tyrones Geometriam ope Algebræ tractandi, veramque scientiam, quæ ideis universalibus comparatur, adipiscendi.*

PROBLEMA II.

Cum aliquando in Macedonum colloquio mentio de singulorum ætate incidisset; Ego, inquit *Alexander*, *Ephestionem* meum antecedo annis 4; at *Clytus*, ego vero amborum vestrorum ætatem vivo; Tum *Calisthenes*: jucunda est mihi, ô Rex! isthæc ætatum commemoratio, Patris enim memoriam renovavit, qui cum annos vixisset 72, trium vestrum ætates compleverat.

Quæstio hæc priori simillima, & eodem modo resolvenda, proponit quærendas singulorum ætates. Fiat itaque discussis conditionibus apta denominatio.

Sint

Sint anni $4=b$, *anni* $72=a$
ſitque ætas Epheſtionis $= x$
erit ætas Alexandri $= x+b$
ætas Clyti $=2x+b$

Itaque quæſtionem algebraice eloquendo, ex conditionibus appoſitis habebitur Æquatio:

$$x+x+b+2x+b=a$$

hoc eſt per Reg. XI. - - - - - $4x+2b=a$
& per Metatheſim - - - - - - - $4x=a-2b$
& per Reg. IV. divid. per 4, *erit* - - - $x=\frac{a-2b}{4}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x=\frac{72-8}{4}$, *hoc eſt* $x=\frac{64}{4}$, *ſeu* $x=16$

Eſt igitur ætas Epheſtionis	$x=16$, *hoc eſt*		$=16$
ætas Alexandri	$x+b=16+4$		$=20$
ætas Clyti	$2x+b=32+4$		$=36$
Summa ætatum -	$4x+2b=64+8$		$=72$

Recte igitur ſoluta quæſtio.

PROBLEMA III.

Pythagoras Philoſophus interogatus, quotnam haberet diſcipulos? Reſpondit: Dimidia pars meorum diſcipulorum Philoſophiæ operam navat, pars quarta Matheſim audit, ſeptima ſilentium tenet, adſunt præter hos 3 novitii ſacris noſtris mox initiandi.

Quæritur numerus omnium Diſcipulorum, quo reperto innoteſcit quoque numerus Philoſophorum, Mathematicorum, & ſilentium tenentium. Itaque

Sint novitii $3=a$, *ſumma omnium diſcipulorum* $=x$ *habebuntur ex conditionibus quæſtionis.*

Philoſophi $=\frac{x}{2}$, *Mathematici* $=\frac{x}{4}$, *Silentes* $=\frac{x}{7}$

Hos terminos juxta conditionem quæſtionis in Æquationem ordinando.

Erit Æquatio prima: $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+a=x$

Et

Et reducendo fractiones ad eundem denominatorem.

Erit per Reg. XII. (236.) $\frac{28x + 14x + 8x + a}{56} = x$

hoc est per Reg. XI. - - - - - - - $\frac{50x + a}{56} = x$

Multipl. per 56 *erit per Reg. V.* $50x + 56a = 56x$

& per Metathesim - - - - $56a = 56x - 50x$

hoc est - - - - - - - - - $56a = 6x$

& divid. per 6, *erit per Reg. IV.* $\frac{56a}{6} = x$

RESOLUTIO.

$\frac{56a}{6} = \frac{56 \cdot 3}{6} = \frac{168}{6} = 28$, *hoc est* $28 = x$

Fuere itaque Discipuli Pythagoræ universim 28

Et hinc Philosophi $\frac{x}{2} = \frac{28}{2} = 14$

Mathematici $\frac{x}{4} = \frac{28}{4} = 7.$

Silentes $\frac{x}{7} = \frac{28}{7} = 4.$

Novitii $= a = 3.$

Summa omnium - $= 28.$

Eodem modo tractantur quæcunque quæstiones, in quibus fracti habentur; notent Tyrones, primam omnium operationum esse debere reductionem ad eundem denominatorem.

CAPUT III.

Resolutio Problematum in quibus plures occurrunt incogniti heterogenei.

Præter cætera hucusque dicta, noverint Tyrones artem totam hujusmodi Problemata solvendi (si determinata sint) in eo versari, ut incogniti, præter unum, eliminentur, & exterminentur omnes, in Indeterminatis vero tot, quod possunt eliminari.

Obtinetur autem hæc eliminatio duobus modis:

247. I. Eliminatio obtinetur per substitutionem Æqualis pro Æquali, juxta Axioma III. (§. 222.)

(§. 222.), ut si dentur Æquationes: Prima, $y + 1 = 2x - 2$, & altera $y - 1 = x + 1$, velimus autem eliminatum y, reducantur ambæ Æquationes ad y solitarium juxta regulas reductionum,

Erit prima per Metathes. $y = 2x - 3$
secunda per Metathes. $y = x + 2$, *& hinc per Axioma III.* (222.) *substituendo loco* y *alterutram, erit* $x + 2 = 2x - 3$, *in qua eliminatus habetur terminus* y.

248. II. Eliminari potest per Additionem, aut Subtractionem totius Æquationis unius à tota Æquatione altera, sed prius per Reductionem ad destructionem unius termini ignoti rite præparata, ut sit Prima, $x + y = a$, secunda $8x + 4y = b$, cupimus autem eliminatum y, quod cum in *secunda* multiplicatum per 4 compareat, *primam* per numerum 4 multiplicando aptare necesse erit.

Eritque prima - - - - - - - - $4x + 4y = 4a$,
quæ jam sic aptata si subtrahatur, nempe à secunda $8x + 4y = b$
Primam subtrahendo - - - - - - - - $4x + 4y = 4a$
$\quad - \quad - \quad -$

erit Residuum - - - - - - - $4x = b - 4a$
in qua y *eliminatum habetur.*

SCHOLION.

Utra Methodus alteri præferenda sit, definire non licet, sed exercitato Analystæ jam hanc, jam alteram circumstantiæ quæstionis usurpandam suadebunt. Itaque

PROBLEMA I.

Euclidis Geometrarum Principis Ænigma, quod Geometris olim proposuisse fertur, sic habet: Ibant, inquit *Mulus*, & *Asina* vinum portantes, *Asina* ex dolore ponderis ingemiscebat, quo audito, *Mulus*: chara mater, inquit, quid ita lamentaris? mensuram mihi unam si dederis, duplo tunc plus, quam tu sustulero; sin tu à me unam acceperis, idem, quod ego, pondus feres. *Onus igitur utriusque peritissime Geometra edicas volo.* Itaque *Discessu*

Discussis rite conditionibus, ac probe intellectis verbis Muli, fiat denominatio, sitque numerus mensurarum vini, quem gestat Mulus $= y$
Numerus mensurarum Asinæ $= x$
jam ex conditione prima Muli; si Asina det Mulo unam mensuram, habebit Mulus $y + 1$, *& Asina habebit* $x - 1$, *cumque* $y + 1$ *dicatur esse duplum de* $x - 1$, *ut Æquatio habeatur, multiplicetur* $x - 1$ *per* 2, *erit* $2x - 2$ *duplum de* $x - 1$, *adeoque* $2x - 2$ *æquale* $y + 1$, *hoc est* $y + 1 = 2x - 2$,
seu per Metathes. - - $y = 2x - 3$ A

Item ex secunda conditione; si Mulus det Asinæ unam mensuram, habebit Mulus $y - 1$, *& Asina* $x + 1$, *sed tunc dicuntur habere uterque Æquales numero mensuras,*
ergo - - - $y - 1 = x + 1$
per Metathesim - - $y = x + 2$ B
sed etiam in Æquat. A *erat* $y = 2x - 3$ A
Ergo per Axioma III. (§. 222.) $x + 2 = 2x - 3$,
in qua eliminatum est y
itaque per Metathesim - - $3 + 2 = 2x - x$ *hoc est* $5 = x$

RESOLUTIO.

Inventus est valor $x = 5$, *sed in Æquatione* B *est* $y = x + 2$, *ergo* $y = 5 + 2$. *Igitur* Mulus *habuit mensuras* $y = 7$,
Asina $x = 5$.

Nam Primo: *si* Asina *portans* 5 *mensuras det unam* Mulo *portanti* 7, *habebit Mulus* $7 + 1$, *hoc est* 8, *& Asina habebit* $5 - 1$, *hoc est* 4, *sed* 8 *est duplum de* 4, *ergo prima conditio impleta habetur.*

Secundo: *Si Mulus habens* 7 *mensuras det Asinæ* 5 *portanti, unam; habebit Mulus* $7 - 1$, *hoc est* 6, *& Asina* $5 + 1$, *hoc est etiam* 6, *seu numero Æquales, quæ erat secunda conditio.*

PROBLEMA II.

Cauponæ Præfectus, vini partim generosi, partim debilioris urnas complures cellario suo intulit, lucrum justum facturus, si urnas singulas vini generosi pretio 42 grossorum, urnam vero debilioris 27 grosf. venumdaret; at enim vinum generosius, quia pretii majoris; debilius, quia gustui minus gratum, suis pretiis distrahere nequit, cupit itaque vina hæc commiscendo vas 100 urnarum implere, hac conditione, ut urnam vini mixti grossis

grossis 30 (pretio nempe inter 42 & 27 groff. medio) venumdando, idem lucrum reportaret, quod obtineret, si purum distrahere potuisset; *Idcirco, ne vel se, vel emptores falleret, scire desiderat, quot urnæ vini generosi, quotque debilioris accipiendæ sint, ut vini misti emergant urnæ 100, quarum singulæ 30 grossis distrahantur.*

Discussis rite conditionibus, fiat Denominatio.

Sit pretium urnæ vini generosi - - 42 *groff.* $= a$
pretium debilioris - - 27 *groff.* $= b$
Pretium medium vini misti - - - 30 *groff.* $= c$
Vas vini mixti urnarum - - - - 100 $= d$
Urnæ accipiendæ ex vino generoso - - - - $= x$
- - - *ex vino debiliore* - - - - $= y$

Ergo ratione numeri urnarum juxta conditionem Problematis primam.

Erit Æquatio prima hæc - - $x + y = d$
& per Metathesim - - - - - $x = d - y$ A

Jam vero ratione pretii per conditionem secundam.

Erit Æquatio secunda - - $ax + by = dc$
& per Metathesim - - - - $ax = dc - by$
& devidendo per a, erit - - $x = \frac{dc - by}{a}$ B

sed etiam in Æquat. Prima A, *est* - $x = d - y$
Ergo in Æquat. B *substituendo loco x valorem æqualem* $d - y$
Erit per Axioma III. (§. 222.) - $d - y = \frac{dc - by}{a}$

& multiplicando per a, erit - - $ad - ay = dc - by$
per Metathesim - - - - $ad - dc = ay - by$
denique dividendo per $a - b$, *erit* - $\frac{ad - dc}{a - b} = y$

Resolutio in Numeros.

$y = \frac{(42.\,100) - (100.\,30)}{42 - 27}$, *hoc est* $y = \frac{4200 - 3000}{15} = 80$

Itaque $y = 80$ *urnæ*, { *Nam in Æquat.* A, *est* $x = d - y$,
& $x = 20$ { *seu* $x = 100 - 80 = 20$.

Summa $x + y = 100$ *urnæ.*

Jam

Jam 100 *urnæ vini mixti (urnam per* 30 *groff. vendendo) faciunt* 3000 *groffos.*

Sed etiam 80 *urnæ per* 27, *faciunt* 2160 *groff.*
& 20 *urnæ per* 42, *faciunt* 840 *groff.*
feu fimul addend. 3000 *groff.*

Ergo habetur impleta fecunda conditio.

SCHOLION I.

253. *Hujusmodi Problema, vocatur* Mixtionis, *vel* Alligationis, *habetque ufum, & utilitatem ampliffimam in Oeconomicis, Phyficis, Pharmaceuticis, Chymicis &c. & univerfim in cafu omni, quo duo mifcibilia diverfi valoris, aut ponderis commifcenda funt, ita, ut emergat mixtum defiderati valoris, pretii, virtutis, probitatis, aut ponderis medii; ut* Ex. gr. *Si mifceri debeat frumentum, vina, medicinæ, merces, diverfa liquida chymica, item metalla &c. ad obtinendum mixtum valoris medii. Hinc Tyro Analyfta ultimam Æquationem* $\frac{ad-dc}{a-b}=y$ *memoria retinens, omnem hujusmodi quæftionem* (duorum nempe mifcibilium) *facile folvet, fi in propofita quavis quæftione, eandem noftram denominationem retineat, id eft, fi rem datam majoris pretii vocet* a, *viliorem* $=$ b, *mediam* $=$ c, *quantitatem datam mixti componendi* $=$ d, *quantitatem denique ex viliore accipiendam* $=$ y, *quibus denominatis, hanc formulam* $\frac{ad-dc}{a-b}=y$, *in numeros propofitæ quæftionis refolvendo, folutionem cujusvis quæftionis illico reperiet, ut tentanti patebit.*

SCHOLION II.

254. *Hæc formula* $\frac{ad-dc}{a-b}=y$ *eft celebris illa Regula Arithmeticorum, quam* Mixtionis, *five* Alligationis *nomine compellantes, licet fufe declarare conentur, nunquam fatis ad captum demonftrant. Cæterum notent Tyrones, hoc, & pleraque problemata, quæ vulgo per duos incognitos diverfos (caufa exercitii) refolvuntur, unico incognito ab exercitatis Analyftis plerumque folvi. Sic in priori Problemate, fi numerus urnarum vini debilioris vocetur* y, *loco* x *(numeri nempe urnarum generofioris) poni poteft* d $-$ y, *quod ipfum Æquatio prima* A, *attentum Analyftam edocet. Reliqua mixtionum problemata, ad quæ plura, quam duo mifcibilia ingrediuntur, ad problemata indeterminata pertinent, de quibus jam breviter.*

CAPUT IV.

Resolutio Problematum Indeterminatorum.

252. *Cognoscitur Problema aliquod propositum, esse ex genere indeterminatorum per* (§. 241.)

In his Problematibus, ultima Æquatio duos plerumque, aut etiam plures complectitur incognitos, etsi ab exercitato Analysta, quotcunque dentur incogniti, semper ad duos saltem incognitos per substitutionem (æqualis pro æquali) juxta Axioma III. (§. 222.) reduci possint.

PROBLEMA I.

Sint distribuendi 240 fl. in Studiosos pauperes 50, hac conditione, ut singuli Theologi percipiant fl. 8, Philosophi singuli fl. 6, singuli Humanistæ fl. 2.

Quæritur quotnam esse debeant Theologi, quot Philosophi, & Humanistæ?

Problema hoc indeterminatum, claritatis gratia solvemus per Algebram numerosam.

Fiat itaque denominatio.

Sint Theologi $= x$, *Philosophi* $= y$, *Humanistæ* $= z$.

Erit per conditionem primam, Æquatio Prima A *hæc:*

$$x + y + z = 50$$

& per Metathesim - - $x = 50 - y - z$ A

Deinde per conditionem secundam, Æquatio Secunda B *erit* $8x + 6y + 2z = 240$

Per Metathesim - $8x = 240 - 6y - 2z$ B

& multiplic. Æquat. A *per* 8, *erit* $8x = 400 - 8y - 8z$ A

ergo per Axi. III. (222.) $240 - 6y - 2z = 400 - 8y - 8z$

& per Metathesim - - $8z - 2z = 400 - 240 + 6y - 8y$

hoc est - - - - $6z = 160 - 2y$

dividendo per 6, *erit* - - $z = \frac{160 - 2y}{6}$

Cum sit Indeterminatum, assumatur arbitrarie pro litera y numerus 32, *hoc est, sint Philosophi* - - - $y = 32$,

erunt (vi ult. formulæ) Humanistæ $z = \frac{160 - 64}{6} = 16$,

& consequenter Theologi $x = 2$; *nam* $32 + 16 + 2 = 50$, *quæ est conditio prima.*

Et præterea per conditionem secundam,

$$2 \cdot 8 + 32 \cdot 6 + 16 \cdot 2 = 240 \text{ fl. ergo.}$$

SCHO-

SCHOLION I.

Dixi (§. 242.) omne indeterminatum Problema plures ſolutiones admittere, hinc in noſtro Problemate, ſubſtituendo pro y diverſos numeros (quos ſequens Tabula exhibet) ſolutio invenietur, quæ iisdem conditionibus ſatisfacit.

TABULA
Exhibens varias ſolutiones Problematis antecedentis.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
$x =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$y =$	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2
$z =$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Ex ſingulis claſſibus hujus Tabulæ patet, quod omne indeterminatum Problema reduci poſſit ad determinata Problemata complura; Sic ſi in noſtro Problemate præter conditiones jam poſitas, adjiciatur E. g. etiam hæc, ut Philoſophi ſint duplo plures, quam Theologi, & itidem Humaniſtæ tot, quot Philoſophi, patet ex contemplatione hujus Tab. nullam claſſem ſatisfacere his conditionibus, præter claſſem V. Unde colligitur, Docentibus Analyſim magno ſubſidio eſſe Reſolutionem Probl. indeterminatorum, cum ope horum, unica ſolutione campus formandi varia Problemata determinata aperiatur, quæ exercendis Tyronibus ſuis deſerviant, Tyronibus vero via oſtenditur facillima ſibimetipſis fabricandi Problemata determinata, quibus ſe ſe exerceant in Analyſi. Sed hæc de indeterminatis ſufficiant.

SCHOLION II.

253. *Huc revocantur omnia Problemata miſcibilium, quando plura dantur miſcibilia, quam duo.*

CAPUT V.
De Reſolutione Æquationum Quadraticarum.

DEFINITIO V.

254. Æquatio Quadratica, ſeu duarum dimenſionum, aut ſecundi ordinis, dicitur, ſi incognitus terminus ſit Quadratus, aut ſi ſit, $xx = ab$, vel $xx + ax = ac$.

SCHOLION.

255. *Si exponens incogniti est 3, dicitur Æquatio* Cubica, *aut trinæ dimensionis; si exponens incogniti est 4, quarti ordinis &c. Prætermissis Æquationibus altiorum ordinum, quarum Resolutionem Analysis sublimior pluribus pertractat, nos præfixi temporis angustis limitibus conclusi, Regulas solvendi Æquationes duntaxat* Quadraticas *strictim exponemus. Analystæ itaque Æquationes* □ *in binas distinguendo classes, quasdam dicunt* Completas, Incompletas *alias, aut* Deficientes. Completæ *dicuntur, in quibus nullus deficit terminus ad expressionem Quadraticam requisitus, ut si sit* $xx = ab$, *aut* $xx + 2ax + aa = bc$. Incompletæ *vocantur, si terminus tertius, (id est, quadratum partis unius radicalis) deficiat, ut si sit* $xx + 2ax = ab$, *in qua deficit terminus* aa, *ut constat ex* (§. 182.) *De utraque classe nunc brevibus.*

REGULÆ

Discernendi an data quævis Æquatio quadratica sit completa, an incompleta.

255. Reg. I. Si in Æquatione incognitus quadratus solus habeatur (seu is affectus sit cognito, seu non sit) neque præterea idem incognitus simplex in Æquatione reperiatur, hujusmodi Æquatio completa est; ut si sit $xx + ac = bd$, quia quadratum hujusmodi est monomium.

Reg. II. Si in data Æquatione præter quadratum incogniti termini, inveniatur idem incognitus simplex, affectus cognito, & præterea quadratum illius dimidii cogniti, quo incognitus simplex affectus est, Æquatio quoque *completa* erit; ut si sit $xx + 2ax + aa = bd$, in qua habetur quadratum aa factum, de $\frac{2a}{2}$, seu de a, quo affectus est secundus terminus $2ax$. Ratio hujus est, quia tale quadratum est factum ex $\sqrt{}$ binomia, $x + a$, vel $x - a$, ut constat ex (§. 182.)

Reg. III. Si verò in Æquatione deficiat hoc quadratum, de dimidio factore secundi termini, seu si deficiat tertius terminus quadrati binomii, Æquatio incompleta, erit, & deficiens, ut si sit $xx + 2ax = db$, aut $xx + ax = cd$, item $3xx - 6x = ac$, vel $4xx + x = ab$,

$x = ab$, aut $5xx + \frac{x}{3} = bc$, vel denique $6xx + \frac{x}{c} = bb$. In Prima enim deficit □ aa, in Secunda deest □ ex $\frac{a}{2}$, hoc est $\frac{aa}{4}$, in Tertia non habetur □ ex $\frac{6}{2}$, seu de 3, quod est 9, in Quarta deficit □ ex $\frac{1}{2}$, hoc est □ $\frac{1}{4}$, in Quinta deest □ de dimidia $\frac{1}{3}$, seu de $\frac{1}{6}$, quod est □ $\frac{1}{36}$, in Sexta deficit □ de dimidio $\frac{1}{c}$, seu de $\frac{1}{2c}$, id est □ $\frac{1}{4cc}$.

SCHOLION I.

257. *Ut verò Tyro Analysta indicium certum habeat, an deficiat terminus tertius; Reducat sibi datam Æquationem (prius tamen per Regulas Reductionis ad expressionem simpliciorem transformatam) ad Æquationem* Nihili *per Reg.* X. (§. 236.) *id est, omnes terminos tam cognitos, quam incognitos per Metathesim, ita ad unam partem Æquationis transferat, ut incognitus quadratus evadat positivus, quo facto contemplando terminos, videat, an ex dimidio factore cogniti, quo incognitus simplex afficitur, adsit* □, *vel absit? ut si foret* $2ax = bc - xx - aa$, *erit reducta ad nihilum* $xx + 2ax + aa - bc = 0$, *quæ completa comparet; item si sit* $xx = aa + cx$, *erit ad nihilum reducta* $xx - cx - aa = 0$, *in qua deficit* □ *ex* $\frac{-c}{2}$, *seu* $\frac{cc}{4}$, *& ita de aliis.*

SCHOLION II.

258. *Notent Tyrones, quod si reducta ad* Nihilum *Æquatio sit hujusmodi;* $xx - 2ax - aa + bd = 0$, *hæc Æquatio non sit completa, cum* □ $-aa$, *utpote Imaginarium, produci non possit ex* $\frac{-2a}{2}$ *seu ex* $-a$, *ut constat ex* (§. 175.) *adeoque universaliter, si tertium membrum adsit, sed affectum signo* $-$, *id non pertinere cognoscitur ad expressionem quadraticam; adeoque illam deficientem esse; Nam si pertineret, tum quidem effici poterit positivum per translationem Metatheseos, sed tum iterum incognitus quadratus evadet imaginarius, quotiescunque autem incognitus evadit imaginarius, aut ejus Radix negativa, indicat, aut quæstionem, ex qua emersit hujusmodi Æquatio, esse impossibilem, aut ab Analysta non recte conceptam, & denominatam, aut etiam errorem in Reductione admissum, intelligendo, si quæstio in numeros resolvenda sit.*

REGULÆ
Reducendi Æquationem Quadraticam incompletam, item affectam signo $\sqrt{}$.

259. Reg. I. Reducta Æquatione ad nihilum, transferantur iterum termini per Metathesim ad alteram partem Æquationis, remanentibus duobus terminis

 affectis

affectis incognito; ut si sit $xx + ax - b = 0$, erit $xx + ax = b$, quo facto, addatur utrique parti □ de dimidio factore termini ax, qui est $\frac{a}{2}$, seu □ $\frac{aa}{4}$, erit Æquatio completa $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$, deinde extrahatur $\surd$ ex parte utraque, erit $x + \frac{a}{2} = (\surd b + \frac{aa}{4})$ & per Metathesim transferendo $+ \frac{a}{2}$, erit $x = (\surd b + \frac{aa}{4}) - \frac{a}{2}$, quæ est Æquatio Resolutoria. Idem est de aliis in Reg. III. (§.256.) adductis.

SCHOLION I.

260. *Meminisse velim, Tyrones, dum ex □ incognito jam per supra datas Regulas completo, $\surd$ extrahitur, toties partem radicis cognitæ, esse negativam, quoties secundus terminus negativus est, ut si extrahatur $\surd$ ex hac Æquatione jam completa* $xx - ax + \frac{aa}{4} = bd + \frac{aa}{4}$, *erit* $x - \frac{a}{2} = (\surd bd + \frac{aa}{4})$ *& non* $x + \frac{a}{2} = (\surd bd + \frac{aa}{4})$.

SCHOLION II.

261. *Si sit Æquatio completa, Reductio immediate per extractionem radicis obtinetur, ut si sit* $xx = ab$, *erit Reducta* $x = \surd ab$, *item sit* $xx - 2ax + aa = bc$, *erit extracta radice* $x - a = \surd bc$, *& per Metathesim* $x = (\surd bc) + a$. *Notent Tyrones, quantitates notas ex altera parte Æquationis comparentes, quibus signum $\surd$ præfigitur, includendas esse parenthesi prius, quam translatio termini cogniti ex parte termini incogniti fiat ad alteram partem, ne terminus cognitus hoc modo, post extractionem radicis translatus, afficiatur signo $\surd$.*

262. Reg. II. Quemadmodum ad resolvenda Problemata □, utimur extractione $\surd$, ita si occurrat Æquatio, cujus incognitus affectus est $\surd$ tota Æquatio elevari debet, ad potentiam secundam, seu ad □. ut si foret $\surd x = a + b$, elevando utramque partem ad □. erit $x = aa + 2ab + bb$. Item si sit $\surd ax = b$, erit $ax = bb$, & dividendo per a, erit $x = \frac{bb}{a}$.

Sed enim hasce praxes jugis Resolutionum exercitatio faciliores reddet. Itaque

PRO-

PROBLEMA I.

Manlius miles cum ſociis quibusdam è pugna redux, interrogatus à *Marco Piſone*, quotnam hoſtium ſua ſtraviſſet manu? mea inquit, meorumque ſociorum manu fortiſſima, cæſa hoſtium capita jacent 1296, id vero memoria digniſſimum, quod ſinguli noſtrum tot ſtraverimus hoſtes, quot nunc ſocii ſumus. *Quæritur quot fuerint una cum Manlio milites? & quotnam hoſtes ſinguli ſtraverint?*

Diſcuſſis rite conditionibus fiat denominatio.

Sit ſumma cæſorum hoſtium - - 1296 $=a$
Socii milites una cum Manlio - - - $=x$

Igitur cum ſinguli tot ſtraverint hoſtes, quot fuerint ſocii, erit quoque numerus hoſtium à ſingulis ſeorſim cæſorum $=x$
Ergo ſimul omnes ſtraverant ex hoſtibus ſummam xx *itaque Æquatio* - - - - $xx=a$
& extrahendo $\sqrt[2]{}$ *erit* $x=\sqrt{a}=\sqrt{1296}=36$
fuerunt ergo cum Manlio ſocii 36, *& ſinguli ſtraverunt ex hoſtibus etiam* 36.

PROBLEMA II.

Iſidorus Colonus Medienſis à deſignatis fundorum conſcribendorum Quæſtoribus interrogatus, quotnam tritici metretas annis ſingulis ſuo in agro ſeminaret? reſpondit: Ego ſex metretas plures ad conſerendum agellum meum in ſementem annis ſingulis ſpargo, quam *Andreas* germanus meus Colonus Marburgenſis, quæ meæ metretæ, ſi ita Deo largiente multiplicarentur, ut ſingulæ tot producerent metretas, quot *Andreas* ſingulis annis inſementem ſpargit, inferrem annis ſingulis horreo meo metretas tritici 720.

Quæritur quot Andreas, quotque Iſidorus metretas annis ſingulis in ſementem ſpargant.

Diſcuſſis rite conditionibus, fiat denominatio:
Sint itaque metretæ $6=a$, *metretæ* $720=b$
ſint metretæ quas ſeminat Andreas $=x$
ergo Iſidorus *ſeminat annis ſingul.* $=x+a$.

Jam per conditionem Problematis

erit $(x+a).x=b$

hoc est $xx+ax=b$.

Igitur complendo quadratum per Reg. I. (§. 259.) *hoc est Add. utrique parti* $\square\frac{aa}{4}$, *erit* $xx+ax+\frac{aa}{4}=b+\frac{aa}{4}$

Et extrahendo $\sqrt{}$, *erit* $x+\frac{a}{2}=(\sqrt{b+\frac{aa}{4}})$

& per Metathesim $x=(\sqrt{b+\frac{aa}{4}})-\frac{a}{2}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x=(\sqrt{720+\frac{36}{4}})-\frac{6}{2}$,

hoc est $x=(\sqrt{729})-3=27-3=24$.

Itaque

metretæ, quas seminat Andreas $x=24$ *hoc est* 24

quas seminat Isidorus $x+a=24+6=30$

Jam si multiplicentur 30 *per* 24 *habebitur productum* 720. *Metret.*
Recte igitur soluta quæstio.

SCHOLION.

263. *Hæc erant, quæ de Resolutionibus Problematum, tanquam prima Rudimenta summatim duntaxat adducere poteram; supersunt multa, eaque singularia, quæ ad sublimiorem Analysim viam sternerent, quibus præscripta brevitate compulsus supersedere cogor, ne tamen utilitati meorum Tyronum deforem, quorum nunquam non studiosus exstiti, idcirco binis quinquagenis selectissimorum Problematum Analyticorum in numeros solvendorum, singularibus paginis, sub nomine:* Exercitationum Analyticarum *typo edendis, si DEO O. M. visum fuerit, Tyronum sciendi cupiditatem accendam, & Quæstionibus partim* applicatis, *iisque tum in Physicis, tum Oeconomicis per quam utilissimis, partim* Abstractis *Arithmeticæ, & Geometriæ inservientibus, non injucundum campum aperiam se se privatis in ædibus exercendi, certo enim consilio, Problemata quædam afferam, quæ* primas Æquationes *(denominatione facta) contineant, atque una ultimam duntaxat reductam exhibeant, ut nempe Reductionem marte proprio tractantes, praxim Regularum* (§. 236.) *imbibant. Quædam verò sola Quæstione proposita finientur, ut in reperiundis primis quoque Æquationibus dexteritatem, ingeniumque suummet Tyro periclitari valeat. Ordo jam postulat, ut parte ultima, utilissimam, summeque necessariam proportionum doctrinam complectente, opusculum concludamus; de qua jam brevissime.*

FINIS PARTIS III.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, Usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

Nihil per universam Mathesim, & eidem sororio nexu junctissimam Philosophiam naturalem, cæterasque liberalium artium scientias magis necessarium, nihil in omni vitæ humanæ commercio magis esse utile, atque *Proportionum scientiam*, nemo, (nisi ignarus) inficiabitur. Cum enim DEUS O. M. quidquid omnipotente suo decreto ex abysso nihili produxit, omnia in *Pondere, Numero, & Mensura* creaverit, nihil in creatis recte cogitaveris, nihil recte egeris, si in sacras proportionum leges pecces; cogita *Pulchrum*, cogita *Solidum, Stabile, Jucundum, Utile, Mirum, commodum &c.* & curiosus quære rationem, cur hæc ita potius sint, quam secus; profecto, duce natura, fatebere dicendo: *Quæ recta sunt, habere proportionem ad invicem, quæ secus, hac carere.* Vera ais, at quid dicas, nescis, si doctrinam ignoras proportionis; Hæc nempe est (ut metaphora utar) medulla illa, atque anima mathematica stupendarum effectrix rerum. Hæc illa methodus ratiocinandi, argumentandique ratio plane subtilissima, solidissima, certissima, brevissimaque e proportione Geometrica petita, qua, tanquam *Logica*, cæteræ fere omnes, circa res naturales versantes disciplinæ perficiuntur, atque consistunt, quam si sustuleris, scientias, artesque exstinxisti, pulchrumque vitæ humanæ commercium in monstrum chaoticum, horrendum, atque terribile deformasti; de hac itaque summe necessaria doctrina hac quidem parte in compendio.

CAPUT I.

De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica.

DEFINITIO I.

264. Ratio, dicitur duarum quantitatum homogenearum comparatio, vel relatio, aut respectus ad invicem. Hujusmodi compa-

ratio, five *Ratio* duplex eft, *Ratio* nempe *Arithmetica*, & *Ratio Geometrica.*

DEFINITIO II.

265. *Ratio Arithmetica*, dicitur comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad *exceſſum*, vel *defectum*; ut fi comparentur inter fe numeri; 4 & 12, quot nempe unitatibus minor fit numerus 4, quam 12, aut numerus 12 major, quam 4. *Exceſſus* hic, vel *defectus*, vocatur *Differentia*; fic exceffus numeri 12 fupra 4, qui eft 8, vocatur *Differentia*, innotefcit hæc differentia per fubtractionem.

HYPOTHESIS I.

266. Ratio Arithmetica *deſignatur, vel exprimitur ita:* $a\overset{d}{,}b$, *vel* $4\overset{8}{,}12$, *id eſt inter quantitates comparatas ponendo* (,) & differentiam *locando ſupra comma, vel etiam* $a\overset{d}{-}b$.

DEFINITIO III.

267. *Ratio Geometrica*, eft comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad quotitatem; ut fi confideremus duos numeros, *E.g.* 12 & 4, quoties nempe 12 contineat numerum 4; vel quoties numerus 4 contineatur in 12, quæ quotitas per divifionem innotefcit; Quotus vero, qui indicat quoties una quantitas alteram continet, vel in ea continetur, appellatur *Exponens*, vel *Nomen Rationis*, ut in dato Exemplo foret numerus 3.

HYPOTHESIS II.

268. *Ratio Geometrica recte exprimitur per Hypotheſim* Divifionis (§. 30.) *traditam, ut* $a\overset{m}{:}b$, *aut* $12\overset{3}{:}4$, *in qua* exponens *Rationis, ſeu quotus* m *locatur ſuper duo puncta.*

SCHOLION.

269. *Rationem Geometricam recte exprimi per hanc Hypotheſim, patet ex definitione Rationis Geometricæ* (§. 267.) *unde liquet eam etiam recte ſic exprimi* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{12}{4}$. *Sed modo priore uſitatius.*

DEFI-

DEFINITIO IV.

270. Quantitates, quæ comparantur, (tam in Ratione Arithm. quam Geometr.) vocantur *Termini*, & quidem terminus primus, qui comparatur, ſeu ſiniſtram tenens, vocatur *Antecedens*; ſecundus, vocatur *Conſequens*: ſic in hac Ratione $a:b$, *Antecedens* eſt a, *Conſequens* verò b.

DEFINITIO V.

271. *Ratio* Geometrica *Majoritatis*, vel *Multipla*, dicitur, quando Antecedens eſt major ſuo conſequente, ut ſi ſit $12 \overset{3}{:} 4$, & in ſpecie: *Dupla*, ſi exponens eſt 2, *Tripla*, ſi exponens 3 &c. *Ratio* verò *Minoritatis*, vel *Submultipla* appellatur, dum Antecedens eſt minor ſuo conſequente, ut ſi ſit 4:12, in hac exponens ſemper eſt fractus. *Ratio* denique *Æqualitatis* eſt, quando Antecedens eſt æqualis ſuo conſequenti, ut 4:4, *hæc poſtrema peculiarem conſiderationem non habet in doctrina proportionum.*

COROLLARIUM.

272. Quoniam Ratio Geometrica eſt comparatio quoad quotitatem, (§. 267.) ſequitur in omni Ratione Geometrica Antecedens eſſe *dividendum*, conſequens *diviſorem*, & exponentem Rationis, *Quotum*; unde conſequitur (cum expreſſio fractionum ſit expreſſio diviſionis, & hæc ſit expreſſio Rationis Geometricæ) quod omnis fractio vera ſit Ratio Geometrica *Minoritatis*, in qua *Numerator* eſt Antecedens, & *Denominator* conſequens, Nam $\frac{4}{12}$, idem eſt ac 4:12. Præterea quod omnis fractio ſpuria ſit Ratio Geometrica *Majoritatis*, aut ſaltem *Æqualitatis*, ut ſi ſit $\frac{12}{4}$, quod idem eſt ac 12.4.

SCHOLION.

273. *Pro diverſitate* Exponentium *Rationes Geometricæ varias ſortiuntur denominationes, & quidem in Ratione* Majoritatis, *I. ſi exponens eſt* $1\frac{1}{2}$ *dicitur:* Sesqui altera, *ut* 3:2. *Si exponens eſt* $1\frac{1}{3}$, *dicitur* ſesqui tertia, *ut* 4:3 *&c. quæ denominationes naturam denominatorum ſequuntur, cum addito* ſesqui. *Ut* ſesqui quarta, *ſi* $1\frac{1}{4}$, ſesqui quinta *ſi* $1\frac{1}{5}$ *&c.* *II. Si exponens ſit unitas, cum fractione habente* numeratorem

torem majorem unitate; *dicitur* ſuperpartiens; *ut ſi ſit exponens* $1\frac{2}{3}$, *erit* ſuperbipartiens tertias, *ut in hac* 5 : 3. *Si exponens ſit* $1\frac{3}{4}$ ſupertripartiens quartas &c. *Eædem denominationes manent in Ratione* Minoritatis *reſpectu exponentium, præfigendo particulam* ſub, *ut* 4 : 8, *cujus exponens eſt* $\frac{4}{8}$, *ſeu* $\frac{1}{2}$ *dicitur* ſubſesqui altera. *Sed hæc, ut ad doctrinam proportionum nihil faciunt, ita ſolius notitiæ cauſa adnotâſſe ſufficiat.*

DEFINITIO VI.

274. Rationes Geometricæ *Æquales* dicuntur, ſi eosdem habeant exponentes, & viciſſim. Sic $\overset{m}{a:b}$ & $\overset{m}{c:d}$, item $\overset{4}{8:2}$ & $\overset{4}{12:3}$ Æquales ſunt; è contra *Major* dicitur *Ratio*, quæ exponentem habet majorem, ut $\overset{3}{6:2} > \overset{2}{8:4}$. *Minor* verò cujus exponens minor eſt; ut $\overset{2}{8:4} < \overset{3}{6:2}$.

SCHOLION.

275. *Eodem modo Rationes Arithmeticæ Æquales, vel Majores, aut Minores dicuntur relate ad differentiam rationum, ſic* $\overset{4}{3,7} = \overset{4}{2,6}$, *item* $\overset{5}{3,8} > \overset{3}{4,7}$ & $\overset{3}{4,7} < \overset{5}{3,8}$.

THEOREMA I. FUNDAMENTALE.

276. PROP. *In omni Ratione Geometrica Productum ex termino conſequente in exponentem, æquale eſt termino antecedenti, ut ſi ſit* $\overset{m}{a:b}$, *dico*; $mb = a$.

DEMONSTRATIO.

In omni Ratione Geometrica Antecedens eſt *dividendus*, conſequens *diviſor*, & exponens eſt *Quotus*, per (§. 272.) ſed factum ex *diviſore* in *Quotum* æquatur *dividendo* per (§. 61. Arithm.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

277. Hinc per Axioma III. (§ 222.) loco *Antecedentis*, ſemper ſubſtitui poteſt *Conſequens* multiplicatus per *Exponentem*. Sic loco $\overset{m}{a:b}$, ſcribi poteſt $mb:b$. Nam $\frac{mb}{b}$ dat quotum m, quod ipſum numeri pro literis ſubſtituti declarant, ſic 6:3, idem eſt ac 3. 2 : 3, nam 3. 2 = 6.

THEO-

THEOREMA II. FUNDAMENTALE.

278. PROP. *In Ratione Arithmetica Summa ex termino* Minore, & Differentia *est æqualis termino* Majori, ut si sit $\overset{d}{a,b}$ *vel* $\overset{3}{4,7}$, *erit* $b+d=a$, *aut* $4+3=7$.

Demonstratio petitur ex (§. 43. Arithm.)

THEOREMA III.

279. PROP. *Duæ Quantitates, habentes eandem Rationem ad unam tertiam, æquales sunt, & vicissim.*

DEMONSTRATIO.

Sint quantitates a, & d, quæ ad eandem b dicant eandem Rationem, erunt itaque $\overset{m}{a:b}$, & $\overset{m}{d:b}$, dico esse, $a=d$. Nam $a=mb$, & $d=mb$ per (§. 276.) ergo per (§. 222.) $a=d$. Q.E D.

CAPUT II.

De Proportione Geometrica.

DEFINITIO VII.

280. *Proportio* est duarum Rationum *Æqualitas*; & in specie, *Proportio Geometrica* est duarum Rationum *eosdem* exponentes habentium *Æqualitas*, ut si sit $\overset{m}{a:b}$, & $\overset{m}{c:d}$, item $\overset{2}{8:4}$, & $\overset{2}{6:3}$. *Proportio Arithmetica* est duarum Rationum eandem *differentiam* habentium *Æqualitas*, ut si sit $\overset{d}{a,b}$, & $\overset{d}{c,f}$, aut $\overset{2}{5,3}$, & $\overset{2}{7,9}$.

COROLLARIUM.

Omnis itaque Proportio quatuor terminis constat. *Et hinc recte exprimitur per sequentem Hypothesim.*

HYPOTHESIS III.

281. Proportio Geometrica *sic exprimitur*, a : b = c : d, *vel* 8 : 4 :: 6 : 3, &, *enunciatur*; a *est ad* b, *sicut* c *est ad* d, aut *sicut* a *se habet ad* b, *ita* c *se habet ad* d; Arithmetica *sic exprimitur*, a, b = c, f, aut 3, 5 = 7, 9.

SCHO-

SCHOLION.

283. *Dilata tantisper doctrina* Proportionis Arithmeticæ, *quæ habita scientia Proportionis Geometricæ facilius intelligitur, hoc capite solius Proportionis Geometricæ doctrinam proponemus.*

DEFINITIO VII.

284. *Proportio continua* dicitur, dum terminus *Consequens* Rationis primæ est terminus *Antecedens* secundæ; ut $a:b=b:c$, vel $8:4=4:2$. *Discreta* appellatur, dum Rationum Antecedentes diversi sunt, ut $a:b=c:d$, vel $8:4=6:3$.

HYPOTHESIS IV.

285. Proportio continua *exprimitur ita;* a.b.c, *vel etiam præfixo signo* ∷ (§.[illegible]8.) ut ∷ a.b.c.d.*&c. enunciatur;* a *est ad* b, *sicut* b *est ad* c, *&* b *est ad* c, *sicut* c *est ad* d &c.

THEOREMA IV. FUNDAMENTALE.

286. PROP. *In omni Proportione Geometrica, factum Extremorum* (id est termini primi cum ultimo) *est æquale facto Mediorum (seu* secundi cum tertio.) *Nempe si sit*, $a:b=c:d$, *erit* $ad=bc$.

DEMONSTRATIO.

Exprimatur cum exponentibus, ut sit $\overset{m}{a:b}=\overset{m}{c:d}$, & per (§. 277.) substituendo *mb* loco *a*, & *md* loco *c*, erit eadem proportio, $mb:b=md:d$, sed in hac factum extremorum est $mb.d$, & factum mediorum est $b.md$, hoc est $mbd=mbd$. Ergo etiam $ad=bc$ per (§. 221.) Q. E. D. *Aliter:* cum sit $a=mb$, & $c=md$ per (§. 276.) substituantur hi valores in Æquatione $ad=bc$, & habebitur $mbd=mdb$. Q. E. D. *Declaratur:* sit $8:4=6:3$, erit $8.3=4.6$, id est $24=24$.

SCHO-

SCHOLION.

287. *Hoc Theorema esse basim reliquorum fere omnium Theorematum, ac Problematum Proportionis, præcipiumque fundamentum inveniendarum primarum Æquationum Analyticarum Tyrones nosse volo. Ex hoc enim præter cætera (ope Analysis) sequentia Tria utilissima, Problemata reperta sunt.* Primum *est celeberrima illa Regula* Trium, *quæ etiam ob summam utilitatem, maximumque in scientiis, vitæque humanæ commercio usum, merito nomen obtinuit* Regulæ Aureæ; *de qua Cap. V.* Secundum Problema *non minus utile est;* datis duobus terminis invenire Tertium. *Et denique* III. Problema *est,* datis duobus invenire medium. *Itaque*

PROBLEMA I.

288. PROP. *Datis tribus terminis invenire quartum proportionalem; seu invenire Regulam auream.*

RESOLUTIO.

Sit primus $=a$, *Secundus* $=b$, *Tertius* $=c$, *Quartus quæsitus* $=x$, *erit proportio:* $a:b=c:x$, *&* *per Theor. Anteced.* $ax=bc$, *& per Reg. IV.* (§. 236.) *dividendo utramque partem per* a, *habebitur* $x=\frac{bc}{a}$, *quæ ultima Æquatio, utpote Resolutoria, hoc Problema eloquitur.* Quartus x, est æqualis facto ex termino secundo b, in Tertium c, & diviso per Primum a; *id est:* Si vis invenire quartum Proportionalem, multiplica secundum cum tertio, & factum divide per Primum, Quotus erit quartus Proportionalis; *quæ verba sunt ipsissima, quibus Arithmetici* regulam auream *edocent, à quibus, si quæras, cur non Primus cum Tertio multiplicari debeat, & dividi per Secundum; hanc rationem rogando actum ages, ni Analysim edocti sint, cui regulas suas* Arithmetica *repertas, demonstratasque debet.* Notandum: *Cum sit quartus* $x=\frac{bc}{a}$ *semper loco termini* quarti *substitui potest per* (§. 222.) tertius *multiplicatus per* secundum, *& divisus per* primum, *eritque proportio* $a:b=c:\frac{bc}{a}$.

PROBLEMA II.

289. PROP. *Datis duobus terminis invenire Tertium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $=a$, *Secundus* $=b$, *& Tertius quæsitus* $=x$, *erit proportio;* $a:b=b:x$, *& per Theor.* (§. 286.) $ax=bb$, &

& per Reg. IV. (§. 236.) $x=\frac{bb}{a}$, *hoc est:* Quadratum *termini* Secundi *dividatur per* Primum, *quotus erit* Tertius *quæsitus, ut si sit* $2:4=4:x$, *erit* $2x=16$, *&* $x=\frac{16}{2}=8$: *id est* $2:4=4:8$.

PROBLEMA III.

290. PROP. *Datis terminis duobus invenire medium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $=a$, *Tertius* $=b$, *Medius* $=x$, *erit proportio,* $a:x=x:b$, *& per Theor.* (§. 286.), $xx=ab$, *& extrahendo* $\surd$ *per Reg. VII.* (§. 236.) *erit* $x=\surd ab$, *hoc est:* ex facto termini Primi in Tertium extrahatur radix quadrata, erit hæc medius proportionalis, *ut si sit, quærendus inter numerum* 2 *&* 8, *medius, erit* $2:x=x:3$, *hoc est* $xx=16$, *&* $x=\surd 16=4$, *est ergo* $2:4=4:8$.

THEOREMA V. FUNDAMENTALE.

291. PROP. *Si factum extremorum est æquale facto mediorum, factores erunt reciproce proportionales; ut si sit* $ad=bc$, *erit* $a:b=c:d$, *hoc est, si in producto* ad, *assumatur factor* a, *(arbitrarie) pro* primo *termino proportionis, tunc ejusdem producti* ad, *alter factor* d *poni debet pro* quarto, *factores verò alterius producti* bc, *nempe* b *&* c *poni debent loco medio.*

Hæc Propositio (utpote conversa Theorematis IV.) nova Demonstratione non eget.

COROLLARIUM I.

292. Duorum itaque productorum æqualium factores solvi possunt in proportionem reciprocam, eamque variam, ut si detur $abc=dgf$, erit proportio reciproca, $a:f=dg:bc$, vel $a:gf=d:bc$, aut $a:df=g:bc$ &c. quæ resolutio insignem usum habet in Analysi ad invenienda Theoremata.

COROLLARIUM II.

293. Quoniam factores in proportionem reciprocam varie disponi possunt, sequitur varias inde enasci terminorum transpositiones manente proportione; manent autem

autem termini proportionales, si eorum factum extremorum sit æquale facto mediorum per (§. 286.) hinc, ut in subjecta Tabula (exhibente variam terminorum transpositionem proportionalem) demonstretur factum extremorum esse æquale facto mediorum, nullo alio medio opus est, quam, ut (per Theorema I. §. 276.) loco literæ a, ponatur mb, & loco literæ c substituatur md. Sit itaque

	Algebraice.	*Numerice.*
	$ad=bc$	$8 . 3=6\ 4$
	erit $a:b=c:d$	$8:4=6:3$
Alternando	$a:c=b:d$ *seu permutando* -	$8:6=4:3$
Invertendo	$c:a=d.b$	$6:8=3:4$
Iterum Altern.	$c:d=a:b$	$6:3=8:4$

Item Algebraice.

Sit - - - -	$a:b=c:d$
Dividendo -	$a-b:b=c-d:d$
Componendo -	$a+b:b=c+d:d$
Convertendo -	$a:a-b=c:c-d$
Mixtim -	$a+b:a-b=c+d:c-d$
Item - -	$a+c:b+d=a:b$
Aut - -	$a-c:b-d=a:b$

Item Numerice.

Sit - - -	$8:4=6:3$
Dividendo -	$8-4:4=6-3:3$
Componendo -	$8+4:4=6+3:3$
Convertendo -	$8:8-4=6:6-3$
Mixtim -	$8+4:8-4=6+3:6-3$
Item - -	$8+6:4+3=8:4$
Aut - -	$8-6:4-3=8:4$

Quæ omnes proportiones iterum *Alternando*, & *Invertendo* &c. varie permutari possunt, adeo, ut hæc exigua Tabella octo insignia Theoremata complectatur.

SCHOLION.

294. *Quemadmodum Theorema IV. unicum fere est fundamentum omnium proportionum, harumque ope reperiendarum primarum Æquationum per Synthesim, ita Theorema V.* locus communis *habetur inveniendorum Theorematum, ac Problematum per Analysim, ut oretenus, & suo loco plura dicentur.*

O THEO-

THEOREMA VI.

295. PROP. *Quæ sunt proportionalia uni Tertio, sunt etiam proportionalia inter se, ut si sit* a:b = c:d, *&* e:f = c:d, *erit etiam* a:b = e:f.

Demonstratio patet ex (§. 286.) & numeris substitutis declaratur.

THEOREMA VII.

296. PROP. *Si quatuor termini proportionales, multiplicentur per alios quatuor ipsis correspondentes proportionales, facta erunt proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Sit ${}^{m}_{a:b} = {}^{m}_{c:d}$
& ${}^{n}_{e:f} = {}^{n}_{g:h}$, dico fore $ae : bf = cg : dh$, nam substituendo per (§. 277.) loco antecedentium, consequentes per exponentes multiplicatos, erit: $mbnf : bf = mdnh : dh$, in qua factum extremorum æquale facto mediorum per (§. 286.) ergo. Idem in numeris patet.

COROLLARIUM.

297. Hinc si *Radices* sunt proportionales, erunt etiam proportionalia earundem *Quadrata*, *Cubi*, &c. seu universaliter, earundem potestates quæcunque similes.

THEOREMA VIII.

298. PROP. *Si quatuor Termini proportionales dividantur per alios ipsis correspondentes proportionales, quoti erunt proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit $ae : bf = cg : dh$
& divis. $\overline{e} : \overline{f} = \overline{g} : \overline{h}$, erit $a : b = c : d$, ut patet.

COROLLARIUM.

299. Quadratorum, Cuborum, & universim potestatum similium radices similes, sunt proportionales.

THEO-

THEOREMA IX.

300. PROP. Rationes *Æquemultiplæ (hoc est* per eandem quantitatem multiplicatæ) *item* Rationes *Submultiplæ (seu* per eandem quantitatem divisæ) *sunt, ut* simplæ, *hoc est, simplis proportionales.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit $a:b$, cujus tam antecedens, quam consequens multiplicetur per d, dico fore $ad:bd = a:b$. Nam per (§. 286.) $abd = abd$. Quod erat primum.

II. Sit $ad:bd$, & dividatur uterque terminus per d, erit $\frac{ad:bd}{d} = a\,b$, ut patet ex (§. 35.) idem est in numeris.

Nam sit 6:3, & multiplicentur per 4, erit 24:12 = 6:3, item dividantur 24:12, per 3, erit 8:4 = 6:3.

THEOREMA X.

301. PROP. *Si sint duæ proportiones, in quibus (sibi invicem subscriptis) lineæ ad inæquales quantitates ductæ, sunt* Æquedistantes *seu parallelæ, erunt hæ quantitates proportionales ex* Æquo.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b = c:d$

Secunda $b:f = d:g$, dico fore $a:f = c:g$, nam alternando utramque.

erit Prima $a:c = b:d$

Secunda $b:d = f:g$, ergo per (§. 295.) $a:c = f:g$,

seu altern. $a:f = c:g$. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit 12:6 = 8:4

6:3 = 4:2, erit 12:3 = 8:2, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XI.

302. Prop. *Si in duabus proportionibus ſibi invicem ſubſcriptis, lineæ ad inæquales quantitates ductæ, ſint* Convergentes, *erunt hæ quantitates proportionales* ex Æquo perturbato.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b=c:d$

& *Secunda* $b:f=g:c$, dico fore, $a:f=g:d$, nam in Prima $ad=bc$, & in Secunda $bc=fg$, per (§.286.) ergo per (§.221.) $ad=fg$, ſed hæc reſolvitur in hanc $a:f=g:d$ per (§.291.) ergo. Q.E.D.

In Numeris.

Sit $12:6=8:4$

& $6:3=16:8$, erit $12:3=16:4$, ut patet ex (§.286.)

THEOREMA XII.

303. Prop. *Si in duabus proportionibus* Primi Antecedentes, & Ultimi Conſequentes, *vel viciſſim, æquales ſunt, erunt reliqui termini* reciproce *proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b=c:d$

$a:f=g:d$, dico fore $b:f=g:c$. Demonſtratio eadem, quæ Theorematis prioris.

In Numeris.

Sit $12:6=8:4$

$12:3=16:4$, erit $6:3=16:8$, ut patet ex (§.286.)

THEO-

THEOREMA XIII.

304. Prop. *Si in duabus proportionibus* bini antecedentes, *vel* bini consequentes, *æquales sunt*, *erunt reliqui termini proportionales.*

DEMONSTRATIO.

$$\text{Sit}\ \left.\begin{array}{l} a:b=c:d \\ a:f=c:g \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{erunt}\\ \text{altern.}\end{array} \left\{\begin{array}{l} a:c=b:d \\ a:c=f:g \end{array}\right.$$

ergo per (§. 295.) $b:d=f:g$. Q. E. D.

In Numeris.

Sit $12:6=16:8$

$12:3=16:4$, erit $6:8=3:4$, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XIV.

305. Prop. *Si sint quotcunque termini proportionales*, *erit summa* omnium antecedentium, *ad summam* omnium consequentium, *ut quivis* antecedens *ad suum* consequentem.

DEMONSTRATIO.

Sit $\overset{m}{a:b}$ & $\overset{m}{c:d}$ & $\overset{m}{f:g}$ erit $a+c+f:b+d+g=a:b$, substituendo loco $a+c+f$, eorundem valores per (§. 277.) erit $mb+md+mg:b+d+g=mb:b$, sed in hac per (§. 286.) est $mbb+mdb+mgb=mbb+mbd+mbg$. ergo. Q. E. D.

In Numeris.

Sit $12:6$, $16:8$, $4:2$ erit $12+16+4:6+8+2=12:6$, hoc est, $32:16=12:6$, ut patet ex (§. 286.)

SCHOLION.

306. *Quæ hucusque dicta sunt, pertinent ad proportiones ortas ex rationibus simplicibus, supersunt quædam in compendio referenda de Rationibus compositis, & harum proportionibus, ac progressionibus, de quibus tamen pluribus in Geometria tractabitur. Itaque.*

CAPUT III.

De Ratione Compoſita, & Progreſſione Geometrica continua.

DEFINITIO VIII.

307. *Ratio Compoſita* dicitur comparatio *Producti* ex antecedentibus duarum, vel plurium Rationum ſimplicium orti, cum *Producto* ex conſequentibus earundem Rationum facto; ut ſi ſint duæ Rationes ſimplices $a:b$ & $f:g$, erit productum ex antecedentibus af, productum ex conſequentibus bg, & hinc *Ratio Compoſita* $af:bg$. Idem eſt in numeris.

THEOREMA XV.

308. PROP. *Exponens Rationis Compoſitæ eſt* Productum *omnium exponentium, quæ datam rationem compoſitam conſtituunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $\overset{m}{a:b}$ & *Secunda* $\overset{n}{f:g}$ $\Big\}$ erit ratio compoſita $\overset{mn}{af:bg}$ cujus exponens mn.

Nam ſubſtituendo per (§.277.) mb loco a & ng loco f, erit Ratio compoſita eadem $mnbg:bg$, ſed hujus exponens eſt mn, utpote quotus per (§.267.) ergo. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $\overset{4}{8:2}$ $\overset{2}{10:5}$ $\Big\}$ erit Compoſita $8.10:5.2$, hoc eſt $80:10$, cujus exponens eſt $8 = 4.2$.

COROLLARIUM I.

309. Hinc I. In Ratione compoſita, orta ex duabus Rationibus ſimplicibus *æqualibus* (hoc eſt, habentibus eundem exponentem) Exponens ſemper eſt quadratum exponentis ſimplicis, ut ſi ſit compoſita $\overset{mm}{ac:bd}$ orta ex duabus Rationibus $\overset{m}{a:b}$ & $\overset{m}{c:d}$, habentibus eundem exponentem m, erit mm, vel m^2, exponens compoſitæ $ac:bd$; qui expo-

m

exponens *mm*, est *Quadratus* de *m* rationis simplicis $a:b$; & hinc hujusmodi Ratio composita, vocatur *Ratio Quadratica*, aut *Duplicata* (*NB.* non dupla) diciturque Antecedens Rationis hujusmodi. *Ex.gr.* Antecedens *ac*, dicere ad consequentem suum *bd* rationem *duplicatam*, aut *quadraticam*, Antecedentis simplicis *a*, ad consequentem suum *b*, hoc est, ut $aa:bb$. II. Eodem modo Exponens rationis compositæ, ortæ ex tribus Rationibus simplicibus æqualibus, est *Cubus* exponentis simplicis, diciturque *Ratio Triplicata*, (non *Tripla*) & Antecedens rationis hujus compositæ ad suum consequentem dicitur esse in *Ratione Triplicata* Antecedentis simplicis ad suum Consequentem. Eodem modo intelligenda est *Ratio quadruplicata* &c.

COROLLARIUM II.

310. Quoniam in proportione Geometrica continua idem omnium Rationum exponens est, per (§. 284.) sequitur, quod *primus sit ad tertium in Ratione duplicata seu quadratica primi ad secundum*, seu, ut *quadratum Primi*, *ad*

m m

quadrat. Secundi. Sic si sit $\div\, a.b.c$ &c. erit $a:c=aa:bb$, nam $a:c=ab:bc$ per (§. 300.), sed in hac substituendo per (§. 277.) *mb* loco *a*, & *mc* loco *b*, erit $mmc:c=mmcb:bc$, in qua exponens est *mm*, sed etiam $aa:bb$ habet exponentem *mm*, nam substituendo *mb* loco *a*, erit $mmbb:bb$. ergo. II. Ex eodem ratiocinio clarum est, quod *primus sit ad quartum in ratione triplicata primi ad secundum*, sit $a.b.c.d.$&c. erit $a:d=aaa:bbb$, seu, ut *cubus primi ad cubum secundi.*

2 2 2

Idem clarum fit in Numeris, sit enim $\div\, 2.4.8.16.$&c. erit terminus primus 2 ad tertium 8, hoc est $2:8$ in ratione *duplicata* primi 2 ad secundum 4, seu $2:4$, hoc est $2.2:4.4$, id est $4:16$, nam $2:8=4:16$, ut patet per (§. 286.) & hinc universaliter: *Potentiæ sunt in tantuplicata ratione radicis, seu laterum, quot unitates habet exponens datæ potentiæ.* Sed hæc viva voce docentis clariora reddentur.

SCHOLION.

311. *Tyrones Theorema hoc cum suis corollariis probe velim memoria retineant, utpote quæ per omnem Geometriam, & Philosophiam naturalem identidem usurpanda veniunt.*

DEFINITIO IX.

312. *Progressio* dicitur certa series quantitatum continue proportionalium, ut ∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 &c.

SCHOLION I.

313. *In specie, si series continua sint termini arithmetice proportionales* (§. 280.) *dicitur* Progressio Arithmetica, *ut* 1, 3, 4, 7, 9, 11 &c. (differences: 2 2 2 2) *ad hanc revocantur I. Progressio numerorum naturalium*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. *Item Progressio figuratorum quorundam, ut* 3, 6, 10, 15, 21, (differences: 3 4 5 6) *quorum differentiæ sunt numeri naturales. II.* Progressio *dicitur* Geometrica, *si termini sint continue Geometrice proportionales, ut* ∺ 1.2.4.8.16.32. &c. (ratios: 2 2 2 2) *Progressiones cumprimis Arithmeticæ, & Geometricæ sunt vel* crescentes, *vel* decrescentes. Crescentes *dicuntur si termini crescant; ut* 1. 2. 4. 8. 16 &c. decrescentes, *si termini decrescant, ut* ∺ 32. 16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$ &c.

SCHOLION II.

314. *Quoniam nobis hic de Progressione Geometrica agendum, multum juvabit, Tyronibus expressionem universalem per literas ob oculos ponere, quarum formularum contemplatione sola condiscimus, quæ fuse cæteroquin demonstranda forent. Sint itaque termini Progressionis Geometricæ crescentis sub exponente* m, Ex. gr. ∺ a . b . c . d . e . f &c. (m m m m m) *patet eam per substitutionem exponentium juxta* (§. 277.) *recte sic exprimi* ∺ $a . m^1a . m^2a . m^3a . m^4a . m^5a$ &c. *nam cum sit crescens erit* $b = ma$, & $c = mb = mma$, *seu* m^2a, & $d = mc = mmma$, *seu* m^3a, & $e = md = m^4a$, & $f = me = m^5a$ &c. *idem patet in decrescente. Hinc omnes Progressiones Geometricæ per sequentes binas classes recte designantur.*

TABULA
PROGRESSIONUM GEOMETRICARUM.

Num. termin.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Crescens ∺	a	m^1a	m^2a	m^3a	m^4a	m^5a	m^6a	*&c.*
Decrescens ∺	a	$\frac{a}{m^1}$	$\frac{a}{m^2}$	$\frac{a}{m^3}$	$\frac{a}{m^4}$	$\frac{a}{m^5}$	$\frac{a}{m^6}$	*&c.*

IN

IN NUMERIS.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Crescens	∵ 1 .	2 .	4 .	8 .	16 .	32 .	64	&c.
per Expon.	∵ 1 .	2^1 .	2^2 .	2^3 .	2^4 .	2^5 .	2^6	&c.
Decrescens	∵ $\frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2^1}$.	$\frac{64}{2^2}$.	$\frac{64}{2^3}$.	$\frac{64}{2^4}$.	$\frac{64}{2^5}$.	$\frac{64}{2^6}$	&c.
Hoc est	∺ $\frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2}$.	$\frac{64}{4}$.	$\frac{64}{8}$.	$\frac{64}{16}$.	$\frac{64}{32}$.	$\frac{64}{64}$	&c.
id est	∺ 64 .	32 .	16 .	8 .	4 .	2 .	1	&c.

NB. *Puncta inter terminos posita non indicant multiplicationem, sed tantum separationem terminorum.*

Jam contemplando imprimis seriem crescentem a . ma . m^2a &c. *sequentia Theoremata, & Problemata deducuntur.*

315. THEOREMA. Factum extremorum est æquale facto terminorum quorumvis ab extremis æquedistantium, aut si termini sint impares, quadrato medii. *Sic factum ex termino primo* a, *& termino septimo* m^6a *est* m^6a^2, *quod est æquale facto ex termino secundo* ma, *& sexto* m^5a, *quod etiam est* m^6a^2, *sic factum tertii* m^2a, *& quinti* m^4a *est* m^6a^2, *& quadratum quarti est* m^6a^2. *Idem patet in numeris, nam factum primi* 1, *& septimi* 64, *est* $64 . 1 = 64$, *sed etiam factum secundi, & sexti est* $2 . 32 = 64$, *factum tertii, & quinti est* $4 . 16 = 64$; *quadratum medii* 8 *est* $8 . 8 = 64$.

316. THEOREMA. Omnis terminus, est productum ex termino primo, & ex exponente elevato ad potestatem uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini. *Sic terminus* Ex. gr. *septimus* m^6a, *est factum ex exponente* m, *elevato ad sextam potentiam, hoc est* m^6, *& multiplicato per primum* a, $=$ m a. *Idem est in numeris; sic quartus* 8, *est factum ex exponente* 2, *elevato ad tertiam potentiam nempe* $2 . 2 . 2 . = 2^3$, *multiplicato per primum* 1. *Hinc eruuntur sequentia Problemata.*

317. PROBLEMA. Dato termino primo, & exponente rationis, invenire terminum quemvis. Resolutio, *datus Exponens elevetur ad potentiam uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini, factum multiplicetur per Primum; sic si detur exponens* 2, *& primus* 1, *& quæratur sextus terminus, erit* $2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 1 = 32 . 1 = 32$, *qui est terminus sextus, ut patet ex Tabula.*

318. COROLLARIUM. *Hinc si quæratur terminus* maximus, *invenitur is eodem modo, ut quivis alter. Terminus vero* minimus *habebitur, si terminus* maximus *(per prius dicta inventus) dividatur per exponentem elevatum uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini maximi. Sic detur terminus maximus* 32, *qui sexto loco consistit, & exponens detur* 2, *erit* $2.2.2.2.2 = 32$, *per quem dividendo* 32, *erit quotus* $= 1$, *hoc est minimus. Et universaliter formula termini* Maximi $m^{n-1}a$, *& termini* Minimi $m^{n-1}a : m^{n-1}$, *in qua* m *denotat exponentem datæ rationis*, $n-1$ *denotat exponentem potentiæ, vel potestatis de* m *elevato ad gradum unum inferiorem, quam numerus localis termini cujuscunque,* a *vero denotat primum terminum. Porro ex contemplatione seriei crescentis* $a . ma . m^2a$ *&c. habetur sequens.*

319. THEOREMA: Exponens rationis *m* est æqualis $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a : a}$ *hoc est* $\sqrt[n-1]{m^{n-1}} = m$ *hoc est* Terminus datus quivis *(seu maximus)* divisus per terminum primum, & ex quoto extracta radix, potentiæ uno gradu inferioris, quam sit numerus localis termini, est exponens datæ rationis. *Hinc habetur resolutio sequentis Problematis.*

320. PROBLEMA: Dato termino primo, termino ultimo *(seu maximo)* & dato numero terminorum, *(seu quotum locum terminus ultimus occupat)* invenire exponentem rationis. Ex. gr. *Datur terminus primus* $= 1$, *terminus ultimus* $= 8$, *datus numerus terminorum* $= 4$ *(hoc est, numerus* 8 *consistit quarto loco in data serie)* invenire exponentem. *Vocetur is* $=$ x *erit is per formulam generalem* $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a : a} = \sqrt[4-1]{x^{4-1}1 : 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$ *hoc est* $\sqrt[3]{8 : 1} = \sqrt[3]{8} = 2$ *hoc est:* Terminus datus ultimus dividatur per primum, & ex quoto extrahatur radix potentiæ uno gradu inferioris, quam sit terminorum numerus, erit radix hæc quæsitus exponens rationis. *Hinc porro sequitur.*

321. THEOREMA: Si primus terminus subtrahatur ab ultimo, & residuum dividatur per exponentem rationis una unitate mulctatum, & huic quoto addatur terminus ultimus, habetur summa omnium terminorum. *Seu, cum ultimus sit* $= m^{n-1}a$, *primus* $=$ a *exponens rationis* $=$ m, *erit residuum, si primus ab ultimo subtrahatur* $= m^{n-1}a - a$, *& dividendo per* $m-1$, *erit quotus* $(m^{n-1}a - a) : (m-1)$, *& huic*

huic addendo ultimum $m^{n-1}a$, *habebitur summa* $= m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, *quæ est formula universalis reperiendæ summæ. Hinc resolvitur sequens.*

322. PROBLEMA : Dato termino primo, dato termino ultimo, & dato exponente rationis, invenire summam omnium terminorum. *Ut si detur terminus primus* $= 1$, *terminus ultimus* $= 64$, *exponens rationis* $= 2$, *erit vi formulæ, terminus primus* $a = 1$, *ultimus* $m^{n-1}a = 64$, *&* *exponens* $m = 2$, *& hinc vi formulæ* (§. 321.) *erit summa:* $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : m - 1 = 64 + (64 - 1) : (2 - 1)$ *hoc est* $64 + (63 : 1) = 64 + 63 = 127$, *ut patet ex Tabula :* (§. 314.) *nam* $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$.

323. COROLLARIUM. *Quotiescunque itaque quæritur summa, nota esse debent hæc tria.* I. Terminus primus, II. terminus ultimus, & I I. exponens rationis. *Hinc quotiescunque datur hujusmodi problema resolvendum, & ex his tribus defeciat unum, in id prius, per superiora problemata inquirendum est.* Ex. gr. *Si daretur terminus primus, & exponens, & non daretur ultimus, in hunc ultimum prius inquirendum est per* (§. 317.) *aut si daretur terminus primus, & ultimus, & non daretur exponens, hic exponens prius inveniri debet per* (§. 320.) *denique ex his liquet.*

324. PROBLEMA : Datis duobus terminis invenire quotcunque medios proportionales. *Nam cum semper detur terminus primus, terminus ultimus, & numerus terminorum, invenietur ex his per* (§. 320) *exponens rationis, quo invento formari possunt quodcunque termini per* (§. 317.)

SCHOLION I.

325. *Exemplis hæc quidem pluribus illustrari deberent, quæ, ne in molem excrescat liber ad* Exercitationes Analyticas *reservamus. Porro quæ de progressione* crescente *dicta sunt, eodem modo de* decrescente *vera esse applicanti patebit, maxime si Tyro animadvertat, omnem decrescentem, fore crescentem, & vicissim crescentem mutari in decrescentem, modo seriem considerit progredientem a dextris sinistram versus, & contra.*

SCHOLION II.

326. *De proportione, & progressione jam Arithmetica brevibus; nam* universaliter, *quæ de proportione, & progressione Geometrica demonstrantur adhibendo* multiplicationem, & divisionem, *item* elevationem *ad* potestatem, *vel* extrahendo $\surd$, *hæc de proportione, & progressione Arith-*

Arithmetica intelligenda sunt adhibendo loco multiplicationis, Additionem, & *loco divisionis*, Subtractionem, *loco quadrati, multiplicationem per 2, loco cubi, multiplicationem per 3, &c. loco extractionis* $\sqrt{}$, *divisionem per 2, & loco extractionis* $\sqrt{}$, *divisionem per 3, &c.*

CAPUT IV.

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

THEOREMA XVI.

327. PROP. *In Proportione Arithmetica* (§. 280.) *summa extremorum est æqualis summæ mediorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit Majoritatis ${}^{d}_{a,b} = {}^{d}_{c,f}$, erit $a + f = b + c$, nam substituendo per (§. 278.) erit $a = d + b$, & $c = f + d$, & hinc proportio $d + b$, $b = f + d$, f. summa extremorum $d + b + f = b + f + d$ summæ mediorum. In Numeris sit $3, 5 = 7, 9$, erit $3 + 9 = 5 + 7$, hoc est $12 = 12$.

328. COROLLARIUM I. *In continua* $a, b = b, c$, *summa extremorum* $a + c = 2b$, *hoc est, duplo medii; ut sit* $3, 5 = 5, 7$, *erit* $3 + 7 = 5 + 5$, *seu* $3 + 7 = 10$.

329. COROLLARIUM II. *Quartus Arithmetice proportionalis invenitur, si a summa mediorum (hoc est secundi & tertii) subtrahatur Primus. Nam* $a, b = c, x$, *erit* $a + x = b + c$, & *per Metathesim* $x = b + c - a$. *Sic si detur* $3, 5, 7$, & *quæratur quartus* x, *erit* $3, 5 = 7, x$, *hoc est* $3 + x = 5 + 7$, & *per Metathes.* $x = 5 + 7 - 3 = 12 - 3 = 9$.

330. COROLLARIUM III. *Tertius continue proportionalis obtinetur, si à duplo secundi subtrahatur primus, ut si dentur* 3, & 5, & *quæratur tertius* x, *erit* $3, 5 = 5, x$, *hoc est* $3 + x = 5 + 5$, *hoc est* $3 + x = 10$, & *per Metathesim* $x = 10 - 3 = 7$, universaliter: $a, b = b, x$ *erit* $a + x = 2b$, & $x = 2b - a$.

331. COROLLARIUM IV. *Medius proportionalis invenitur, si summa Primi & Tertii dividatur per 2, nam* $a, x = x, c$, *hoc est* $a + c = x + x$, *seu* $a + c = 2x$ & *dividendo* $\frac{a+c}{2} = x$, *sic sit dentur* 3 & 7, & *quæratur medius* x, *erit* $3, x = x, 7$, *hoc est* $3 + 7 = 2x$, *seu* $\frac{3+7}{2} = x = \frac{10}{2} = 5$.

SCHO-

SCHOLION.

332. *Liquet itaque ex his, quæ* (§. 326.) *monui eodem quoque modo ratiocinandum esse de progressionibus Arithmeticis, quemadmodum de Geometricis dictum, adhibendo videlicet, loco multiplicationis,* Additionem, *& in locum divisionis* subtractionem, &c. *igitur sit series Arithmetica crescens* a, b, c, f, g, h &c. *exprimetur hæc recte per substitutionem differentiarum, juxta doctrinam* (§. 278.) *declaratam.*

(printed above the series: d d d d d)

Sit	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
cresc.	a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$ &c.
In		2	2	2	2	2	2
Num.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13 &c.

Ex cujus contemplatione sequentia innotescunt Theoremata, ac Problemata.

333. THEOREMA I. Summa extremorum, est æqualis summæ quorumvis æque distantium ab extremis, aut (*si termini sint impares*) duplo medii. *Sic Summa primi & septimi est* - - - $a+a+6d=2a+6d$,
Summa secundi & sexti - $a+d, +a+5d=2a+6d$,
Summa tertii & quinti - $a+2d, +a+4d=2a+6d$,
duplum medii - $a+3d$, *seu* $(a+3d).2=2a+6d$,
idem patet in numeris.

334. THEOREMA II. Quivis terminus componitur ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt numeri terminorum dempto uno, *seu* est aggregatum ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt termini antecedentes. *Sic* E. g *terminus sextus* $a+5d$, *constat termino primo* a *plus quinque differentiis; quot nempe termini hunc antecedunt. Idem patet in Numeris. Ex his deducuntur sequentia Problemata.*

335. PROBLEMA I. Dato termino primo, & differentia rationis, invenire terminum quemvis. *Sit primus* $=a$, *differentia* $=d$, *numerus terminorum* $=n$, *terminus quæsitus sit* $=x$ Resolutio: *multiplicetur differentia per numerum terminorum una unitate mulctatum, & facto huic addatur primus, erit aggregatum, terminus quæsitus, id est* $(d.n-1)+a$, *hoc est* $dn-d+a=x$, *quæ est formula universalis pro quocunque termino, excepto primo; sit in numeris primus* $a=1$, *differentia* $d=2$, *& quæratur sextus, erit numerus terminorum* $6=n$, *adeoque* $a+nd-d=1+12-2=11$.

336. CO-

336. COROLLARIUM I. *Cum in data progressione ad libitum poni possit terminus quicunque pro ultimo, si is vocetur* $=u$, *erit generalis formula pro ultimo, seu maximo termino* $u=a+nd-d$. *Hinc terminus ultimus seu maximus eodem modo reperitur, quo quivis alius.*

337. COROLLARIUM II. *Quod si detur differentia* $=d$, *numerus terminorum* $=n$, *& terminus ultimus* $=u$. *& quæratur primus* x, *erit* $u=x+dn-d$, *& per Metathesim* $u-dn+d=x$, *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & à summa subtrahatur factum ex differentia, & numero terminorum, erit residuum æquale primo. Sit* $u=13$, *&* $d=2$, *&* $n=7$, *erit primus* $13-14+2=1$.

338. PROBLEMA II. Dato termino primo $=a$, dato ultimo $=u$, & dato numero terminorum $=n$ invenire differentiam; *sit quæsita differentia* $=x$, *erit* $u=a+xn-x$, *& per Metathesim* $u-a=xn-x$, *& dividendo per* $n-1$, *erit* $\frac{u-a}{n-1}=x$, *hoc est;* Ab ultimo subtrahatur primus, Residuum dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, erit quotus differentia. Ex. gr. *Sit primus* $a=1$, $u=13$, *numerus terminorum* $n=7$, *erit formula;* $\frac{u-a}{n-1}=\frac{13-1}{7-1}$, *hoc est* $\frac{12}{6}=2$.

339. PROBLEMA III. Dato termino primo $=a$, dato termino ultimo $=u$, & data differentia $=d$, invenire numerum terminorum; *Sit numerus terminorum quæsitus* $=x$, *erit* $u=a+dx-d$, *& per Metath.* $u+d-a=dx$, *& dividendo per* d, *erit* $\frac{u+d-a}{d}=x$, *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & subtrahatur primus, residuum dividatur per differentiam, erit quotus numerus terminorum. Sic si* $a=1$, $u=13$, $d=2$, *erit vi formulæ* $\frac{u+d-a}{d}=\frac{13+2-1}{2}=\frac{14}{2}=7$.

340. PROBLEMA IV. Dato termino primo $=a$, & ultimo $=u$, & numero terminorum $=n$, invenire summam omnium terminorum; *erit Resolutoria formula* $(u+a).\frac{n}{2}$ *seu* $\frac{nu+na}{2}$, *hoc est, ad ultimum addatur primus, & summa multiplicetur per dimidium numerum terminorum.*

341. PROBLEMA ULTIMUM. Dato termino primo $=a$, data summa omnium terminorum $=S$, & dato numero terminorum $=n$, invenire differentiam. *Sit hæc* $=x$, *itaque terminus ultimus* $=a+nx-x$, *per* (§. 336.) *adeoque summa omnium per* (§. 340.) $S=(2a+nx-x).\frac{n}{2}$, *hoc est*, $\frac{2an+nnx-nx}{2}=S$, *& multiplicando per* 2, *erit* $2an+nnx-nx=2S$, *& per Metath.* $nnx-nx=2S-2an$, *dividendo per* $nn-n$, *erit* $x=\frac{2S-2an}{nn-n}$, *quæ est formula resolutoria. Ut si sit* $S=49$, $a=1$, $n=7$, *erit vi formulæ*, $\frac{98-14}{49-7}=\frac{84}{42}=2$, *quæ est differentia terminorum.*

SCHOLION I.

342. *Doctrina progressionum à* §. 312. *hucusque tradita, procedit de omnibus etiam fractis. In his tamen, cum variæ esse possint, considerandi veniunt tam* numeratores, *quam* denominatores; *sunt enim quædam, in quibus manente eodem numeratore, denominatores progrediuntur in ratione vel Geometrica, vel Arithmetica, & sunt quædam, quarum tam numeratores, quam denominatores, vel tantum Geometrice, vel solum Arithmetice procedunt; sunt item aliæ, in quibus numeratores progrediuntur Arithmetice, denominatores verò Geometrice, aut vicissim &c. eæque omnes vel sunt crescentes, vel decrescentes, hujusmodi tamen progressiones, si series numeratorum, itemque denominatorum seorsim considerentur, iisdem gaudent regulis, quibus integri.*

SCHOLION II.

353. *Superest, ut de proportione* Harmonica *innuamus, quam multi, existimantes eam duntaxat* Musicis *famulari, tanquam cæteris scientiis parum utilem negligunt, non animadvertentes summum ejusdem usum in enodandis miris naturæ arcanis, quem satis quidem intelligo amplissimum. Tyronibus interea innuisse sufficiat, proportionem Harmonicam appellari, & quidem discretam, si differentia termini primi à secundo, ita se habeat* Geometrice, *ad differentiam tertii à quarto, ut primus ad quartum, aut in continua, differentia primi à secundo ad differentiam secundi à tertio, ut primus ad tertium, & quidem in ratione Geometrica. Sic harmonice proportionales sunt* $12, \overset{2}{,} 14 = 20, \overset{4}{,} 24$, *nam* $2:4=12:24$, *quæ est discreta. Item continua* $10, \overset{6}{,} 16 = 16, \overset{24}{,} 40$, *nam* $6:24=10:40$, *quæ si generaliter exprimatur per literas* $a, b=c, d$, *erit* $b-a$, $d-c=a, d$, *quæ est Geometrica, legibusque Geometricis tractanda; cujus ope*, quartus, tertius, *aut* medius *harmonice proportionalis inveniri potest, plura orctenus.*

CAPUT

CAPUT V.

De usu Regulæ Aureæ directæ, Inversæ, Simplicis, & compositæ, itemque de Regula Societatis.

344. Regula Aurea, vel Trium est proportio Geometrica, ut (§. 288.) dictum eaque, vel *simplex*, vel *composita*, *simplex* appellatur, quando datis tribus terminis quæritur quartus. *Composita* dicitur, quando datis terminis quinque, quæritur sextus, vel datis septem, quæritur octavus. Utraque hæc dividitur in *Directam*, & *Inversam*; *directa* appellatur, quando, ut primus est ad secundum, ita tertius ad quartum; *Inversa*, quando, ut tertius est ad primum, ita secundus ad quartum.

SCHOLION.

345. *Cum ea, quæ in commercium, usumque communem veniunt, sint* pretiis, temporibus, laboribus &c. *proportionalia, (qui enim duas ulnas emit, necesse est, ut unius ulnæ pretium duplum persolvat, qui tres, triplum &c. item, qui laborat duabus diebus duplam mercedem, qui tribus triplam meretur, & qui fodit duabus diebus, duplum laborem unius diei perficit, qui tribus, triplum &c.) sequitur, per regulam auream* (§. 288.) *seu per proportionem, recte quæsita inveniri, unde consequitur, ea, quæ per regulam auream indagantur, debere esse homogenea; male enim quis ratiocinaretur: urna vini constat 40 grosf. ergo 6 metretæ tritici, quanti erunt? cum urna vini, & metretæ non sint homogenea. Itaque ad praxim.*

Usus Regulæ Aureæ simplicis, & directæ.

346. Regula I. Termini ordine in quæstione proposito in proportionem ordinentur. II. Multiplicetur tertius per secundum, factum dividatur per primum (§. 288.) quotus erit terminus quartus quæsitus. III. Si occurrant ordinandi termini mixti heterogenei reducibiles, reducantur ante ad speciem minimam omnes termini homologi. *Vide Exempl. II.* IV. Si fractiones immisceantur, reducantur ante ad eandem denominationem, aut tractentur per (§. 148.)

EXEMPLUM I.

3 *Ulnæ panni constant fl.* 7, *ergo* 9 *Ulnæ, quanti veniunt?*

uln. fl. uln.

erunt ordinati $3:7=9:x$, *adeoque per Reg. II.* $x=\frac{7.9}{3}=\frac{63}{3}=21$,

uln. fl. uln. fl.

ergo $3.7=9:21$, *examen fit per* (§. 286.)

EXEM-

EXEMPLUM II.

2 Libræ, & 12 Loth aromatum (ponderis civilis) constant flor. germ. 15, & 24 xr. quanti erunt 5 Libræ cum 30 Loth ejusdem speciei aromatum?

Itaque terminos hos Reducendo juxta Reductionum Tabul. III. & IX. (§. 141. *Arithm.*)

erunt 2 *Libræ* & 12 *Loth* = 76 *Loth*
15 *flor.* & 24 *xr.* = 924 *xr.*
5 *Libræ* & 30 *Loth* = 190 *Loth.*

Unde $\overset{Loth}{76} : \overset{xr.}{924} = \overset{Loth}{190} : x$, & *hinc* $x = \frac{924 \cdot 190}{76} = \frac{175560}{76} =$ 2310 *xr. id est* 38 *fl.* & 30 *xr.*

Regula aurea simplex Inversa.

347. *Cognoscitur esse inversa per* (§. 344.) & *plerumque ratione temporis occurrit, quo opus aliquod citius, tardiusve perficiendum est; ut si quæras, 4 Murarii exstruunt domum 10 Mensibus, ergo 8 Murarii, quot mensibus construent eandem domum? video itaque inversam, cum 8 Murarii longe breviore (quam 10 Mensium) tempore opus absolvere debeant, sunt nempe Menses in ratione inversa Murariorum, hoc est, ut 8 Murarii ad 4 Murarios, ita 10 Menses ad Menses quæsitos. Itaque*

348. Regula unica: Ordinentur termini ita, ut tertius in quæstione terminus fiat primus, & primus fiat secundus; cætera fiant, ut in regula directa. Vel (*secundum vulgus Arithmeticorum*) ordinentur termini ordine in quæstione proposito; tum multiplicetur primus per secundum, & factum dividatur per tertium.

EXEMPLUM I.

Operæ 100 intra 8 Dies excolunt vineam, ergo 50 Operæ, quot Diebus.

Erit, ut $50 : 100 = 8 : x$, *hoc est* $x = \frac{100 \cdot 8}{50} = \frac{800}{50} = 16$ *dies.*

EXEMPLUM II. VULGARI METHODO.

Militibus 125 pro diebus 10 sufficiunt centum metretæ, ergo 625 Militibus, quot diebus sufficient?

erit vulgo, $125 : 10 = 625 : x$, *hoc est* $\frac{10 \cdot 125}{625} = \frac{1250}{625} = 2.$

P *Usus*

Usus Regulæ compositæ Directæ.

349. *Regula composita juxta (§ 344.) tunc utimur, quando datis 5, vel 7 terminis quæritur sextus, vel octavus, quæ (si omnes termini sint in ratione directa) appellatur* Directa. *Ad hujus rectum usum cumprimis videndum, quis sit terminus* solitarius? *terminum autem* solitarium *voco, cui* homogeneus *est terminus quæsitus. Itaque*

350. Regula I. Termini omnes, qui ad solitarium spectant, multiplicentur inter se, *(excepto solitario)* & factum ponatur primo loco, in secundo loco ponatur terminus solitarius, tertio loco ponatur productum ex terminis, qui pertinent ad quæsitum. Reg. II. Sic reducti termini, & hoc ordine positi tractentur, ut in Regula aurea simplice directa. (§. 346.)

EXEMPLUM.

1000 *fl. per annos* 4 *dant* censum 200 *florenos? ergo* 3500 *floreni per annos* 6 *quantum* censum *dabunt? In hac quæstione census* 200 *fl. est solitarius, cum quæratur census.*

fl. an. cens. fl. an. cens.

Itaque $(1000 \cdot 4) : 200 = (3500 \cdot 6) : x$

hoc est $4000 : 200 = 21000 : x$

unde per (§. 346.) $x = \dfrac{21000 \cdot 200}{4000} = 1050$ *fl. cens.*

Regula composita Inversa.

351. Regula Unica: Videatur, qui termini sint in ratione inversa aliorum, hi ante reductionem transponantur ita, ut terminus pertinens ad solitarium, transferatur ad terminos pertinentes ad quæsitum, & vicissim terminus pertinens ad quæsitum transferatur ad terminos solitarii, quo facto per Reg. I. (§. 350.) reducantur, reducti in proportionem ordinentur, & tractentur, per regulam compositam directam.

EXEMPLUM.

8 *Messores demetunt* 50 *jugera intra dies* 10, *igitur* 16 *messores, jugera* 150 *quot diebus demetent. In hac solitarius est* 10 *dies, cum quæsitus sint dies. Itaque video dies quæsitos esse in ratione inversa messorum, & hinc.*

mess. jug. dies mess. jug.

ut $(16 \cdot 50) : 10 = (8 \cdot 150) : x$

hoc est $800 : 10 = 1200 : x$, *seu* $x = \dfrac{12000}{800} = 15$ *dies.*

SCHOL-

SCHOLION.

Habetur quoque methodus resolvendi quæstiones compositas per repetitas regulas simplices, sed hæc docentis viva voce, aut lectione authorum facile intelligitur.

Usus Regulæ Societatis simplicis.

352. *Regula* Societatis *(quæ etiam proportio est) appellatur, quando bini, vel plures societatem ineunt lucri causa, conferendo ad faciendum lucrum pecunias particulares, dein elapso certo tempore factum lucrum partiendum est inter socios pro rata collatæ cujusvis pecuniæ.*

353. REGULA. Primo loco semper ponatur tota summa collatorum omnium; secundo loco semper lucrum totale, tertio cujusvis collatum particulare, pro quo quæritur. Hinc quot sunt socii, toties dicto modo regula repetenda est. Itaque

EXEMPLUM.

Tres Mercatores Pterilus, Ponticus, & Cosmophilus inita societate conflarunt summam 1000 *fl. Pterilus contulit* 240 *flor. Ponticus* 300, *Cosmophilus* 460, *hac summa lucrati sunt uno anno omnes simul* 2000 *fl. quæritur quid singuli? Itaque Proportiones pro singulis sic ordinantur:*

Pro Pterilo ut.	$1000 : 2000 = 240 : x$	*prodit lucr.* -	480
Pro Pontico ut.	$1000 : 2000 = 300 : x$	*fit lucr.* -	600
Pro Cosmophilo	$1000 : 2000 = 460 : x$	*habetur* -	920
		Lucrum omnium =	2000

Regula Societatis composita.

354. In hac præter collatum singulorum occurrit etiam tempus, pro quo singuli contulerunt. Hinc antequam termini ad proportionem ordinentur, singulorum collatum per suum tempus multiplicetur, & factum ponatur loco tertio, cætera fiant, ut in regula Societatis simplice.

EXEMPLUM.

Iidem Mercatores alio pacto inierunt societatem, ita, ut Pterilus contulerit - - - *fl.* 100 *pro mens.* 19.
Ponticus - - *fl.* 130 *pro mens.* 10.
Cosmophilus - - *fl.* 300 *pro mens.* 6.

Exacto hoc tempore lucrati sunt simul fl. 10000 fl. quantum singuli? ut habeatur collatum singulorum, & summa totalis collata.

Fiat	100 . 19	*hoc est*	1900	*Pterili collatum.*
	130 . 10	- -	1300	*Pontici.*
	300 . 6	- -	1800	*Cosmophili.*
	Summa collat.		5000	

Itaque pro Pterilo	$5000 : 10000 = 1900 : x$	*fit* 3800.
Pontico	$5000 : 10000 = 1300 : x$	*fit* 2600.
Cosmoph.	$5000 : 10000 = 1800 : x$	*fit* 3600.
	totum lucrum =	10000.

SCHOLION.

355. *Cum usus Regularum frequenti exercitio condiscatur, nobis autem prolixioribus esse non liceat, idcirco selectissima ad usum exempla, & quæstiones,* Exercitationibus Arithmeticis *in gratiam nostrorum discipulorum edendis, reservamus, quibus Methodum Italicam, & cætera compendia, ac praxes adjungemus.*

CAPUT ULTIMUM.

De Inventione Theorematum, ac Problematum.

356. *Inventio Theorematum, ac Problematum adeo propria est Algebræ, ut nullam fere Æquationem reperias, quæ vel Theorema insigne, aut utile aliquod Problema non eloqueretur, modo mentem advertamus. Itaque tribus (ut ajunt) verbis doctrinam hanc complectar:* Tracta quantitates componendo, æqualia pro æqualibus substituendo, & composita in analogiam, seu proportionem resolvendo, & artem reperisti. *Quapropter*

357. *Ad* Compositionem *pertinent* Additio, *cujus ope reperta habentur Theoremata* (§. 231, 233. &c.) Subtractio *per quam detecta habentur Theor.* (232, 234. &c.) Multiplicatione, & Divisione *innotuerunt Theor.* (§. 182.), & *reliqua potentiarum doctrina, item omnia Partis IV. de proportione.*

358. *Virtutem* Substitutionis *æqualis pro æquali declarant* (§ 247, 248.) & *demonstrationes proportionum a* (§. 276.) *ad Caput V.*

359. *Infinitum prope Problematum numerum a formularum in analogiam seu proportionem* Resolutione *emanare, nemo est Mathematicorum, qui ignoret; quarum quidem resolutionum artificium in*

neo consistit, ut ita termini resolvantur, & in proportionem ordinentur, ut factum extremorum, semper sit æquale facto mediorum, quemadmodum a (§. 291.) *ad Cap. V. ostensum est. Hic animadvertendum præterea, quod si formula per Hypothesim divisionis expressa in analogiam solvenda, totus divisor pro* primo, *reliqui factores Numeratoris, seu dividendi*, secundo, & tertio *loco constituantur. Sic hæc* Ex. gr. *Æquatio* $x = \frac{ad-dc}{a-b}$ *ita resolvetur*; $a-b : a-c = d : x$, *aut* $a-b : d = a-c : x$, *item hæc* $x = \frac{a}{b}$, *ita* $b : a = 1 : x$, *item* $\frac{3ab}{2c}$, *ita* $2c : 3a = b : x$, *vel* $2c : 3b = a : x$, *vel* $2c : 3 = ab : x$, *ut patet. Sed hæc, & cætera docentium industriæ una cum reflexionibus, relinquo.*

359. *Ut fidem* (§ 84.) *datam exsolvam, sint ope Analysis demonstranda Theoremata.*

360. THEOREMA: Quantitas positiva per negativam, vel vicissim multiplicata, dat negativum productum, *hoc est* $(a-b).+c$, *dat productum* $+ac-bc$; *cum cuicunque quantitati æqualis assignari possit aliqua quantitas, sit illa* d, *erit* $a-b = d$, & *per Metathesim* $a = d+b$ & *per* $+c$ *multiplicando utramque partem, erit* $ac = dc+bc$, & *per Metathesim* $ac-bc = dc$, *unde cum inter* $a-b$, & d *fuerit æqualitas*, & *iterum inter* $ac-bc$, & dc *sit æqualitas, sequitur multiplicando* $a-b$ *per* c, *fieri debere* $ac-bc$, & *non* $ac+bc$.

361. THEOREMA. Quantitas negativa per negativam multiplicata, dat positivam: *hoc est* $(a-b).-c$ *dat* $-ac+bc$. *Sit* $a-b = d$, *erit per Metathesim* $a = d+b$, *multiplicetur pars utraque per* $-c$, *erit per prius demonstrata* $-ac = dc-bc$, & *per Metathesim* $-ac+bc = -dc$, *sed* $-ac+bc$, *est factum ex* $a-b$ *in* $-c$, *ergo.*

362. THEOREMA. Factum duarum fractionum $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, *esse debet* $\frac{ac}{bc}$, *ut* (§ 140, & 141) *dictum.*

DEMONSTRATIO. *Omnis fractio est Ratio Geometrica per* (§. 272.) *Ratio verò Geometrica est divisio per* (§ 272.) *sed in divisione divisor est ad dividendum, sicu unitas ad quotum, per* (§. 60. Arithm.) *unde,*

fractio $\frac{a}{b}$ *resolvitur in hanc* $b . a = 1 : \frac{a}{b}$ *per* (§ 288.)
& $\frac{c}{d}$ *resolvitur in hanc* $d : c = 1 : \frac{c}{d}$ *per* (§ 288.)
ergo per (§. 296) $b.d) : (a.c) = (1.1) . \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$
hoc est - - $bd : ac = 1 : \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$
seu - - $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ *quod erat Demonst.*

 SCHO-

SCHOLION.

362. *Ex his, & cæteris hucusque declaratis, ſatis liquet* Arithmeticam numericam *omne ſuum pretium* Algebræ *debere, quanta verò incrementa cæteræ diſciplinæ ab Analyſi ſumpſerint, erudita Recentiorum volumina his formulis locupletata, loquuntur. Poſtremum Tyronibus proficere volentibus tam in Arithmetica numerica, quam literali non inutile cenſui quosdam Authores indicare, à quibus, quæ à me ob temporis anguſtias, neceſſario, aut prætermittenda, aut certe ſtrictim pertractanda fuere, petere valeant. Itaque Arithmeticam ad captum Tyronum præclare concinnârunt*, P. Chriſtophorus Clavius, è S. J., *cujus* Epitome Arithmeticæ practicæ, *ſæpiſſimè recuſa, Authorem à facilitate doctrinæ commendat; Theoriam praxi junxit,* R. P. Andreas Tacquet, S. J. *in ſua* Theoria, & praxi Arithmetices. *Arithmeticam, & Algebram in uſum Tyronum dedere* R. P. Eraſmus Frœlich, è S. J. *ſub Titulo:* Introductio facilis in Matheſim Viennæ 1746. *in 8vo, Opuſculum ſingulare.* Crivellii Elementa Arithmeticæ numericæ, & literalis, *latine, & auctiora reddita Viennæ 1745. in 8vo.* R. P. Lechi, è S. J. Arithmetica univerſalis Neutoni. *His accedunt* Tabulæ Mnemonicæ ex Primis univerſæ Matheſeos Elementis concinnatæ à R. P. Philippo Steinmeyer, S. J. Auguſtæ Vindel. 1750. *in 8vo. Cel. D. L'Abbé de la Caille Inſtitutiones Mathematicæ* Viennæ latine redditæ à R. P. Carolo Scherffer è S. J. *in 4to.*

Curſus Mathematici commendantur: R. P. Caſpari Schotti, è S. J. & R. P. Claudii Milliet Dechales, è S. J. *Notiſſima ſunt* Illuſt. Chriſtiani Wolffii Elementa Mathematica, & eorundem Compendium; *item* Ozanam Cours de Mathematique; Inſtitutiones Matheſeos Weidleri, & Wiederburgii; *item* Poetii Introductio in Arithmeticam Idiomate Germ. è quibus ſingulis prima Matheſeos Elementa, ſi quando Tyrones petent, meminiſſe una mecum velim, moniti D. Pauli:

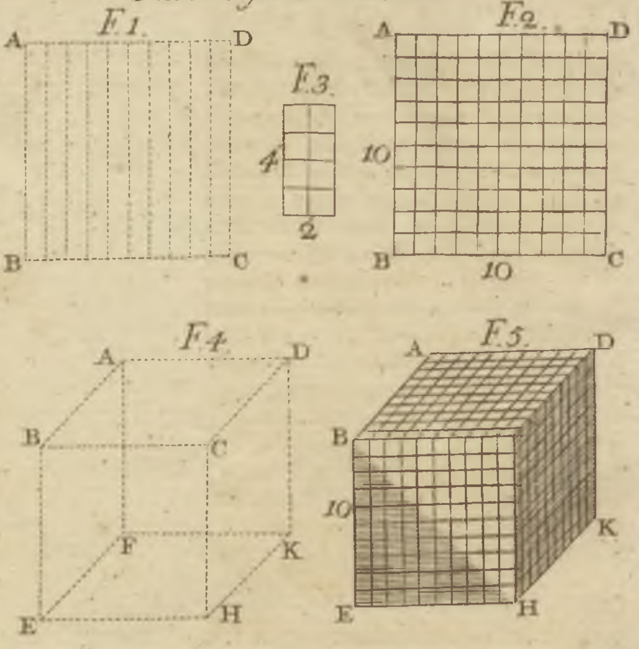
Omnia in Gloriam DEI facite.

I. Cor. 4. v. 31.

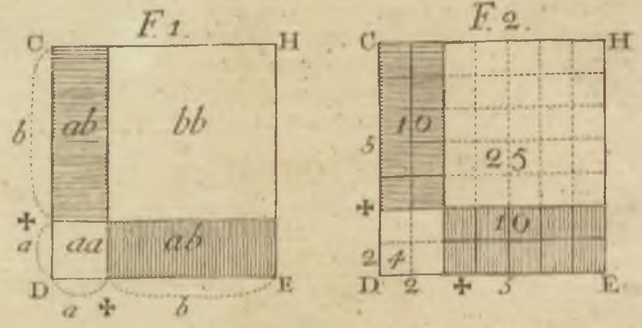
FINIS ELEMENTORUM ALGEBRÆ.

INDEX

Tabula Logisticæ Decimalis.



Tabula Algebræ.



INDEX PROBLEMATUM.

PARTIS I.

De Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.

PARTIS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

PARTIS III.

De Analysi speciosa seu arte Resolvendi Problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

Regulæ

PARTIS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

De Progressione Geometrica.

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

De Regula Aurea.

O. A. M. D. G.

AP-

APPENDIX.

EXERCITATIONES ARITHMETICÆ

Quibus pertractantur

Varia Compendia Arithmetica, Praxes Regulæ Aureæ quamplurimis Quæstionibus œconomicis, & ad usum Civilem, ac Mercatorum applicatis declaratæ; His accedit Regula Rabbatæ, Annatocismi, & Juris Civilis de quarta falcidia.

AD

USUM PRIVATUM STUDIOSÆ JUVENTUTIS

Conscriptæ & editæ Claudiopoli Anno 1755.

à

R. P. MAXIMILIANO HELL e S.J.

MONITUM
AD
TYRONES SUOS.

Habetis Exercitationum Mathematicarum Partem Primam vobis à me pag. 301. §. 355. Elementorum Algebr. promissam. Arithmeticas hæc praxes complectitur primarias, daturus in Parte altera (si DEO visum fuerit) cæteras, vestris quidem usibus, qui Algebra, seu arte hæc Marte proprio inveniendi, tincti estis, haud necessarias, non tamen inutiles, vel ideo, ne à vobis, qui sublimia tenetis, humilia hæc desiderentur, quæ vulgus Arithmeticorum summa hactenus existimabat. Formulis Algebraicis, vobis charissimis, consulto abstinui, contentus inventa dedisse, arte inveniendi dissimulata, ne divinam hanc scientiam imperitæ turbæ Arithmeticorum ea carpentis, contemnentisque, quorum ignorantiam fateri pudet, calumniis exponerem; Nóstis artem, sacram in usus vestros servatote; Gemmarios vos putatote, obtrectatores cæteros, emblemate gallinæ Æsopicæ notatos, si sapere velint, errorem subinde dedocetote. Valere vos cupio ad DEI Gloriam Majorem per vos, vestrosque conatus augendam. Fruimini his ad Religionis, Patriæque Vestræ bonum promovendum.

IN-

INDEX CAPITUM.

EXER-

EXERCITATIONES ARITHMETICÆ.

CAPUT I.

Compendia quædam quatuor Algorithmorum Arithmeticæ integrorum.

Finis omnium compendiorum eſt, operationes, quam breviſſimo tempore abſolvere. Facimus autem compendium temporis. 1. Si operationes, quæ ſeorſim peragendæ forent, ſimul perficiamus. 2. Quæ per plures operationes fieri ordinarie ſolent, per pauciores, omiſſis quibusdam fiant. 3. Quæ per difficiliores perficiuntur via vulgari, per faciliores, & ſtrictiores peragantur. E triplici hoc capite judicium ferendum de compendiis; multa namque vulgo nomine compendii veniunt, quæ recto judicio inter diſpendia potius referenda ſunt, niſi velimus exercitationem pro compendio habere, qua exercitatus, etſi per ambages operans, Tyroni, compendioſo modo easdem operationes facienti, celeritate antecedit. Nobis hic (præter ea, quæ Elementis noſtris Math. inſeruimus) de veris quibusdam compendiis Arithmeticæ agendum, quæ ex certis Principiis Algebræ innotuere, nihil derogando iis, quæ me latent, aliique cum fructu uſurpant. Itaque

PROBLEMA I.

1. *Additionem, & Subtractionem plurium numerorum una abſolvere.*

Resolutio.

Sint dati Addendi quotcunque A, B, C, D, à quibus ſubtrahendi ſunt quotcunque E, F, G.

Primo, fiat collocatio Addendorum, ut in Additione fieri ſolet, dein ducta linea, collocentur infra hos eodem ordine numeri ſubtrahendi, & linea ſubducantur, ut in Paradigmate.

PARA-

PARADIGMA.

A	1.4 5	*Addendi.*
B	5.6. 2	
C	3 8 7	
D	9 2 4	
E	1.5.6	*Subtrahendi.*
F	2 3	
G	7 3 4	
Resid.	1 1 0 5	

Inchoëtur ab unitatibus ſubtrahendorum,. quæ in unam ſummam collectæ efficiunt 13, ubi, cum una decas emerſerit, rejiciatur hæc ad ſequentem claſſem decadum, quæ rejectio fit tantum ponendo punctum (ut hic ad numerum 5 factum eſt) idque toties, quoties decas emergit; numerus vero 3, qui reliquus eſt ex collectis unitatibus, ſubtrahatur ſtatim ab unitatibus Addendorum, nempe 3 a 4, manet 1, hoc reſiduum, & reliqui Addendi colligantur in unam ſummam, qui dum colliguntur, quoties in decadem excreſcunt, toties in aliqua nota decadum ponatur punctum, numerus vero ex collectis unitatibus reſiduus, ponatur in loco Reſidui, ut numerum 5, hic poſitum vides.

Dein fiat item eodem modo collectio decadum in ſubtrahendo, numeri autem puncto ſignati, habeantur pro auctis una unitate, & quoties decades excreſcunt ad decadem, toties aliqua nota in centenariis notetur puncto, numerus vero e rejectis decadibus reſiduus ſubtrahatur iterum à numeris decadum Addendorum, *ut hic* 1 à 2; reliqui verò numeri in Addendo eadem ratione colligantur, & quoties excreſcunt in decadem, toties numerus aliquis in centenariis puncto ſignetur, numerus autem e collectis decadibus reſiduus, aut (ſi nihil ſuperſit) zerus, ponatur in loco Reſidui, *ut hic zerum ſcriptum vides.* Eodem modo procedatur cum centenariis, millenariis &c. & habebitur Reſiduum totale,

totale, in nostro quidem Paradigmate 1105; e qua operatione liquet compendium, & praxis à vulgari modo operandi distincta.

SCHOLION.

2. *Cætera compendia Additionis, aut subtractionis, quæ ope Machinarum Arithmeticarum, aut per circinum Proportionis, vel etiam per Rabdologiam Neperianam vulgo celebrantur, nos inter dispendia referimus, propterea, quod plurinum temporis in dispositionem machinæ, vel collocationem calculorum &c. insummatur.*

PROBLEMA II.

3. *Multiplicationem per compendia instituere.*

COMPENDIUM I.

Multiplicationem, & Additionem factorum partialium simul absolvere.

Sit Multiplicandus	2 3 4 5
Multiplicans	2 4 8
Factum	$\cancel{1}$ 8 $\cancel{7}$ 6 0
581560	$\cancel{1}$ $\cancel{1}$ $\cancel{2}$ 5
	5 8 1

Itaque fiat multiplicatio per numerum 8, ut alias, factumque 18760 subscribatur, ut methodo ordinaria; dein fiat multiplicatio per sequentem numerum 4, dicaturque 4 per 5 dat 20, & 6 (numerus videlicet ex primo producto infra multiplicantem 4 scriptus) dat 26, itaque relicto numero 6 in primo producto, mente retineatur numerus 2, (seu 20.) Deinde dicatur 4 per 4 dat 16, & cum 2 mente retentis dat 18, & additis 7 (qui est tertius in primo producto) facit 25, scriptoque 5 infra 7, & delendo numerum 7, mente iterum retineatur 2, (seu 20.) Porro 4 per 3, dat 12, & cum 2 mente retentis, facit 14, additisque 8 ex primo producto, fiunt 22, scriptis itaque 2 infra 8, & numero 8 deleto, mente iterum retineatur 2 (seu 20) demum 4 per 2, dat 8, & cum 2 mente retentis dat 10, additaque ex primo producto 1, efficitur 11, qui numerus integer, utpote ultimus, subscribatur, numerus vero 1, ex primo producto deleatur.

Progrediendo ad tertiam multiplicantis notam 2, dicatur iterum 2 per 5 dat 10, & additis ex producto ſecundo 5, fiunt 15, relictis itaque in producto ſecundo 5, mente retineatur 1; porro 2 per 4 dat 8, & cum 1 mente retenta, facit 9, atque cum 2, (numero nempe ſecundi producti) fiunt 11, adſcripta ergo 1, & mente retenta altera unitate (ſeu 10) dicatur 2 per 3 dat 6, & cum 1 (mente retenta) fiunt 7, & addita unitate ex producto ſecundo, habetur 8, quo ſubſcripto, & ex producto ſecundo deleta unitate, dicatur 2 per 2 dat 4, & 1, ex ſecundo producto, fiunt 5, atque deleta unitate producti ſecundi, erunt numeri, qui deleti non ſunt, nempe 581560 productum totale.

Methodo hac, ſi exercitium accedat, ſatis celeriter abſolvitur multiplicatio.

EN EXEMPLUM II.

```
      3 2 7 5
        8 9 4
    ---------
    1 3 1 0 0        factum
  3 0 7 8 5          2927850
2 9 2
```

COMPENDIUM II.

4. Multiplicatio ferè ſola ſubtractione unica peragitur in caſu, quo multiplicans proxime accedit ad numerum aliquem ſimplicem, ſunt autem numeri ſimplices, unitas cum zeris, ut 10, 100, 1000, 10000 &c.

Sit multiplicandus 89473 per 9. Itaque cum multiplicans 9 accedat ad numerum ſimplicem 10, adjiciatur multiplicando unus zerus, & ab hoc aucto jam per zerum, ſubtrahatur idem multiplicandus non auctus zero. Erit Reſiduum productum, quod prodire debet, ſi multiplicaretur per 9.

EN

EN EXEMPLUM.

Multiplicandus	8946730	*auctus zero.*
idem multiplicandus	894673	*sine zero.*
Residuum	8052057	*seu Productum.*

Eodem modo sit multiplicandus 536789 per 99, quia 99 accedit ad 100, adjiciantur multiplicando zeri duo, & idem multiplicandus non auctus zeris subtrahatur, & habebitur productum, ut in Exemplo

	53678900
	536789
Product.	53142111

Et hinc universaliter: quot zeros habet numerus simplex, ad quem accedit multiplicans, tot zeri multiplicando adjiciantur.

Ratio autem hujus compendii est, quia adjiciendo zeros, multiplicandus reipsa multiplicatur per 10, vel 100, vel 1000 &c. adeoque loco 9 multiplicatur per 10, loco 99, multiplicatur per 100, & sic porro, cum itaque, multiplicare *Ex.gr.* per 10, loco 9, sit totum multiplicandum semel plus accipere, quam deberet accipi, ideo, multiplicandus semel subtractus, relinquit Residuum, quasi per 9 fuisset multiplicatum; idem dicendum, si multiplicari deberet per 99, vel 999.

SCHOLION.

5. *Eodem modo absolvitur multiplicatio, etsi multiplicans deficiat duabus, tribus, quatuor &c. unitatibus a numero simplice, tali enim casu ante, quam multiplicandus subtrahatur, is multiplicari debet per illas unitates, quibus deficit. Ut sit multiplicandus* 58345, *per* 98, *quia* 98 *deficit a* 100 *per* 2, *multiplicetur* 58345 *per* 2, *& hoc factum subtrahatur ab priore multiplicando zeris aucto. Ut Exemplum docet.*

EXEMPLUM I.

	5834500	
	116690	*id est* 58345 *per* 2
Productum	5717810	

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sit multiplicandus	789457	*per* 997
erit	789457000	
ſubtrah.	2368371	*id eſt* 789457 *per* 3
Productum	787088629	

COMPENDIUM III.

6. *Si tam multiplicandus, quam multiplicans accedunt proxime ad numerum aliquem ſimplicem.*

Sit Mnltiplicandus 998 per 987, ponatur itaque numerus proximè ſimplex primo loco, huic immediate ſubſcribantur factores, ut hic factum vides.

Numerus ſimplex	A 1000		
	B 998	2	*differentiæ.*
	C 987	13	
	985026		

Subtrahatur factor B ab A, & ejus Reſiduum ſeu differentia 2 ponatur ad latus ejusdem; eodem modo ſubtrahatur C ab A, & ejus Reſiduum 13 ponatur eidem ad latus, dein multiplicentur hæc duo reſidua ſeu 13 per 2, & productum 26, ſcribatur ordine infra datos factores, demum minor differentia 2 ſubtrahatur à minore factore 987, & Reſiduum 985 ita ſcribatur, ut ſiniſtima nota reſidui 5 veniat infra unitatem numeri ſimplicis, cætera vero loca intermedia, ſi vacua ſint, inter hoc Reſiduum, & inter productum ex differentiis, expleantur zeris, ut hic uno zero, expletum vides.

Sic quoque habetur, ſi Multiplicandus ſit 9984 per 9992, vel viciſſim

EN EXEMPLUM.

Numerus ſimplex	10000			
	9984	16	*factum ex different.*	
	9992	8		128.
Productum	99760128			

SCHO-

SCHOLION.

7. *Hic modus brevior adhuc reddi poteſt, ſi nempe minori factori tot zeri apponantur, quot ipſe notas numericas habet, dein eidem ſic zeris aucto, ſuperſcribatur major factor, ejusque differentia à numero ſuo ſimplici ad latus ejusdem ponatur, per hanc differentiam multiplicetur minor factor (ſecluſis zeris, quibus auctus eſt) Productum hoc ſubtrahatur a minore factore jam zeris aucto, erit Reſiduum* Productum, *quod quærebatur.* Vide Exemplum.

Sit multiplicandus	995 *per* 897	
erit Major	995	5 *differentia à* 1000.
Minor zeris auctus	897.000	
ſubtrahendus	4485	*id eſt* 897 *per* 5.
Productum	892515	

Ratio hujus utiliſſimi compendii eadem eſt, quæ Compendii II. Superſcriptio factoris majoris tantum claritatis gratia hic in Exemplo facta eſt, quæ in praxi omitti poteſt, modo ſciatur ejusdem differentia, à numero ſimplice.

COMPENDIUM IV.

8. Inter compendia cenſeri poteſt modus multiplicandi, vi cujus, duæ notæ multiplicantis in unam contrahuntur, adeoque lucrifit multiplicatio una particularis; ſed hic modus rarior eſt, cum multiplicans debeat eſſe ejusmodi, ut duæ notæ relictæ ſint factum, ex altero numero multiplicantis, & alio quovis numero *Ex.gr.* ſit multiplicans 36, 4 hic poteſt contrahi in factorem 4, & alterum 9, quia electo numero 4 reliqui duo nempe 36, rectè ſunt factum ex 4 per 9. Item ſi multiplicans eſſet 856, electo numero 8, reliqui 56, contrahi poſſunt in numerum 7, quia 8 per 7 dat 56; ſed præterea notandum, quod is, qui hac methodo utitur, & ordinem peculiarem ſubſcribendorum factorum partialium obſervandum habeat, & ſimul ordinem multiplicandi, ut in Exemplis clarum fiet.

EXEMPLUM I.

Multiplicandus 56342 (36, 4 *multiplicans.*
225368 (4
2028312 (9
Productum 20508488

Scilicet: quia in numero 364, electo numero 4, binæ notæ 36, ſunt factum ex 4 per 9, ideo multiplicatio abreviari poteſt multiplicando primo per 4, dein hoc productum iterum multiplicando per 9, ut factum eſt in Exemplo.

EXEMPLUM II.

Sit multiplicandus 23453 *per* 856
erit 23453 (8,56
187624 (8
1313368 (7
Productum 20075768

In hoc exemplo, quia numerus 8 ex 856, occupat locum centenariorum, ideo initium ſcribendi in producto factum eſt in loco centenariorum, ſecundum vero productum in loco unitatum.

COMPENDIUM V.

9. Ordinarium Compendium Arithmeticorum eſt, per diſperſionem in factores, quos vocant *partes aliquotas*; ſi nempe multiplicans ſit numerus compoſitus, qui per multiplicationem aliorum numerorum produci poteſt, ſic *Ex.gr.* numerus 24 eſt compoſitus ex 3 & 8, vel ex 4 & 6, quia 3 per 8 dat 24, & etiam 4 per 6 dat 24, quod ſi itaque hujusmodi multiplicans occurrit, ſolvatur is in ſuos factores partiales, & per hos multiplicandus ſucceſſive multiplicetur, id eſt, primo multiplicetur per unum factorem, productum hoc per alterum, & iterum hoc ſecundum productum per tertium factorem, atque ita porro, erit productum ultimum

mum factum quod petebatur. In hoc compendio lucrifit Additio, quæ omittitur.

En Exemplum.

Sit multiplicandus	2574 *per* 24		*vel*	2574 *per* 24	
erit	7722	(3	*etiam*	10296	(4
Productum	61776	(8	*Product.*	61776	(6

Compendium VI.

10. Non minus usitatum habetur compendium per dispersionem in *partes aliquantas*, quando multiplicans dispergitur in suas partes ita, ut per additionem collectæ iterum restituant totum multiplicantem, *Ex. gr.* si numerus 24 dispergatur in 20 & 4, aut in 12 & 6 & 6 &c. item si numerus *Ex. gr.* 276, solvatur in 6, in 30, & 240, quæ simul additæ faciunt 276, en itaque modum multiplicandi ope hujus dispersionis.

Sit Multiplicandus	4325	*per*	276	*multiplicantem.*
	25950	6	6	*Pars prima.*
	129750	5	30	*Pars secunda.*
	1038000	8	240	*Pars tertia.*
	1193700			

Videlicet; disperso multiplicante 276, in *partes aliquantas* 6, 30, & 240, multiplicetur multiplicandus primo per 6, deinde, quia 6 in secunda parte nempe in 30 continetur quinquies, multiplicetur iterum hoc primum productum per 5, porro, quia secunda pars nempe 30 in tertia parte nempe 240 continetur octies, productum secundum iterum multiplicetur per 8, deinde facta partialia in unam summam collecta dabunt productum totale. Animadvertendum tamen, quod in omnibus factis partialibus initium scribendi fieri debeat ab unitatibus, si factores per quos multiplicantur, sint unitates, ut factum vides in nostro Exemplo.

SCHO-

SCHOLION I.

11. *Hic modus ultimus, etsi nullum videatur esse compendium in numeris abstractis multiplicandis, ut consideranti patet, habet tamen suam utilitatem in numeris mixtis propterea, quod utens hoc compendio nulla opus habeat Reductione numerorum mixtorum instituenda ante vel post multiplicationem; videatur subjectum exemplum.*

Sint multiplicandi	36 *fl. Germ.*	18 *gr.*	2 *xr.*	*per*	245
	184,	13,	1,	5	5
	1477,	6,	2,	8	40
	7386,	13,	1,	5	200
Productum	9048,	13,	1		

Primo, multiplicando omnes species per 5, videlicet 2 xr. per 5 dant 10 xr. hoc est 3 gr. 1 xr. & subscripto 1, mente retineantur 3, deinde 18 pr. per 5, dant 90 gr., additis 3, fiunt 93 gr. hoc est 4 fl. & 13 gr. & subscriptis 13, mente retineantur 4, deinde 36 fl. per 5 dant 180, & additis 4, fiunt 184; Eodem modo hoc primum productum (nempe 184 fl. 13. gr. & 1 xr.) multiplicetur per 8, & Productum hoc secundum, iterum per 5, demum singula producta in unam summam collecta dabunt Productum totale.

Idem Exemplum per dispersionem aliam, quae variari potest.

36 *fl.*	18 *gr.*	2 *xr.*	*per*	245
184,	13,	1	6	5
1108 ·	—	—	5	30
7756	—	—	7	210
9048,	13,	1		

Quod si fiat dispersio in partes aliquotas per Compendium V. eodem modo, & quidem compendiosus multiplicatio mixtorum absolvitur. Ut sit idem Exemplum per Compendium V. factum.

36. *fl.*

	36 *fl.*	18 *gr.*	2 *xr.*	*per*	245	*nam factores* 5 & 7 & 7 *producunt* 245.
	184,	13,	1	5		
	1292	13	1	7		
Product.	9048	13	1	7		

SCHOLION II.

12. *Non me latent cumplures modi dispersionis numerorum mixtorum in* partes partium, &c. *quibus* Monetarii, Cambiatores, *cæterique in officinis ponderum, monetarum* &c. *versantes* Ministri, *cum fructu utuntur, verum, quia hi modi determinatæ speciei*, Ponderum, Valorum &c. *inhærent, his referendis supersedemus propterea, quod, quemadmodum usus horum compendiosus est, ita instructio prolixa nimis, Tabulisque compluribus adhæc concinnandis opus habet; quapropter Tyrocinia hujusmodi Arithmetices, iis relinquimus, qui ad officia calculatoria aspirant, de quibus compendiis videri potest* Cl. Poetii *Arithmetica, item* Monier de Claire-Combe dans le Negoce rendu facile, *aliique.*

PROBLEMA III.

Divisionem methodo compendiosa instituere.

COMPENDIUM I.

13. Maximum divisionis compendium in numeris abstractis, in casu, quo divisor ex multis notis constat, habetur per Tariffam, vel (*à la Indienne.*) Modum hunc per Tariffam dividendi, tradidimus, §. 80. Arithmet. Potest tamen & hic modus reddi brevior ab exercitatis; scilicet, si pro Tariffa tantum habeatur divisoris *simplum*, *duplum*, & *quintuplum*; nam reliqua, mente duntaxat fieri facile possunt sub ipsa operatione, sic si mentaliter *simplum* addatur *duplo*, habebitur *triplum*, si *duplum* bis summatur, habebitur *quadruplum*, si ad *quintuplum* addatur *simplum* emergit *sextuplum* &c. En Exemplum per Tariffam abreviatam.

 Sit

Sit divisor 2534, *sitque dividendus* 932512.

	Tariffa		
simplum -	2534	1	9325,1,2, (368 *quotus.*
duplum -	5068	2	7602 . .
quintuplum	12670	5	17231 .
			15204 .
			20272
			22272
			00000

SCHOLION.

14. *Habetur quidam modus* Italicus *in numeris abstractis, quem vocant per* Dandam, *verum nihil in hoc compendii video, nisi quod facta ex* divisore *in* quotum *orta mentaliter perficiantur, & una mentaliter etiam subtrahantur; videri potest hic modus fuse expositus in* Epitome Arithm. P. Christoph. Clavii, e S. J. *mihi fol.* 76. *editionis Coloniensis in 8vo.*

COMPENDIUM II.

15. Miræ brevitatis etiam est divisio per dispersionem divisoris in suos factores partiales, de qua dispersione dictum est (§. 9.) ut sit dividendus 61776 per 24, erit divisor 24, sparsus in 3, & 8. *Vide Exemplum.*

Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
3) 61776	(20592	(2574
& per 8		

Scilicet, si dividendus dividatur per 3 erit quotus 20592, hic quotus iterum divisus per 8, dat quotum secundum petitum 2574, qui haberetur, si per 24 divisus fuisset. Demonstratio habetur à §. 151. ad 155. Algebr. Est autem perinde per quemcunque factorem partialem divisio inchetur, ut Exemplum subjectum declarat.

Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
8) 61776	(7722	(2574.
& per 3		

Eodem modo obtinebitur idem quotus, si 24 dispergatur in 4, & 6, vide subjectum Exemplum.

Divi-

	Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
divis. 4)	61776	(15444	(2574.
		& per 6	

Aliter

	Dividendus.		
divis. 6)	61776	(10296	(2574.
		divis. 4	

SCHOLION.

16. *Cætera compendia inserta habentur Elementis nostris Mathem. (à §.75. ad 78. Arithm.) & quia dividendus comparatus cum divisore, considerari potest ex Principiis Algebraicis tanquam fractio vulgo spuria uti etiam possumus compendiis, quæ habentur (à §.118. ad 121. Algeb.)*

CAPUT II.

Compendia Regulæ Aureæ, vel Trium.

Cum in usu Regulæ Aureæ, multiplicatio, & divisio usurpanda sit, patet in praxi omnia compendia, tam multiplicationis, quam divisionis à §. 3. hucusque relata, applicari posse in usu Regulæ Aureæ. At tamen præterea peculiaria sunt sequentia.

COMPENDIUM I.

17. Si per Terminum *Primum* dividi exacte potest Terminus *Secundus*, vel per eundem Primum *Tertius*, fiat hæc divisio ante usum Regulæ Aureæ, & lucrifiet divisio molestior. *Vide Exempl. I. & II.* Item si Terminus *Secundus*, vel *Tertius* exacte dividat *Primum*, lucrifit multiplicatio. *Vide Exempl. III. & IV.* Demonstratio hujus compendii videri potest in doctrina Proportionum §. 300. Algeb.

EXEMPLUM I.

5 *Ulnæ panni veneunt* 20 *flor. quanti* 17 *Ulnæ.*
erit Proportio $5 : 20 = 17 : x$
per Compend. $1 : 4 = 17 : x$
hoc est multiplic. 4 *per* 17 = 68 *fl.*

EXEM-

EXEMPLUM II.

6 Milites consumunt intra mensem 32 metretas farinæ, quot consument milites 24.

erit proportio $6 : 32 = 24 : x$
per Compend. $1 : 32 = 4 : x$
hoc est multiplic. 32 *per* $4 = 128$ *metretas.*

In hisce exemplis nulla fit divisio, propterea, quod primus terminus evadat unitas (1), *quæ non dividit.*

EXEMPLUM III.

Cursor percurrit 100 *Milliaria intra* 8 *dies,* 25 *Milliaria intra quot dies percurret?*

erit $100 : 8 = 25 : x$
Compendium $4 : 8 = 1 : x = \frac{8}{4} = 2$ *diebus.*

EXEMPLUM IV.

8 *Murarii exstruere possunt quoddam Templum annis* 9. *ergo* 16 *Murarii intra quot annos idem opus absolvent, quæ cum sit inversa.*

erit inverse $16 : 8 = 9 : x$
per Compend. $2 : 1 = 9 : x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ *annis.*

Vel vulgariter.
$8 : 9 = 16 : x$
per Compend. $1 : 9 = 2 : x$

In his lucrifit multiplicatio, cum 1 *non multiplicet.*

SCHOLION.

18. *Animadvertendum tamen, quod si per* secundum *terminum dividi possit* tertius, *vel* secundus *per* tertium, *id fieri minime debeat (ut constat ex doctrina Proportionum) propterea, quod Ratio terminorum tolleretur, & mutaretur. Compendium hoc eximiæ est utilitatis in Regula præsertim composita, & societatis. Ut Exempla declarant.*

EXEMPLUM.

Mercatores 6, *aureis* 100, *mensibus* 2, *lucrantur* 70 *aureos, ergo Mercatores* 12, *aureis* 400, *mensibus* 4, *quantum lucrum facient?*

In hujusmodi regula composita ante Reductionem ad tres terminos, videatur an termini homologi inter se sint divisibiles; sic in hac quæstione numerus 6 *Mercatorum, dividit numerum* 12 *Mercatorum, & numerus* 100 *aureorum, dividit numerum* 400 *aureorum, & denique menses* 2, *dividunt menses* 4, *adeoque dividendo, erit*

Mercat.

Mercator. 1, *aureus* 1, *mens.* 1, *lucrum dant* 70 *aureos*, *ergo Mercat.* 2, *aurei* 4, *mens.* 2, *quantum dabunt lucrum*; *hoc est*,

$$1 : 70 = 16 : x.$$

Item sit regula societatis: tres Mercatores contulerunt in unam summam florenos 100, *primus dedit* 24 *fl. secundus* 30, *tertius* 46, *intra annum lucrati sunt simul* 200 *florenos*, *quæritur lucrum singulorum*, *stabit itaque Proportio per* (§. 353. *Algeb.*)

Pro Primo: $100 : 200 = 24 ; x$
Secundo: $100 : 200 = 30 : x$
Tertio: $100 : 200 = 46 : x$

Sed per Compendium ita.

Pro Primo: $1 : 2 = 24 : x$ *lucrum* $= 48$
Secundo: $1 : 2 = 30 : x$ $= 60$
Tertio: $1 : 2 = 46 : x$ $= 91$

Unde liquet opus tantum esse multiplicatione termini secundi per tertium in singulis proportionibus, dabitque factum, lucrum cujuslibet particulare.

COMPENDIUM II.

19. Quod si terminus secundus, vel tertius sint numeri mixti diversæ speciei, & primus dividat secundum, vel tertium mixtum quidem, sed cui non adhæreant diversæ species, duplex habetur Compendium; Primum est, de quo (§. 17.) dictum secundum autem ex (§. 9.) desumitur. Sic *Ex. gr.*

4 *Ulnæ materiæ sericeæ constant* 16 *flor.* 3 *gr.* 2 *xr. quanti erunt ulnæ* 48?

erit Proportio 4 : 16 *fl.* 3 *gr.* 2 *xr.* = 48 : x
per Compend. (§. 17.) 1 : 16 *fl.* 3 *gr.* 2 *xr.* = 12 : x

Et multiplicando secundum per tertium juxta (§. 9.)

erit	16,	3,	2	*per*	12
	48,	11,	–	3	
	194,	4,	–	4	

hoc est 48 *ulnæ constabunt* 194 *fl.* & 4 *groß.*

SCHOLION.

Hoc compendio fere semper uti licet, quando primus terminus est unitas, imò Exercitatus Compendium reperiet, etiamsi terminus primus sit major unitate, Ex. gr. 2, 3, 4, *vel* 5 &c. *per quem divisus secundus, vel tertius, fractionem relinquit.*

COM-

COMPENDIUM III.

20. Quod ſi in Regula aurea occurrant meri numeri fracti, tum primi termini fractio invertatur, dein numeratores omnes inter ſe multiplicentur, itemque denominatores inter ſe, dabit producta fractio quæſitum numerum quartum, quæ ſi ſit ſpuria, reducatur per (§. 125. Algebr.) *Ex. gr.*

$\frac{1}{2}$ *libra piperis conſtat* $\frac{5}{6}$ *unius floreni, quid conſtabunt* $\frac{3}{4}$ *unius libræ?*

Erit per datum Compendium $\frac{2}{1} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} : x$
hoc eſt multiplicando $\frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{30}{24}$ *& per* (§. 125. *Alg.*) 1 *fl.* $\frac{6}{24}$, *ſeu* $\frac{1}{4}$ *fl. quæ facit* 15 *xr. ſimul* 1 *fl.* 15. *xr.*

COMPENDIUM IV.

21. Si denominatores termini primi, & ſecundi, vel primi, & tertii ſint iidem, deletis ſimpliciter denominatoribus, cum ſolis denumeratoribus tanquam numeris integris operatio abſolvatur. Ut in Exemplo.

$\frac{3}{4}$ *unius ulnæ conſtant* 2 *flor. quid* $\frac{1}{4}$ *ulnæ? erit per compendium* $3 : 2 = 1 : x$, *hoc eſt* $\frac{2}{3}$ *unius floreni, ſeu* 40 *xr.*

EXEMPLUM II.

$\frac{1}{2}$ *centenarii ſalis conſtat* $\frac{2}{3}$ *unius flor. quid* $\frac{3}{4}$ *centenarii?*
Erit per compendium $1 : 2 = \frac{3}{4} : x$, *hoc eſt* $\frac{6}{4}$ *ſeu* 1 *&* $\frac{2}{4}$, *vel* 1 *&* $\frac{1}{2}$ *unius flor.*

SCHOLION I.

22. *Idem Compendium obtinetur, ſi ſint ſub diverſis denominatoribus fractiones, modo terminus primus, & ſecundus, vel primus, & tertius prius reducantur ad eundem denominatorem per* (§. 129. *Algeb.*) Ex. gr.

$\frac{5}{8}$ *unius floreni emuntur* $6\frac{1}{4}$ *libræ aromatum; quot libræ ementur florenis* 60?

	fl.	*libræ*	*fl.*
Erit Reducendo per (§. 129. *Algeb.*)	$\frac{20}{32}$:	$\frac{200}{32}$ =	60 : x
hoc eſt per Compend. (§. 21.)	20 :	200 =	60 : x
& per Compendium I. (§. 17.)	1 :	200 =	3 : x = 600 *lib.*
vel etiam per eundem (§. 17.)	1 :	10 =	60 : x = 600 *lib.*

SCHO-

SCHOLION II.

23. *Quod si integri cum fractis occurrant, praecepimus* (§. 346. *Alg.*) *integris subscribendam unitatem; quo facto, integra tanquam fractiones tractando, compendium saepe nanciscimur; nam hoc modo operandi emergunt subinde fractiones sub iisdem denominatoribus, qui, per* (§. 21.) *deleri possunt.* Ex. gr.

$2\frac{3}{4}$ *unius centenarii constant florenos* 6, *quid constabunt* $8\frac{1}{4}$ *centenarii?*

Erit Proportio $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{4} : 6 = \frac{8}{1}$ & $\frac{1}{4} : x$

hoc est Reducendo: $\frac{11}{4} : 6 = \frac{33}{4} : x$

per (§. 21.) $11 : 6 = 33 : x$

& *per* (§. 17.) $1 : 6 = 3 : x = 18$ *fl.*

COMPENDIUM V.

24. Quod si occurrat proportio, in qua termini primi, unitate differunt, & quidem si sit *Ratio majoritatis*, hoc est, si primus sit unitate major, quam secundus, tunc tertius divisus per primum, & quotus emergens subtractus ab eodem tertio, relinquet residuum terminum quartum quaesitum. *Vide Exempl. I.* In Ratione verò *minoritatis*, hoc est, si primus sit una unitate minor secundo, quotus emergens ex divisione tertii per primum, additus eidem tertio, dat summam, quae sit terminus quartus quaesitus. *V. Exempl. II. & III.*

EXEMPLUM I.

Constat ex Tab. VIII. Arithmet. de reductione Num. Mixt. Element. nostror. quod 103 *librae Augustanae, efficiant* 102 *libras Hamburgenses, quaeritur jam* 618 *librae Augustanae, quod faciunt Hamburgenses?*

Erit $103 : 102 = 618 : x$

divis. dividend. quotus

hoc est 103) 618 (6

subtr. 6

Resid. 612 *librae Hamburgenses.*

EXEM-

EXEMPLUM II.

In Ratione minoritatis.

5 floreni Germ. faciunt 6 Ung. in Transylvania, 65 fl. Germ. quot facient hujusmodi Ungaricales flor.

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	5)	65	(13
adden.		13	
Summa		78 *flor. Ungar.*	

EXEMPLUM III.

4 ulnæ Viennenses faciunt 5 ulnas Transylvaniæ, ulnæ Viennenses 180, *quot dabunt Transylvanicas?*

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	4)	180	(45
adden.		45	
		225 *ulnæ Transylvanicæ.*	

Quod si quæratur 5 ulnæ Transylvanicæ dant 4 ulnas Viennenses, ergo ulnæ Transylvaniæ 225, quot dabunt Viennenses? Erit per casum primum hujus.

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	5)	225	(45
subtr.		45	
		180 *ulnæ Viennenses.*	

SCHOLION.

25. *Egregium est hoc Compendium in reducendis mensuris, ponderibus, & monetis, quarum certa Ratio unitate differt; ut in datis circumstantiis utenti constabit. Sic, si velit quis Bacios Italicos reducere ad nostram monetam, (valet autem Bacius 4 xr.)* Ex. gr. 567 *Bacii, quot faciunt groff. cum 3 Bacii faciunt 4 groff. nostrates. Erit*

	divis.	*divid.*	*quotus.*
	3)	567	(189
addend.		189	
		756 *groff. seu 37 fl. 16 groff.*	

Sed de his Reductionibus in capite sequenti agetur; Industrius Arithmeticus ex his compendiis, quæ hucusque dicta sunt, facile sibi alias vias breviores reperiet, maxime si Algebra instructus sit, ex qua etiam hæc fluxere compendia.

CAPUT

CAPUT III.

De Compendiis, & Praxibus Reductionum numerorum mixtorum.

In Parte III. Arithmeticæ noſtræ Numer. auctum eſt de Reductione in genere, & per regulas univerſales, omiſſis compendiis, & praxibus variis, ne molem libelli augeremus, quæ his exercitationibus reſervata, nunc proſequemur. Quamvis autem praxis Reductionum omnium abſolvi poſſit per Regulam auream, nihilominus compendium univerſale operandi per *exceſſum*, vel *defectum* unius ſpeciei ſupra alteram in hac materia non poteſt non eſſe ſumme utilis. Itaque

COMPENDIUM I.

Reducere ſpeciem datam majorem ad minorem in monetis, menſuris, & ponderibus.

26. *Primo*: Notum eſſe debet operanti, quot unitatibus ſpeciei minoris, ſpecies major minorem ſuperet; *Ex.gr.* florenus Germ. ſuperat florenum Ung. in Tranſylvania uſitatum $\frac{20}{100}$ unius flor. Ungaricalis; nam fl. Ung. habet 100 Nummos, quales in fl. Germ. habentur 120, ergo ſuperat 20 Nummis, hoc eſt $\frac{20}{100}$ ſeu $\frac{2}{10}$ aut $\frac{1}{5}$ de floreno Ung. & ita de aliis ratiocinandum.

Secundo: Per hunc exceſſum multiplicetur datus numerus major reducendus, Productum hoc addatur ad numerum majorem, erit ſumma quæſitus numerus minoris ſpeciei.

EXEMPLUM I.

Sint reducendi 340 *flor. Germ. ad Tranſylv. Ungar. cum florenus Germ. ſuperet Tranſylv.* $\frac{1}{5}$, *erit multiplicando* $\frac{340}{5}$, *hoc eſt* 68 *flor., qui additi ad*

$$\begin{array}{rr} & 340 \\ & 68 \\ \hline \textit{faciunt} & 408 \end{array}$$ *flor. Ung.*

EXEMPLUM II.

Unus Bacius Ital. valet 4 xr. adeoque superat grossum nostratem $\frac{1}{3}$ gross. nostratis (hoc est 1 xr.) sint igitur reducendi 258 Bacii ad grossos nostrates, erit multiplicando $\frac{258}{3}$, hoc est 86, qui additi ad 258 faciunt 344 grossos, seu 17 fl. 4 gr. nostrates.

EXEMPLUM III.

Pes geometricus Parisinus superat pedem Viennensem [illegible], seu $\frac{1}{71}$, itaque pedes Paris. 1704, quot faciunt Viennenses?

Erit $\frac{1704}{71}$ hoc est 24, qui additi ad 1704, faciunt 1728 pedes Viennenses.

EXEMPLUM IV.

Centenarius Vratislaviensis, (ut constat ex Tab. VIII. Arith. Numer.) superat Lipsiensem [illegible], seu $\frac{4}{21}$ igitur 567 Centenarii Vratislavienses quot faciunt centenarios Lipsienses?

Erit $\frac{2268}{21}$, hoc est 108, qui additi ad 567, faciunt 675 centenarios Lipsiensis.

COMPENDIUM II.

Reducere speciem minorem ponderis, mensuræ, aut monetæ ad speciem majorem.

27. *Primo*: Notum debet esse operanti (uti in priori Compendio) quot unitatibus speciei majoris deficiat species minor ad æqualitatem constituendam.

Secundo: per hunc defectum multiplicetur species minor reducenda, & factum subtrahatur a specie minore, erit residuum, species minor reducta ad majorem. *Claritatis gratia, exempla prioris compendii assumemus, eaque ex data specie minore ad majorem reducemus.*

EXEMPLUM I.

Sint reducendi 408 fl. Ung. Transylv. ad Germanicales, cum florenus Ung. deficiat à floreno German. [illegible], *seu* [illegible], *id est $\frac{1}{6}$, erit factum $\frac{408}{6}$, seu 68, hoc*

Factum à 408
subtrab. 68

Residuum 340 *seu floreni Germ. qui æquales sunt flor. Ung.* 408. Vide Exempl. I. Comp. I. (§. 26.)

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sint Reducendi 344 *grossi nostrates ad Bacios Ital. cum grossus nostras deficiat à Bacio* $\frac{1}{4}$ *Bacii, erit multiplicando* $\frac{344}{4}$, *hoc est* 86, *hoc Productum à* 344

subtrah. 86

Resid. 258 *Bacii.*

Vide Exempl. II. ejusdem (§. 26.)

EXEMPLUM III.

Sint Reducendi pedes Viennenses 1728 *ad pedes Parisinos, deficit autem pes Viennensis à pede Parisino* $\frac{20}{1440}$, *seu* $\frac{2}{144}$, *hoc est* $\frac{1}{72}$, *igitur multiplicando* 1728 *per* $\frac{1}{72}$ *erit productum* $\frac{1728}{72}$, *seu* 24 *pedes, qui subtracti à* 1728, *dant residuum* 1704 *pedes Parisinos, quibus dati pedes Viennenses* 1728 *æquivalent.* Vide Exempl. III. (§. 25.)

EXEMPLUM IV.

Sint Reducendi 675 *centenarii Lipsienses ad centenarios Vratislavienses; centenarius Lipsiensis deficit à centenario Vratislaviensi* $\frac{20}{125}$ *seu* $\frac{4}{25}$, *ergo multiplicando* 675 *per* $\frac{4}{25}$ *erit Productum* $\frac{2700}{25}$, *hoc est* 108 *centenarii, qui subtracti a* 675, *relinquunt* 567 *centenarios Vratislavienses.*

SCHOLION I.

28. *Quanta harum Reductionum sit necessitas, atque utilitas, nôrunt* Præfecti Militum, annonæ, commeatuum, Magistri Ponderum, & Monetarum, Mercatores item & Cambiatores, *Itemque Philosophiæ naturali operam dantes, aut Civilis etiam conditionis homines, qui varias terræ Regiones peragrantur, victualia, merces emendas, vendendas, pecunias item exigendas, permutandas, colligendas, expendendas &c. ex officio habent; Quanta porro hinc Algebraicæ scientiæ commendatio accedat, cui hæc singularia inventa in acceptis ferre debemus, nemo ratione præditus, inficiabitur.*

SCHOLION II.

29. *Quod si quis invenire desideret* æquivalentiam *in terminis minimis duarum specierum alias valore differentium, id est, quot unitates speciei minoris adæquent certas unitates speciei majoris;* Ex. gr. *si quis quærat in terminis minimis, quot numero fl. Ungar. Transylvanici adæquant certum numerum florenorum Germ. in terminis; id facile invenitur, modo sciatur excessus speciei majoris supra minorem in partibus minoris speciei, expressis per fractionem;* Nam multiplicando unitatem

 utrius-

utriusque speciei per denominatorem fractionis, quæ excessum exhibet, & numeratorem ejusdem fractionis addendo speciei minori, habebitur æqualitas duarum specierum in terminis minimis. *Utilissimum hoc Problema, cujus ope Reductiones specierum diversarum per* Regulam auream *indagari possunt, apud Arithmeticos audit* (La Regle de Pareille, ou Pary.)

EXEMPLUM I.

1 florenus Germ. æqualis est 1 fl. Ung. Transf. plus $\frac{1}{5}$ ejusdem floreni Transylv. hoc est; 1 fl. Germ. = 1 fl. Ung. Transf. & $\frac{1}{5}$. Igitur multiplicando per denominatorem de $\frac{1}{5}$ seu per 5 tam 1 fl. Germ. quam 1 fl. Ung. Transylv. & numeratorem 1, addendo ad Ungaricales, erunt 5 fl. Germ. æquales 6 fl. Ung. Transylv.

EXEMPLUM II.

1 Ulna Viennensis æquivalet 1 & $\frac{1}{4}$ ulnæ Transf. ergo multiplicando per denominatorem 4 utramque speciem, & numeratorem 1, addendo ad ulnas Transf. erunt 4 ulnæ Viennenses æquales 5 ulnis Transylv.

SCHOLION III.

30. *Hinc si habeatur hujusmodi Ratio æqualitatis duarum specierum, reductio facile habebitur (per* Regulam auream *) specierum quarumvis. Ut si quæratur 80 ulnæ Viennenses, quot faciunt Transylvanicas, erit proportio*

$$4 : 5 = 80 : x$$ *fient 100 ulnæ Transyl.*

Si vero quæratur ex data specie minore major, tum fiat inverse, ut ut si quæratur 100 ulnæ Transyl. quot faciunt Viennenses, erit

$$5 : 4 = 100 ; x,$$ *fient 80 ulnæ Viennenses.*

PROBLEMA.

31. *Speciem datam quamvis Reducere ad aliam speciem quamvis, in casu, quo æquivalentia unius speciei ad alteram ad plures intermedias comparata datur. Ex. gr.* Si quæratur; 56 libræ Norimbergenses, quot faciunt libras Vratislavienses, datis æquivalentiis intermediis hujusmodi:

25 libræ Vratislav. æquivalent 21 libris Lipsiensibus, & 105 libræ Lipsienses æquivalent 98 libris Norimberg.

RESO-

RESOLUTIO.

Multiplicentur 25 per 105, productum 2625 iterum multiplicetur per 56 (nempe per datas libras reducendas) & habebitur Productum 147000. Deinde multiplicentur 21 per 98, fiet productum 2058, per hoc dividatur 147000, & quotus $71\frac{3}{7}$ dabit libras Vratislavienses æquivalentes libris 56 Norimbergensibus.

Si verò datis $71\frac{3}{7}$ libris Vratislaviensibus, quæreretur, quot faciant libras Norimbergenses secundum datas intermedias æquivalentias, tali casu, dati supra termini invertantur, & dicatur.

98 libræ Norimbergens. æquivalent 105 *Lipsiensibus*, & 21 *libræ Lipsienses æquivalent* 25 *Vratislav.*

Itaque multiplicando 98 per 21, fiat productum 2058, quod multiplicatum per datas $71\frac{3}{7}$ libras Vratislav. fecit $\frac{1029000}{7}$ seu 147000, deinde multiplicando 105 per 25 producitur 2625, per quod dividendo 147000 reperitur quotus 56 libræ Norimbergenses æquivalentes $71\frac{3}{7}$ libris Vratislaviensibus, ut prius.

SCHOLION.

32. *Problema hoc utilissimum à Gallis Arithmeticis vocatur* La Regle Conjointe, *quasi Regula composita, aut conjuncta, item* La Regle des Arbitrages, *seu Arbitratus, quasi decisoria negotii cujuspiam utrum utile, an damnosum sit; utuntur autem hac regula non solum Monetarii, & Cambiatores, sed cumprimis Mercatores, quemadmodum* §. 28. *dictum.*

CAPUT IV.

Praxes ſcitu neceſſariæ circa uſum Regulæ Aureæ in genere.

De uſu Regulæ aureæ in Elementis noſtris Algebr. à §. 344. ad 356, actum in compendio, copioſius hic nobis agendi locus datur; habetur ibidem §. 346. Regula univerſalis de diſponendis terminis in proportionem, ſeu in Regulam auream, in caſu Regulæ ſimplicis, & directæ, quæ hujusmodi eſt: *Ut termini ordine in quæſtione propoſito in proportionem ordinentur*, intelligendo ſi ordine naturali, & debito proponatur Quæſtio. Quia tamen ſeu ob enunciantis indebitum quæſtionem concipiendi modum, ſeu ad periclitandam Tyronum ſcientiam conſulto quæſtiones præpoſtero non nunquam ordine proponuntur, idcirco ad tollendum dubium omne, quod in caſu Regulæ directæ de ordinandis terminis oriri poſſet, ſequens Problema ſubjungo pluribus illuſtrandum exemplis.

PROBLEMA.

33. *Terminos in caſu Regulæ Aureæ directæ, quocunque præpoſtero ordine propoſitos, debite in regulam auream ordinare, & collocare.*

RESOLUTIO.

Regula unica: Terminus, qui adnexam habet quæſtionem (ſeu *de quo* quæritur) ſtatuatur loco *tertio*; huic tertio termino *homogeneus*, ſeu *ſimilis* ponatur loco *primo*; *ſecundo loco* ponatur terminus, cui *quæſitus* eſt ſimilis, ſeu *homogeneus*. Sit itaque

QUÆSTIO I.

34. Quanti conſtat 1 libra ſacchari, ſi ejusdem ſacchari 60 libræ conſtant fl. 30. *Vides in hoc caſu præpoſtero ordine terminos poſitos, nam ordinate ſic proponi debent,* Si 60 libræ ſacchari conſtant 30 fl. *quanti erit* 1 *libra*? Hinc termini juxta datam regulam ſic ordinabuntur.

lib. fl. lib. fl.

$$60 : 30 = 1 : x$$

& per compendium $2 : 1 = 1 : x$, *facit* $\frac{1}{2}$ *fl. ſeu* 30 *xr.*

QUÆ-

QUÆSTIO II.

35. Si 10 libræ ceræ flavæ emuntur 5 fl., quot libræ ejusdem ceræ ementur fl. 90? *& hæc quæstio præpostere concepta est, debetque ordinari hoc modo:* florenis 5 emuntur 10 libræ, ergo 90 fl. quot libræ ementur? hinc

	fl.	*lib.*		*fl.*	*lib.*	
	5 :	10	=	90 :	x	
per compendium	1 :	2	=	90 :	x	
vel etiam	1 :	10	=	18 :	x	*fiunt libræ* 180.

QUÆSTIO III.

36. Quanti constabunt $\frac{3}{4}$ unius ulnæ panni, si $\frac{1}{2}$ ulnæ constat $\frac{2}{3}$ unius fl. Ger. *Hæc indebite proposita, sic ordinatur:* si $\frac{1}{2}$ ulna panni constat $\frac{2}{3}$ flor. quid constabunt $\frac{3}{4}$ unius ulnæ? hoc est:

	uln.	*fl.*		*uln.*	*fl.*	
	$\frac{1}{2}$:	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{3}{4}$:	x	
seu per (§. 20.)	$\frac{2}{1}$:	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{3}{4}$:	x	*facit* $\frac{12}{12}$ *hoc est* 1 *fl.*

QUÆSTIO IV.

37. Studiosus profectus ad Academiam literis operam daturus per annos 6, animadvertit se 7 mensibus expendisse fl. 35, quæritur quanta summa pecuniæ egeat ad absolvenda studia? NB. *Annus hic sumitur scholasticus 10 mensium.* Itaque resoluti 6 anni in menses, erit

	mens.	*fl.*		*mens.*	*fl.*	
	7 :	35	=	60 :	x	
per compendium	1 :	5	=	60 :	x	*fiunt* 300 *floreni.*

QUÆSTIO V.

38. Cursor quidam conficit diebus 7, milliaria 84, volo scire, quot diebus conficeret milliaria 192, si nempe singulis diebus æqualem numerum milliarium conficeret; *hæc ordinate sic poni debet:*

	milliar.	*dies,*		*milliar.*	*dies*	
	84 :	7	=	192 :	x	
& per compend.	12 :	1	=	192 :	x	*fiunt dies* 16.

SCHOLION.

39. *Exercitii, aut Examinis loco in usu regulæ aureæ, eadem quæstio quatuor vicibus repeti potest, si nempe termini alias dati pro quærendis ponantur; En praxim.*

I.

Quidam in Nundinis florenis 24 *emit ulnas panni* 20, *quanti constabunt ulnæ* 100 *ejusdem panni? stabit ordinate.*

	ulnæ. fl.	*ulnæ. fl.*
	20 : 24 =	100 : x
per Compend.	1 : 24 =	5 : x *sunt* 120 *floreni.*

II.

Quidam emit 20 *ulnas panni florenis* 24, *quot ulnas panni emet florenis* 120, *erit ordinate:*

	fl. ulnæ.	*fl. ulnæ.*
	24 : 20 =	120 : x
per Compend.	1 : 20 =	5 : x *sunt ulnæ* 100, *ut prius.*

III.

Quidam certa summa pecuniæ emit ulnas panni 20, *& eodem pretio deinde emit ulnas* 100, *flor.* 120. *quæritur quid expendit pro primis* 20 *ulnis? erit ordinate:*

	ulnæ. fl.	*ulnæ. fl.*
	100 : 120 =	20 : x
per Compend.	5 : 120 =	1 : x *sunt fl.* 24. *ut prius.*

IV.

Quidam aliquot ulnas panni emit fl. 24, *deinde alius quispiam ex eodem panno flor.* 120 *emit ulnas* 100, *quot ergo ulnas prior emit;* itaque ordinate:

	fl. uln.	*fl. uln.*
	120 : 100 =	24 : x
per Compend.	5 : 100 =	1 : x
vel etiam	12 : 10 =	24 : x *sunt* 20 *ulnæ.*

SCHOLION.

40. *Ex adductis exemplis liquet, quam varia ratione termini eruantur, & quomodo eadem quæstio variari possit. Nunc ad usum Regulæ aureæ variis quæstionibus utilissimis applicatæ gradum faciamus.*

CA-

CAPUT V.

Regula Aurea ad usum Oeconomicum, & Civilem applicata.

QUÆSTIO I.

41. Paterfamilias conducit tres servos, quibus singulis in dies singulos præter victum, & vestitum statuit dare 4 xr. itaque cupiens inire rationes, quantum sumptum in omnes tres, una cum victu, & vestitu spacio unius anni impensurus sit; victus pretium diurnum æstimatur 6 xr. vestis annuæ pretium censetur fl. 10.

Ante regulam auream opus est, ut diurna singulorum in pecuniam conversa addantur, & habebitur summa expensarum omnium pro una die, hoc est, cum singuli percipere debeant indies 4 *xr. solutionis,* 6 *item xr. in victum, acquirent singuli* 10 *xr., cumque sint servi* 3, *in ternos expendentur indies* 30 *xr. fiat ergo regula aurea.*

1. *die consummunt* 30 *xr., quantum consument* 365, *hoc est anno uno ordinario, aut diebus* 366 *anno bis sextili, & habebitur proportio:*

dies xr. dies

1 : 30 = 365 : x, *fiunt* 10950 *xr. seu fl.* 182, & 30 *xr. pro anno vero bis sextili* 183 *fl.*

Quibus pretium vestitûs 30 *fl. additi efficiunt summam* 212 *fl.*

Quod si 30 *xr. exprimantur per* $\frac{1}{2}$ *fl. habebitur compendium sine Reductione, erit enim:*

$1 : \frac{1}{2} = 365 : x$, *hoc est* $\frac{365}{2}$ *seu* 182, & $\frac{1}{2}$ *fl.*

Si idem Paterfamilias scire cupit sumptus unius servi pro anno uno erit proportio:

dies xr. dies

1 : 10 = 365 : x *fiet* 3650 *xr. seu* 60 *fl.* 50. *xr. aut per Compend.* $1 : \frac{1}{6}$ *fl.* $= 365 : x$, *erit* $\frac{365}{6}$, *seu* 60 *fl.* $\frac{5}{6}$, *id est* 50 *xr., & cum pretio vestis* 10, *erunt* 70 *fl.* 50 *xr.*

QUÆSTIO II.

42. Idem Paterfamilias conductum servum pro mercede diurna habentem 4 xr. pro victu diurno 6 xr., & pro veste annua 10. fl., præstito obsequio per hebdomadas 27, & 3 diebus, ex obsequiis dimittit; *Quærit igitur quantum eidem ex conventione pro fidelibus obsequiis pendendum sit?*

Quot si velit totam summam pro 27 septimanis, & 3 diebus quærere, primum quærere debet juxta regulam auream priori quæstione positam, quid toto anno meritus fuisset, reperietur autem una cum vestitu mereri 70 fl. 50 xr.

Tum 27 septimanæ reducantur ad dies, quod fiet multiplicando per 7, fientque dies 189, & cum 3, erunt 192: deinde resolvantur 70 fl. ad cruciferos, & reperientur cruciferi 4200, & cum 50 xr. fient 4250, quibus præstitis fiat regula aurea hujusmodi:

dies xr. dies xr.

365 dant 4250 = 192 : x, & reperiet 2235 xr. cum fractione unius cruciferi, superante dimidium cruciferum, adeoque meretur servus hujusmodi pro 27 septimanis, & 3 diebus fl. 37 & 15 $\frac{1}{2}$ xr.

Quod si idem Paterfamilias secluso victu, tantum pecuniam diurnam, & vestem computare velit., eodem modo per regulam auream reperiet, pro 27 hebdom. & 3 diebus, mercedem 18 fl. 3 xr. $\frac{1}{2}$ fere.

Si servus hic interea temporis ad rationes suæ conventionis certam summam pecuniæ percepisset à Domino, hæc ab inventa summa subtracta, relinquet residuum eidem pendendum.

QUÆSTIO III.

43. Quidam mutuos dedit fl. 25360 in censum annuum 5 pro 100, quærit censum unius anni? fiet

100 : 5 = 25360 : x
per Compend. 20 : 1 = 25360 : x
brevius 2 : 1 = 2536 : x *fiet census annuus* 1268 *fl.*

Ultimum compendium suppeditat novum Compendium eruendi census annui data quacunque summa capitali,

pitali, ſupponendo cenſum 5 pro 100; Nam ſi ex ſumma capitali abſcindatur nota ultima, & reliquum dividatur per 2, erit quotus cenſus quæſitus; ut ſi quæratur cenſus 5 pro 100 ex capitali 2400.

divid. quotus.
erit divi.ſ2) 240 (120 *floreni cenſus.*

Hoc Compendio in quærendo cenſu 6 pro 100 *uti non licet, per hanc tamen quæſtionem eruitur.*

QUÆSTIO IV.

44. Quidam datos 25360 fl. mutuos ad cenſum 5 pro 100, poſt annos 3, & hebdomadas 13, repetit capitale una cum cenſu, qui interea temporis perſolutus non eſt; Quæritur quantam ſummam una cum capitali percipiet?

Primo: per priorem (§. 43.) *reperietur cenſus pro uno anno* 1268 *fl hunc multiplicando per* 3, *erit cenſus pro annis tribus* 3804, *deinde quæratur per regulam auream cenſus pro* 13 *ſeptimanis, ſeu* 91 *diebus inferendo:*

365, *dant* 1268, *quid* 91 *& reperientur* 316 *fl.* 7 *xr. &* $\frac{65}{73}$. *itaque capitale* 15360, *cenſus item* 3 *annorum* 3804, *& nunc reperti* 316 *fl.* 7 *xr. in unam ſummam additi efficiunt* 29480 *fl.* 7 *xr.* $\frac{65}{73}$, *ſummam nempe percipiendam.*

QUÆSTIO V.

45. Quidam ſcire cupit ſummam capitalem, quæ ex cenſu 5 pro 100, dat annuum cenſum 1268 fl. itaque hoc ordine habebuntur termini

5 *dant* 100 *quid* 1268
& per Comp. 1 : 20 = 1268 x *fiet capit.* 25360 *fl.*

QUÆSTIO VI.

46. *Stephanus* mutuos dedit *Paulo* florenos 6000 pro annis 4, quos cum *Paulus* redderet, *Stephanus* cenſum recipere noluit, verum petiit, ut ei viciſſim *Paulus* 8000 fl. ad certum tempus ſine cenſu mutuo daret. Quæritur quamdiu *Stephanus* pecuniam 8000 fl. retinere

nere possit, ut sibi ex æquo satisfiat pro præstito beneficio per 6000 fl. quos *Paulo* commodaverat?

Hoc casu opus est regula inversa, cum 8000 fl. citius refundant eundem censum, quam 6000 fl. & hinc terminus, qui tertium locum occuparet, ponatur loco primo, & primus loco secundo vel tertio, juxta doctrinam (§. 48 Alg.) qua transpositione terminorum facta, fiat regula directa:

flor. flor. an. an.

Itaque 8000 : 6000 = 4 : x

per Comp. 8 : 6 = 4 : x

brevius. 2 : 6 = 1 : x, *flent anni* 3, *quibus pecuniam* 8000 *fl. sine censu Stephanus retinere potest; Nam* 8000 *fl. intra* 3 *annos (computando* 5 *pro* 100) *dant censum* 1200 *fl. sed etiam* 6000 *fl per* 4 *annos dant censum* 1200, *ergo habetur æqualitas. Neque vero existimandum tantum* 5 *pro* 100 *satisfacere quæstioni, nam quivis census alius satisfaciet, modo utrinque idem supponatur census.*

QUÆSTIO VII.

47. Quidam sibi vestem curaturus scit opus esse 8 ulnis panni, cujus latitudo sit $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, vult pannum emere cujus latitudo sit unius ulnæ, seu $\frac{4}{4}$, quæritur, quot ulnis ex hoc latiore panno pro eadem veste opus habet? *Hanc iterum inversam esse, ex statu quæstionis cognoscitur. Igitur*

ut $\frac{4}{4} : \frac{3}{4} = 8 : x$

per (§. 21.) $4 : 3 = 8 : x$

brevius. $1 : 3 = 2 : x$ *fiunt ulnæ* 6.

QUÆSTIO VIII.

48. In omni recte constituta Civitate, Pistoribus lege cautum est, ut pro ratione pretii tritici, panem (qui sit ejusdem pretii) majoris, minorisve ponderis conficiant; *Esto casus* : ut dum cubulus tritici emitur 2 fl. Germ. panis, qui grosso venditur, juxta rectas leges Civitatis cujuspiam, ponderare debeat 3 libras, sit jam pretium vilius, Ex. gr. sit pretium unius cubuli 1 fl. 30 xr. quæritur, quot librarum panis (qu

grosso

grosso vendatur) confici debeat? cum sit regula inversa utendum, erit reductis, & transpositis terminis proportio:

xr. xr. lib lib.

90 : 120 = 3 : x

& per Comp. 30 : 120 = 1 : x

brevius 3 : 12 = 1 : x *fiunt libræ* 4 *pro uno grosso, ut examinanti patebit, cum* 4 *lib. sint ad* 3 *lib sicut* 120 *xr. ad* 90 *xr.*

QUÆSTIO IX.

49. Obsessus quidam exercitus 8500 Militum, victum habet pro 11 mensibus, verum cum spes solvendæ obsidionis nulla sit, nisi post menses 25: *quæritur, quot Milites retinendi sint, ut reliquis victus sufficiat pro* 25 *mensibus? hæc quæstio iterum per regulam inversam olvenda:*

mens. mens. Milit.

11. : 25 = 8500 : x, *& emergit numerus Militum* 3740, *sunt ergo dimittendi* 4760.

QUÆSTIO X.

50. Si 10 equis 1 die dentur 7 mensuræ hordei, vel avenæ, quot mensuræ juxta eandem distributionem convenient 100 equis pro diebus 20. *Hæc per regulam compositam directam solvenda juxta (§. 350. Algeb.) hoc est:*

Equi dies mensur. Equi dies

(10 . 1) *consummunt* 7, *ergo* (100 . 20): *quantum?*

erit 10 : 7 = 2000 : x

per Compend. 1 : 7 = 200 : x, *& fient mensuræ* 1400.

QUÆSTIO XI.

51. In 3 Servos intra 4 hebdomadas pro pane expenduntur 2 fl. 6 xr., quid pro uno Servo per diem? *& hæc composita directa est; itaque*

Serv. dies xr. Serv. dies xr.

(3 . 28) : 126 = (1 . 1) : x

hoc est 84 : 126 = 1 : x, *& fiunt* $1\frac{1}{2}$ *xr. seu medius grossus.*

QUÆ-

QUÆSTIO XII.

52. Piſcinam quandam habentem 30 orgyas quadratas, 10 operarii repurgant diebus 12, habetur alia piſcina repurganda 40 orgyarum quadratarum pro qua conducuntur homines 20, quæritur quot diebus eandem repurgabunt. *Hic opus eſt regula compoſita inverſa operariorum, itaque per (§. 351. Algeb.)*

	oper. org. dies	*oper. org. dies*
	$(20:30):12=(10.40):x$	
ſeu	$600:12=400:x$	
per Compend.	$6:12=4:x$	
brevius	$1:2=4:x$ *fiunt dies* 8.	

SCHOLION.

53. *Cum uſus regulæ aureæ in œconomicis, & vita civili non magis eluſceſcat, quam ex diverſis caſibus Mercatorum, qui toti ſunt in lucro quærendo, aut damno avertendo, cætera, quæ ad uſum œconomicum faciunt, ex capite ſequenti repeti poterunt.*

CAPUT VI.

De uſu Regulæ Aureæ ad Quæſtiones Mercatorum applicatæ.

QUÆSTIO I.

54. Quidam mercator Claudiopolitanus Lipſiæ emerat ſacchari libras Lipſienſes 1000, quæ Lipſiæ conſtiterant fl. Germ. 300. Expoſuit autem pro his præterea Lipſiæ in vectigal fl. 15, in Telonia, & Tricesimas uſque Claudiopolim incluſive expendit fl. 30, in vecturam, & viaticum ſervorum impendit fl. 55. Cupit autem in ſingulis libris ſacchari ponderis Viennenſis lucari 2 groſſ. Quærit igitur quanti hic Claudiopoli vendere debeat unam libram Viennenſem, ut in ſingulis lucretur 2 gr.

RESO-

RESOLUTIO.

Primum oportet, ut expoſita particularia in unam ſummam addat.

videlicet:

		fl.
In 1000 libr. ſacchari	-	300
In Vectigal Lipſienſe	- -	15
In Telonia, & Triceſim.	-	30
In Vecturam, & Servos	-	55
Summa expoſitorum	-	400 *fl.*

Conſtant ergo 1000 libræ Lipſienſes hic Claudiopoli Mercatorem hunc florenos Germ. 400.

Secundo: Cum hic Claudiopoli non Lipſienſes, ſed Viennenſes libras diſtrahere debeat, oportet, ut indaget, quotnam libras Viennenſes faciant 1000 libræ Lipſienſes, eſt autem libra Lipſienſis minor $\frac{1}{4}$ quam Viennenſis, hoc eſt per (§. 29.) 5 libræ Lipſienſes faciunt 4 Viennenſes,

hinc per (§. 24.) *diviſ.* 5) 1000 (200
ſubtr. 200
Reſid. 800 *lib. Viennenſes.*

Faciunt ergo 1000 libræ Lipſienſes, 800 libras Viennenſes.

Tertio: Inquirat per proportionem, quanti illum hic in loco conſtet una libra Viennenſis. Dicendo, ſi 800 lib. Vien. conſtant 400 fl. quid. 1.

ſeu $800 : 400 = 1 : x$
per Compend. $2 : 1 = 1 : x$ *fiet* $\frac{1}{2}$ *fl. ſeu* 10 *gr.*

vult itaque in ſingulis libris Vien. lucrari 2 groſſos, ergo ſingulas libras vendere debet groſſis 12. Quod erat inveniendum.

QUÆSTIO II.

55. Hic idem Mercator emptam libram ſacchari 10 groſſis, eandem vendendo gr. 12, ſcire cupit, quantum lucrum habiturus ſit pro 100. *Itaque ſi ſcire cupit purum lucrum, cum 10 groſſi lucrentur 2 gr. ſit proportio:*

$10 : 2 = 100 : x$
per Comp. $5 : 1 = 100 : x$, *fiet lucrum 20 pro 100.*

Quodſi

Quodsi scire cupiat lucrum una cum pecunia exposita inferat

$$10 : 12 = 100 : x$$

per Compend. $1 : 12 = 10 : x$ *fiet* 120, *hoc est pro* 100 *expositis recipiet una cum lucro* 120, *à qua summa si expositi* 100 *subtrahantur, eodem modo reperitur purum lucrum esse* 20 *pro* 100.

SCHOLION.

56. Si idem Mercator scire cupiat in specie monetæ determinata, perinde est, nam si in priori quæstione terminus primus 10 *sunt grossi, & secundus terminus* 2 *etiam grossi, tunc quoque tertius terminus* 100, *etiam erunt grossi, adeoque quartus dabit etiam grossos* 20; *eodem modo discurendum de quacunque moneta. Et quia quæstio in abstracto praxim quæstione posita satisfacit omnibus speciebus monetæ, hinc sufficit in abstracto solvere, & numeros abstractos eosdem monetis, quibusvis applicare; sic si rem emptam* 10 *grossis, vendendo* 12 *grossis, lucror* 20 *groß. pro* 100, *etiam rem emptam* 10 *florenis vendendo* 12 *florenis, lucror* 20 *pro* 100, *seu quod idem est, rem emptam* 10 *grossis vendendo* 12 *grossis in* 100 *florenis lucror* 20 *florenos, est enim eadem proportio* 10 *grossorum ad* 2 *grossos, quæ* 10 *fl. ad* 2 *fl., aut* 20 *grossi ad* 100 *grossos eandem proportionem dicunt, quam habent* 20 *fl. ad* 100 *fl. idem ergo est de quacunque moneta.*

QUÆSTIO III.

57. Mercator quidam emit complures libras croci singulas à fl 10, jam vero ex contracto vitio quodam libram hujus croci distrahere nequit nisi 8 flor. quæritur quantum damnum habiturus sit pro 100. Quæstio hæc, ut Quæstio II. antecedens solvi debet; qui enim emit rem 10, & distrahit 8 grossis predit 2 grossos; ergo per proportionem.

$$10 : 2 = 100 : x$$

$1 : 2 = 10 : x$ *fit* 20 *fl. damnum, hoc est loco* 100 *recipiet tantum* 80 *florenos.*

Sic quoque si emo rem quampiam 8 *Nummis, & vendo* 5, *perdo* 3 *nummos, hoc est, ut* $5 : 3 = 100 : x$ *fit damnum* 60 *Nummi pro* 100 *Nummis, seu loco* 100 *fl. acquiro tantum* 40 *florenos, aut loco* 100 *grossorum, tantum* 40 *grossos.*

QUÆSTIO IV.

58. Quærit apud ſe Mercator, quanti emendæ ſint ulnæ 100 panni, ut eædem poſtea venditæ 63 florenis, lucrum dent 5 pro 100. *In hac quæſtione manifeſtum eſt, qui vult 5 pro 100, vult habere 105 loco 100.* Itaque ſi 105 dant 100, quid 63? fient floreni 60 pro ulnis panni 100 dandi, ut patet ex Subjecta proportione?

fl. lucrum
Si 60 *dant* 3, *quid* 100? *fient* 5 *fl. pro* 100, *ut quærebatur.*

QUÆSTIO V.

59. Volumen quoddam pretioſæ materiæ emptum eſt certo numero aureorum, quod ſi venderetur à Mercatore 180 aureis, damnum pateretur 10 pro 100. *Quæritur, quanti Mercator emerit hoc volumen materiæ?* Itaque qui perdit 10 pro 100, facit ex 100 aureis, aureos 90; inferatur ergo, ſi 90 fiunt ex 100, ex quo fient 180?

hoc eſt $90 : 100 = 180 : x$
per Compend. $1 : 100 = 2 : x$ *fiunt aurei* 200, *quos expendit Mercator in volumen materiæ, nam qui emit rem* 200 *fl.*, *&* *vendit* 180, *perdit* 20, *hoc eſt* 10 *pro* 100, *ut clarum eſt.*

QUÆSTIO VI.

60. Mercator Claudiopolitanus vendendo ulnam minorem Claudiopolitanam eodem pretio, quo empta eſt ulna major Viennenſis, ſcire cupit lucrum pro 100. Conſtat autem, quod 5 ulnæ Claudiopolitanæ faciant 4 ulnas Viennenſes, ſeu quod idem eſt, in quatuor ulnis Viennenſibus lucratur unam Claudiopolitanam; dicatur ergo:

Uln Vien. uln. Claud.
4 *dant* 1 *quid* 100? *fiet lucrum* 25 *pro* 100. *Hoc tamen lucrum Mercator Claudiopolitanus habere non poteſt, eo, quod expenſæ adhuc ab hoc lucro detrahi debeant; hinc ſi ponamus ulnam Viennenſem Viennæ conſtitiſſe florenos* 2, *&* *expenſas factas uni-*

versim donec Claudiopoli deponeretur, pro ulna venire 15 xr., tali casu 4 ulnæ Viennenses, seu 5 ulnæ Claudiopolitanæ ipsum Mercatorem constant florenos 9, vendit autem 10 fl. ergo pro 9 accipit 10, hoc est, 9 lucrantur 1, erit pro puro lucro de 100 hæc proportio:

9 dant 1 quid 100, fiet 11 $\frac{1}{9}$ pro 100, hoc est in 100 florenis lucratur 11 flor. 6 xr. & $\frac{2}{3}$

QUÆSTIO VII.

61. Inquirit Mercator Claudiopolitanus Lipsia merces 8000 fl: advehens, quantam tricesimam persolvere debeat? *Supponitur autem hic eadem pro omnibus speciebus tricesima*; Inferatur.

$30 : 1 = 8000 : x$ *fient 266 fl. 20 x.*

QUÆSTIO VIII.

62. Emporii cujuspiam Mercator magnam mercium massam à se florenis 20000 emptam triennio depositam habet, tandem elapso triennio comparet alius Mercator depositas merces empturus, quærit apud se Mercator Emporii, quantam summam pro his mercibus ab emptore petere debeat: cum lege cautum sit, non plus quam 10 pro 100 lucrari. *Sciendum autem Mercatores tute computare posse lucrum cessans, aut damnum emergens; inquirendum itaque, quantum lucrum facturus fuisset Mercator florenis 20000 intra triennium, supponendo, I. quod semel singulis annis dictas merces distraxisset, II. quod ipsum lucrum annuum ad lucrum faciendum expendisset.*

Itaque pro lucro primi anni indagando fiat proportio:

$100 : 10 = 20000 : x$

seu $10 : 1 = 20000 : x$ *fiet lucrum* 2000, *& cum hoc lucrum 2000 fl. iterum expendat ad lucrum, erit capitale pro anno secundo* 22000, *hinc lucrum pro anno secundo*

$10 : 1 = 22000 : x$, *fit lucrum* 2200.

Hoc lucrum addendo priori capitali, fiet capitale pro anno 3tio 24200, *adeoque* $10 : 1 = 24200 : x$ *fit lucrum* 2420 *pro anno tertio:*

tertio; denique lucrum anni tertii 2420 *addendo ad capitale anni tertii* 24200 *fiet capitale* 26620 *fl quam ſummam loco* 20000*fl. ab emptore petere poteſt Mercator; Nam lucrum ceſſans efficit* 6620 *fl. quos habere potuiſſet intra triennium. Cavendum autem Mercatori, ne merces hæ vitio aliquo laborent.*

SCHOLION.

63. *Ex reſolutione hujus quæſtionis liquet, quomodo computandus eſt cenſus iterum ad cenſum poſitus, ſeu quando per cenſum augetur capitale;* hujus calculi compendium capite ultimo harum exercitationum adferam. *Mercatores plerique initio ſtatim depoſitionis mercium pretium titulo lucri ceſſantis augent, ob metum damni emerſuri, ſi longiore tempore merces diſtrahere nequirent, qui metus lucri ceſſantis incautos Mercatores plerumque ad incitas redigit, eo, quod pretia rerum nimium augendo Emptores à ſe ab alienent, quo fit, ut corruptis mercibus ob debita contracta, lucrumque revera ceſſans ceſſare cogantur à quæſtu exercendo. Hinc optandum potius, ſaniora caperent conſilia Mercatores quidam, atque in quæſtu mercium mediocre lucrum quærerent, quo fieret (quemadmodum multi experti ſunt) ut minori lucello, at ſæpius repetito, longe majus lucrum faciant: Nam lucellum minus* Ex. gr. 5 *pro* 100, *at quinquies per annum repetitum ſuperat majus lucrum* 10 *pro* 100, *aut etiam* 20 *pro* 100, *at ſemel in anno factum, qui enim* 5 *pro* 100 *in anno quinquies accipit, percipit revera per annum* 25 *pro* 100, *ſeu auget* 100 *ad* 125, *imo ſi lucrum* 5 *pro* 100 *iterum ſingulis vicibus ad novum lucrum faciendum exponat, patet ex priori quæſtione, per quinam repetionem uno anno factam lucraturum* 27. *fl.* 37 *xr.* & $\frac{1}{2}$ *fere.*

QUÆSTIO IX.

64. Mercator qui vendit 1 libram ſacchari 8 groſſis dicitur lucrari 60 pro 100, quæritur jam ſi eandem ſacchari libram vendat 10 groſſis, quantum pro 100 lucrabitur?

RESOLUTIO.

Primum *inveſtigandum, quanti Mercatorem conſtitit* 1 *libra ſacchari, ex qua lucratur* 60 *pro* 100, *inferendo videlicet; ſi* 160 (ſeu pecunia expoſita cum lucro) *proveniunt ex* 100, 8 *groſſi* (qui conſiderantur tanquam lucrum cum expoſita pecunia) *ex quo provenient?*

hoc eſt $160 : 100 = 8 : x$
per Compend. $20 : 100 = 1 : x$
brevius $1 : 5 = 1 : x$ *fiunt groſſi* 5.

Constitit ergo Mercatorem 1 *libra grossos* 5, *id verum esse patet ex* (§. 55.) *nam qui emit rem* 5 *grossis*, & *vendit* 8, *lucratur* 60 *pro* 100 *ergo.*

Secundo: *invento valore* 1 *libræ nempe* 5 *grossi*, *cum vendere velit grossis* 10, *huc delabitur quæstio; qui emit rem* 5 *grossis*, & *vendit* 10 *grossis*, *quantum lucratur pro* 100: *itaque cum lucrum sit* 5 *grossi*, *fiat proportio*: 5 *dant* 5 *quid* 100,
seu 5 : 5 = 100 : x *fiet lucrum* 100, *hoc est*, *qui vendendo rem* 8 *grossis lucratur* 60 *pro* 100, *si eandem rem vendat* 10 *grossis lucratur* 100 *pro* 100, *hoc est alterum tantum.* Quod erat inveniendum.

QUÆSTIO X.

65. Qui ulnam panni 18 grossis vendit, dicitur perdere 10 pro 100, quæritur si eandem ulnam vendat grossis 15, quantum pro 100 perdet.

RESOLUTIO.

Et in hac quæstione primo inquirendum, *quanti constiterit* 1 *ulna*, *ut vendita* 18 *grossis damnum inferat* 10 *pro* 100; *hic animadvertendum*, *sicut is*, *qui lucratur* 10 *pro* 100, *facit ex* 100 *summam* 110, *ita qui perdit* 10 *pro* 100, *facit ex* 100 *summam* 90. *Adeoque hæc quæstio*, *ut antecedens*, *solvi debet; hinc fiat proportio inferendo*: *si* 90 *proveniunt ex* 100, *ex quo provenient* 18 *grossi.*

erit 90 : 100 = 18 : x
per Comp. 9 : 10 = 18 : x
brevius 1 : 10 = 2 : x *fiet* 20, *hoc est* 1 *ulna constitit* 20 *grossos.*

Hoc invento pretio unius ulnæ dicatur, qui ulnam emptam grossis 20, *vendit* 15, *perdit grossos* 5, *id est* 15 *dant damnum* 5, *quid* 100?

seu 15 : 5 = 100 : x
brevis 3 : 1 = 100 : x *fit* 33 $\frac{1}{3}$

Perdit ergo 33 $\frac{1}{3}$ *pro* 100, *hoc est*, *si scire velit in grossis*, *quantum percipiat loco* 100 *grossorum? tantum accipit* 66 $\frac{2}{3}$ *seu* 66 *grossos* 2 *xr*; *aut in florenis*, *loco* 100 *florenorum*, *recipit tantum* 66 *fl.* 40 *xr.*

QUÆ-

QUÆSTIO XI.

66. Inquirit Mercator, si pro 20 centenariis mercium advectis per 100 milliaria persolvuntur pro vectura 50 fl quantum solvendum erit pro 30 centenariis advehendis per 400 milliaria? *Hic regula composita directa opus est*

cent. mill. *fl.* *cent. millia.*
(20 . 100) *constant* 50, *ergo* (30 . 400) *quantum?*
seu 2000 : 50 = 12000 : x
per Comp. 1 : 50 = 6 : x *fient floreni* 300.

QUÆSTIO XII.

67. Mercator florenis 300 intra 2 annos lucratur 200, quærit, florenis 1000 intra 6 annos, quantum lucrabitur? & hæc composita est, ergo

fl. annis *lucr.* *fl. annis*
(300 . 2) *dant* 200, *quid* (1000 . 6)
seu 600 : 200 = 6000 : x *lucrum.*
per Cmp. 1 : 200 = 10 : x *fient* 2000 *fl.*

Sed idem Mercator adhuc scire cupit, si 300 fl. inter 2 annos dant lucrum 200 fl. quantum habiturus sit lucrum uno anno ex 100. floren.

fl. an. *fl. an.*
Fiat (300 . 2) *dant* 100, *quid* (100 . 1)
seu 600 : 200 = 100 : x
per Compend. 6 : 200 = 1 : x *fiet lucrum* $33\frac{1}{3}$ *pro* 100.

QUÆSTIO XIII.

68. Quidam per 3 menses 10 florenis lucratus est 4 florenos, quærit 100 florenis quandonam lucrabitur 2000 florenos. *Hoc casu bis facienda est regula aurea, propterea, quod ignotum sit tempus, in quo 100 floreni lucrari debent 2000 fl adeoque (adhibendo duplicem regulam auream) primum quæratur pro 3 mensibus, quantum sit futurum lucrum ex 100 florenis, nempe si 10 floreni*

reni lucrantur 4 flor. inter 3 menses, intra eosdem 3 menses 100 floreni, quantum lucrabuntur?

erit 10 : 4 = 100 : x
per Comp. 1 : 4 = 10 : x *fient floreni* 40.

Deinde Fiat secunda regula dicendo: si 40 *floren. lucror* 3 *mensibus, florenos* 2000 *quando lucrabor.*

erit 40 : 3 = 2000 : x
per C mp. 1 : 3 = 50 : x *fient menses* 150, *seu anni* 12, *&* *menses* 6.

Atque adeo si 10 *floreni inter* 3 *menses lucrantur* 4 *florenos,* 100 *floreni lucrabuntur* 2000 *floren. intra menses* 150, *seu annos* 12, *&* 6 *menses, ut examinanti liquet.*

QUÆSTIO XIV.

69 Si 100 floreni mensibus 8 lucrantur 20 florenos, iidem centum floreni, quando lucrabuntur 3000 florenos, erit proportio:

fl. mens. fl. mens.
20 : 8 = 3000 : x
per Comp. 1 : 8 = 150 . x, *fiunt menses* 1200, *seu anni* 100.

Eodem modo si quis quærat: 300 fl. intra 7 menses lucrantur 45 florenos; intra eosdem 7 menses, quid lucrabuntur floreni 1780?

	fl. lurc.	*fl. lucr.*
Erit proportio:	300 ; 45 =	1780 : x
per Compend.	60 : 9 =	1780 : x
brevius	6 : 9 =	178 : x
adhuc brevius	2 : 3 =	178 : x, *fiet lucrum* 267.

In his duobus casibus liquet, quando pro eadem pecunia (ut in primo casu) vel pro eodem tempore (ut in casu secundo) quaritur lucrum, terminos illos ad regulam non esse ordinandos.

CAPUT

CAPUT VII.

Regula aurea ad regulam Societatis Mercatorum applicata.

De Regula Societatis in compendio tractavimus (à §. 352 ad §. 255. Algeb.) in qua posuimus Regulam: *Ut primo loco semper ponatur summa collatorum omnium Sociorum, secundo loco lucrum, vel damnum totale omnium Sociorum, tertio loco collatum particulare cujusvis Socii seorsim, pro quo quæritur damnum, vel lucrum; hinc quot Socii sunt, toties dicto modo regulam auream repetendam, intelligendo, si simplex sit regula.* In *Composita* vero, in qua tempus occurrit, prius cujuslibet collatum particulare esse multiplicandum per suum tempus; ut per Exempla, & Quæstiones nunc declaraturus sum.

QUÆSTIO I.

70. Mercatores quatuor inita Societate lucrati sunt in nundinis 600 florenos; Primus ad faciendum lucrum contulit florenos 50, secundus 70, tertius 80, quartus 100, quæritur jam, quantum quisque ex lucro 600 florenor. accipere debeat?

Primo, collata singulorum colligenda sunt in unam summam, quæ efficitur 300 *florenorum, deinde cum Socii sint quatuor, quater juxta supra datam regulam instituenda proportio hoc modo:*

	summa	*lucr.*		
Pro primo	300 :	600 =	50 :	x
secundo	300 :	600 =	70 :	x
tertio	300 :	600 =	80 :	x
quarto	300 :	600 =	100 :	x

Per Compendium.

1 : 2 = 50 :	*fit*	100	*Primi.*
1 : 2 = 70 :	*fit*	140	*Secundi.*
1 : 2 = 80 :	*fit*	160	*Tertii.*
1 : 2 = 100 :	*fit*	200	*Quarti.*
	summa	600	*lucrum tot.*

Hinc, primus pro 50 *florenis lucratur* 100, *secundus pro* 70 *lucratur* 140, *tertius pro* 80 *lucratur* 160, *quartus pro* 100 *lucratur* 200 *florenos; Examen est, si lucra particularia inventa in unam summam collecta faciant lucrum totale.*

QUÆSTIO II.

71. Tres Mercatores emptis mercibus navem onerarunt. Primi merces constiterunt 1800 aureis. Secundi 2400 Tertii 3000; gravi deinde exorta tempestate, ut se, navimque salvarent, graviores merces tumultarie arreptæ in mare projectæ sunt, efficientes simul damnum aureorum 2400; conventum ergo inter eos est, ut jactura hæc communis sit omnium; quæritur quantum quisque damnum feret pro ratione suarum mercium; *Hæc eodem modo solvitur, ut prior quæstio.*

Nempe collata summa omnium est 7200 *aurei, damnum omnium* 2400.

	summa,	*damn.*	*collat.*
ergo ut	7200 :	2400 =	1800 : x
	7200 :	2400 =	2400 : x
	7200 :	2400 =	3000 : x

Per Compend. *damnum.*

3 : 1 = 1800 : x	*fit*	600	*Primi.*
3 ; 1 = 2400 : x	*fit*	800	*Secundi.*
3 : 1 = 3000 : x	*fit*	1000	*Tertii.*
	summa	2400	*aurei.*

QUÆSTIO III.

72. Duo Mercatores contracta Societate assumpserunt Procuratorem mercium suarum, cui pro stipendio annuo, 10 pro 100 cederent ex lucro universo unius anni; Primus Mercator contulit 120 aureos; secundus 180 aureos; lucrati sunt per annum 1000 aureos. Quæritur jam, quid Procuratori, & quid singulis Mercatoribus pro ratione collatæ pecuniæ obveniat.

RESOLUTIO.

Primo, invenienda est pars Procuratoris per proportionem dicendo si 100 *dant* 10, *quid dabunt* 1000, *& reperietur pars Procuratoris esse* 100 *aurei*, *qui subtracti à* 1000 *aureis*, *relinquunt* 900 *aureos inter duos Mercatores partiendos: est autem collatum horum duorum* 300 *aurei*

summa

summa lucr. collat.
Ergo pro Primo 300 : 900 = 120 : x
Secundo 300 : 900 = 180 : x

Per Compendium.

1 : 3 = 120 : x *fit* 360 *Primi.*
1 : 3 = 180 : x *fit* 540 *Secundi.*

summa 900 *aurei.*

QUÆSTIO IV.

73. Tres Mercatores exmisso socio Lipsiam pro saccharo emendo, decernunt emendas 4000 libras; quæ constant 2000 flor; Horum primus vult accipere 1300 libras, secundus lib. 1460, tertius reliquas lib. 1240; *Quæritur, quantum quisque ad conficiendam summam 2000 fl. conferre debeat.* Fiat proportio:

lib. *fl.* *lib.*
ut 4000 : 2000 = 1300 : x
4000 : 2000 = 1460 : x
4000 : 2000 = 1240 : x

Per Compendium.

2 : 1 = 1300 : x *fit* 650 *fl. Primi.*
2 : 1 = 1460 : x *fit* 730 *Secundi.*
2 : 1 = 1240 : x *fit* 620 *Tertii.*

summa 2000 *fl.*

QUÆSTIO V.

74. Tres Mercatores inita Societate lucrati sunt florenos 1000; Primus contulit flor. 200 per 8 menses, Secundus fl. 400 per 6 menses, Tertius 100 per 10 menses; quæritur lucrum singulorum?

RESOLUTIO.

Cujuslibet collatum particulare multiplicetur per suum tempus, erunt facta particularia, pro Primo 1600; *pro Secundo* 2400; *pro Tertio* 1000; *Hæc in unam summam collecta efficiunt* 5000, *itaque inferatur:*

Pro Primo 5000 : 1000 = 1600 : x
Secundo 5000 : 1000 = 2400 : x
Tertio 5000 : 1000 = 1000 : x

Per Compendium.

lucrum.

5 : 1 = 1600 :	*fit* 320	*Primi.*
5 : 1 = 2400 :	*fit* 480	*Secundi.*
5 : 1 = 1000 :	*fit* 200	*Tertii.*
	summa 1000 *fl.*	

QUÆSTIO VI.

75. Tres Mercatores inierunt Societatem quadriennio duraturam; *Primus* contulit initio Societatis 4000 fl. ſed poſt 6 menſes ex his abſtulit 1000 fl. verum poſt elapſos a die ablationis menſes 30, iterum contulit 2000 fl. usque ad finem quadriennii. *Secundus* principio dedit 5000 fl. & poſt menſes 10 ex his recepit 500 fl. deinde vero elapſis à die ablationis menſibus 12 retulit 1000 fl. ad terminum quadriennii. *Tertius* contulit 8000 fl. quos illæſos ad finem quadrienii reliquerat. Hoc quadriennio lucrati ſunt 100000 fl. quæritur lucrum ſingulorum?

Quæſtionem hanc, utpote ad calculos etiam Oeconomicos Exempli loco ſervientem, prolixius perſequemur.

RESOLUTIO.

Quoniam Primus contulit 4000 *fl. quos per* 6 *menſes illæſos reliquerat,* 4000 *per* 6 *multiplicando efficiunt* 24000 *fl. at quia poſt* 6 *menſes ex* 4000 *abſtulit* 1000, *igitur per reliquos* 30 *menſes tantum* 3000 *fl. in ſocietate permanſerunt, quos per* 30 *menſes multiplicando habebimus factum* 90000; *demum, quia poſt* 30 *à die ablationis menſes retulit iterum* 2000 *fl. hos ad* 3000 *addendo, habuit ad finem usque quadriennii* 5000, *eosque per reliquos ad finem menſes* 12 *multiplicando efficitur factum* 60000. *Jam hæc tria facta* 24000, 90000, & 60000, *in unam ſummam addendo habebimus collatum particulare Primi* 174000.

Eodem modo, quia Secundus *ex ſua initio collata ſumma* 5000 *fl. poſt* 10 *menſes abſtulit* 500 *fl. ergo* 5000 *fl. per* 10 *menſes efficiunt* 50000; *pro menſibus vero* 12 *tantum habuit* 4500, *ſeu multiplicando per* 12, *efficitur factum* 54000; *retulit autem poſt* 12 *a die ablationis menſem* 1000 *fl. quos addendo ad* 4500, &

ſummam

ſummam 5500 *multiplicando per* 26 *menſes (reliquos nempe ad* 48 *) efficitur factum* 143000. *Tria hæc facta* 50000, 54000, & 143000 *addendo, erit collatum ſecundi* 247000. *Tertius cum illæſam reliquerit ſuam initio-datam ſummam* 8000 *fl. hanc per* 48 *menſes (ſeu* 4 *annos) multiplicando, habetur factum* 384000 ; *jam hæc tria collata totalia horum ſociorum addendo, erit :*

Primi nempe	174000
Secundi -	247000
Tertii - -	384000
Summa collatorum	805000

Fiat jam regula Societatis.

Ut 805000 *ad* 100000 *lucrum omnium, ita collatum particulare cujusvis ad ſuum lucrum, ſeu per Compendium.*

lucrum.

$805 : 100 = 174000 : x \quad 21614\tfrac{730}{805}$ *Primi.*

$805 : 100 = 247000 : x \quad 30683\tfrac{185}{805}$ *Secundi.*

$805 : 100 = 384000 : x \quad 47701\tfrac{695}{805}$ *Tertii.*

lucrum totale $99998 \,|\, \tfrac{1610}{805}$
2

100000 *fl.*

SCHOLION.

76. *Cæteras magis implicatas, & difficiliores quæſtiones Exercitationibus Analyticis reſervamus.*

CAPUT ULTIMUM.

Quæſtiones Miſcellaneæ ad uſum utiliſſimæ, & neceſſariæ.

Quæſtiones hic adfero, quarum quidem uſus Arithmeticus, inventio autem Algebraica. Sunt hæ quæſtiones, quarum ſolutiones à plurimis Arithmeticis etiam iis, quos vulgus in arte Magiſtros celebrat, ignorantur. Quotus quisque etiam exercitatus novit calculum *Anticipationis* ſeu Regulam vulgo Rabattæ (Germanis : Die Rabath-Rechnung) vix nomine notum. Paucos reperias, qui *Anatociſmum*, ſeu cenſûs cenſum (Germanis : Den Zins zum Capital

pital schlagen) ad calculum revocent; Non multos existimo, qui celebrem juris Regulam d. *quarta falcidia* in hæreditatibus ex *Dodrante* pro omnibus circumstantiis ad leges Jurium calculent. Quæ tamen praxes, quam in vita Civili necessariæ sint ex Exemplis refendis patebit.

DEFINITIO.

77. Calculus *Anticipationis*, seu Regula Rabattæ, est calculus, quo definitur, quanto minus capitale aliquis dare debeat ei, qui id ante tempus præfixum habere desiderat. Hunc sequenti scholio explico

SCHOLION I.

78. Cajus *legaverat* Sempronio Ex. gr. *flor.* 100000 *hac conditione, ut per annos* 10, *censum* 5 *pro* 100 *perciperet quidem, at elapsis decem annis capitale* 100000 *fl. domui pauperum cederet; Elapsis annis* 4 Titius *Curator domus pauperum occasionem nanciscitur coemendorum fundorum in usum pauperum valde utilium, requirit itaque* Sempronium *de deponendo hoc Capitali ante tempus præfinitum, annuit petitioni* Sempronius *verum ita, ut pro sexennio residuo census tantam sibi partem ex hoc capitali desummat, quantum requiritur ad hoc, ut hæc pars decerpta, elocata ad censum, & census iterum ad censum positus, tantum* Sempronio *lucretur, quantus futurus fuisset census ex* 100000 *fl. per annos sex percipiendus, & simul positus ad censum novum faciendum.* Titius *suscipit conditionem, ut non majorem partem sibi desumnat* Sempronius, *quam requireretur, ut imminuti capitalis census additus capitali, & hujus census census iterum additus capitali, atque sic per sex annos tantum augeat capitale, quasi evoluto decennio integrum accepisset. Regula itaque, quæ in hanc partem a summa capitali ante tempus repetitam, decerpendam inquirit.* Regula Rabattæ *audit, fundatur autem in his postulatis:* I. *Is, qui summam pecuniæ ante præfinitum tempus (id est anticipato) deponit, jure censum exigere potest inter præsens, & præfinitum tempus sibi debitum.* II. *Compensatio est quædam solutio, ut JCti loquuntur.* III. Creditor *cum* debitore *ita contrahere potest, ut eorum negotium nunc & in præsens finiatur ita absque alterutrius damno, ut neuter alteri quidquam debeat.*

SCHOLION II.

97. *Cum Regulæ Rabattæ inventio, & modus reperiendorum numerorum Tabulæ infra ponendæ ad Algebram pertineant, has autem Exercitationes usibus Arithmeticæ numericæ tantum destinavimus, idcirco ex Ratione data numerorum Tabulæ sequentis pro annis 60 calculatorum Regulam Rabattæ definiemus.*

TA-

TABULA ANTICIPATIONIS

Seu imminutionis capitalis,

Calculata ex capitali 100000 flor. ad censum 5 pro 100.

Anni Pro quibus	Summa Anticipanda.	Anni Pro quibus	Summa Anticipanda.
1	95238	31	22036
2	90703	32	20987
3	86384	33	19987
4	82270	34	19035
5	78353	35	18129
6	74622	36	17265
7	71068	37	16444
8	67684	38	15661
9	64461	39	14915
10	61391	40	14205
11	58468	41	13529
12	55684	42	12885
13	53032	43	12271
14	50507	44	11687
15	48102	45	11131
16	45811	46	10601
17	43630	47	10096
18	41552	48	9615
19	39573	49	9157
20	37689	50	8721
21	35894	51	8306
22	34185	52	7911
23	32557	53	7534
24	31007	54	7175
25	29530	55	6833
26	28124	56	6508
27	26785	57	6198
28	25509	58	5903
29	24294	59	5622
30	23138	60	5354

Quod si continuare libeat hanc Tabulam, assumatur ultimus Tabulæ numerus 5354, *& inferatur, ut* 21 : 20 = 5354 : x, *erit inventus numerus* 5099 $\frac{1}{21}$ *seu (quia fractio minor est dimidio, assumendo rotundum numerum* 5099, *omissa fractione, quod in aliis Tabulæ numeris quoque observatum est) numerus* 5099

ro

pro anni 61 *hic numerus* 5099 *in proportionem ordinatus, ut* 21 : 20 = 5099 : x *dat numerum* 4856 *pro annis* 62, *atque ita porro progredi licet per plures annos donec capitale ad unitatem reducatur. Non absimili modo quis Tabulam construere poterit census* 6 *pro* 100, *si inferat, ut* 106 : 100 = 100000 : x *His intellectis ad Resolutionem Problematis Rabattæ progrediamur.*

PROBLEMA RABATTÆ,

SEU ANTICIPATIONIS.

80. *Determinare partem desumendam ex capitali, quod capitale post aliquot annos elapsos primo pendendum esset, cujus anticipatio nunc præstanda petitur juxta conditiones (§. 78.) positas.*

RESOLUTIO.

I. Inquirantur in supra posita Tabula anni pro quibus anticipandum petitur capitale, & videatur, quæ summa iisdem annis correspondens anticipanda habetur.

II. Fiat Regula aurea directa, cujus primus terminus sit 100000; terminus secundus sit datis annis in Tabula repertis correspondens numerus; tertius terminus sit datum capitale, quod anticipandum est, erit quartus numerus capitale imminutum pro datis annis anticipandum.

EXEMPLUM.

Cajus *tenetur* Titio *deponere capitale* 23152 *fl. post* 3 *elapsos annos, verum* Titius *nactus occasionem, pecuniam hanc (quæ sua futura est post* 3 *annos) nunc elocandi alibi cum fœnore; hanc itaque repetit* a Caio, *petitioni huic juxta conditiones* (§. 87.) *annuit* Cajus, *quæritur quanto minus capitale* Cajus *dare debeat* Titio, *supposito census* 5 *pro* 100.

Itaque juxta datam Resolutionem fiat repula aurea 100000 : 86384 = 23152 : x *fiet* 20000 *fere ergo loco* 23152 *fl. anticipando,* Titius *tantum percipit* 20000 *fere, patet id per sequens examen juxta conditiones Rabattæ institutum.*

Nam Primo: Titius *imminutum hoc capitale* 20000 *florenorum spacio* 3 *annorum censum census adjungendo huic capitali, habet totum capitale in fine tertii anni, quasi illud non anticipasset; ut ex subjectis proportionibus liquet.*

Nam

Nam inferendo : 100 : 105 = 20000 : x *fit capitale cum censu anni primi* 21000.
& pro anno secundo : 100 : 105 = 21000 : x *fit capitale cum censu* 22050.
& pro anno tertio : 100 : 105 = 22050 : x *fit capitale cum censu* 23152 *&* $\frac{1}{2}$ *fere.*

Secundo *patet quoque* Cajum *ex decerpta parte* 3152 *fl. ad censum census intra triennium posita, & capitali suo adjecta rehabere censum census, quem habuisset ex capitali integro* 23152 *fl. intra triennium.*

Nam capitale 23152 *fl. ad censum census positum lucratur intra* 3 *annos* 3648, *sed etiam* 3152 *fl. uno cum suo censu census faciunt intra annos* 3 *fere* 3648.

Nam si fiat
pro anno Primo : 100 : 105 = 3152 *fit* 3309 $\frac{6}{10}$
& pro an. Secun. : 100 : 105 = 3309 $\frac{6}{10}$, *fit* 3475 $\frac{2}{25}$
& pro an. Tertio: 100 : 105 = 3475 $\frac{2}{25}$, *fit* 3648 $\frac{13}{08}$

Unde liquet recte secundum jus proprietatis utriusque solutam Quæstionem Anticipationis, seu Rabattæ.

Porro per eandem quoque Tabulam solvitur Quæstio Anatocismi.

DEFINITIO.

81. Regula *Anatocismi* est, per quam inquiritur in summam capitalem auctam per censum census pro datis annis, Germ. Den Zins auf Zins, oder zum Capital schlagen. Hung. A' vett Interesnek interesse.

PROBLEMA ANATOCISMI.

82. *Determinare pro datis quibusvis annis capitale quodvis, auctum per Anatocismum, juxta censum 5 pro 100.*

RESOLUTIO.

I. Inquirantur in Tabula supra posita anni pro quibus capitale auctum petitur, eorundemque annorum in Tabula repertorum numerus correspondens excerpatur.

II. Fiat regula aurea directa : numerus ex Tabula inventus, ponatur loco primo, secundo loco numerus 100000, tertio, capitale datum pro quo quæritur Anatocismus ; erit quartus numerus inventus, capitale una cum suo Anatocismo pro datis annis quæsitum.

EXEM-

EXEMPLUM.

Cajus *summam capitalem* 23152 *flor. elocat in censum* 5 *pro* 100 *ad annos* 3, *ita ut census census singulis annis per anatocismum adjiciatur capitali, quæritur quamnam summam habebit in fine anni tertii? fiat juxta datam Resolutionem :*

86384 : 100000 = 23152 *fl. fit* 26800 *fere,*

Unde lucrum anatocismi 3648 *fl. pro annis tribus ut priori quæstione positum.*

DEFINITIO.

83. *Quarta falcidia* est quarta pars totius Hæreditatis.

SCHOLION.

84. *Si unus, aut plures hæredes per* legata *subinde ita graventur, ut hæreditas plus quam* ¼ *imminuenda foret per legata, tali casu legata juxta jus civile, ita proportionaliter minuenda sunt, ut hæredibus pars quarta (seu quarta falcidia) integra, & salva permaneat; esto casus.*

PROBLEMA.

85. *In casu quo legata* dodrantem *hæreditatis superant, ita hæc legata inter* legatarios *proportionaliter partiendi, ut hæredum pars* quarta falcidia *integra, ac salva habeatur.*

RESOLUTIO.

I. Deductis deducendis inquiratur in totam massam hæreditatis.

II Dividatur massa tota per 4, erit quotus pars *quarta falcidia*, hic quotus iterum multiplicatus per 3 producit *dodrantem.*

III. Inferatur per regulam Societatis : *Ut summa legatorum ad dodrantem, ita cujusvis legatum particulare ad partem loco sui legati percipiendam.*

EXEMPLUM.

Cajus *post obitum relinquit* 2452 *fl. tenetur autem ex debito* 930 *fl. impensæ in exequias, & cætera fuere* 250 *fl. legavit autem* Joanni 500 *fl.* Paulo 300 Jacobo 250 *fl. hæredes instituit* Petrum *ex* Tertia, Stephanum *ex duabus reliquis partibus hæreditatis. Quæritur quantum hæredes, quantumque singuli legatari percipere debeant?*

Addatur

Addatur debitum 930 ad expensas in exequias 250, erit summa 1180 fl. hæc subtracta a relicta hæreditate 2452, relinquit residuam totam massam 1272 fl. Hæc divisa per 4 dat quartam falcidiam 318, *hic quotus multiplicatus per 3 dat 954* dodrantem, *sunt autem legata 500, & 300, & 250, horum summa est 1050. ergo inferatur per regulam tertiam hujus.*

sum. leg. dodr.

Pro Joanne $1050 : 954 = 500 : x$ *fiet* $454\frac{2}{7}$ *fl.*

Paulo $1050 : 954 = 300 : x$ *fiet* $272\frac{4}{7}$ *fl.*

Jacobo $1050 : 954 = 250 : x$ *fiet* $227\frac{1}{7}$ *fl.*

summa 954 *fl.*

Ex quarta falcidia 318 *acquirit* Petrus $\frac{1}{3}$ *hoc est* 106 *fl.*

Stephan. $\frac{2}{3}$ *hoc est* 212

summa 318

cum legatis 954

Tota hæreditas 1272

SCHOLION.

86. *Si unus, aut plures hæredes pluribus legatis graventur, tali casu considerando hæreditatem cujuslibet hæredis tanquam massam totalem relate ad legatarios, eodem modo instituetur calculus. Cæterum plura parantem ad usus civiles, & sumptus hæc in publicum bonum evulgandi, & ocium nunc quidem defecit, daturus subinde alia, hæc interea DEI Solius Gloriæ consecrata commodo publico conscripta volui.*

FINIS.