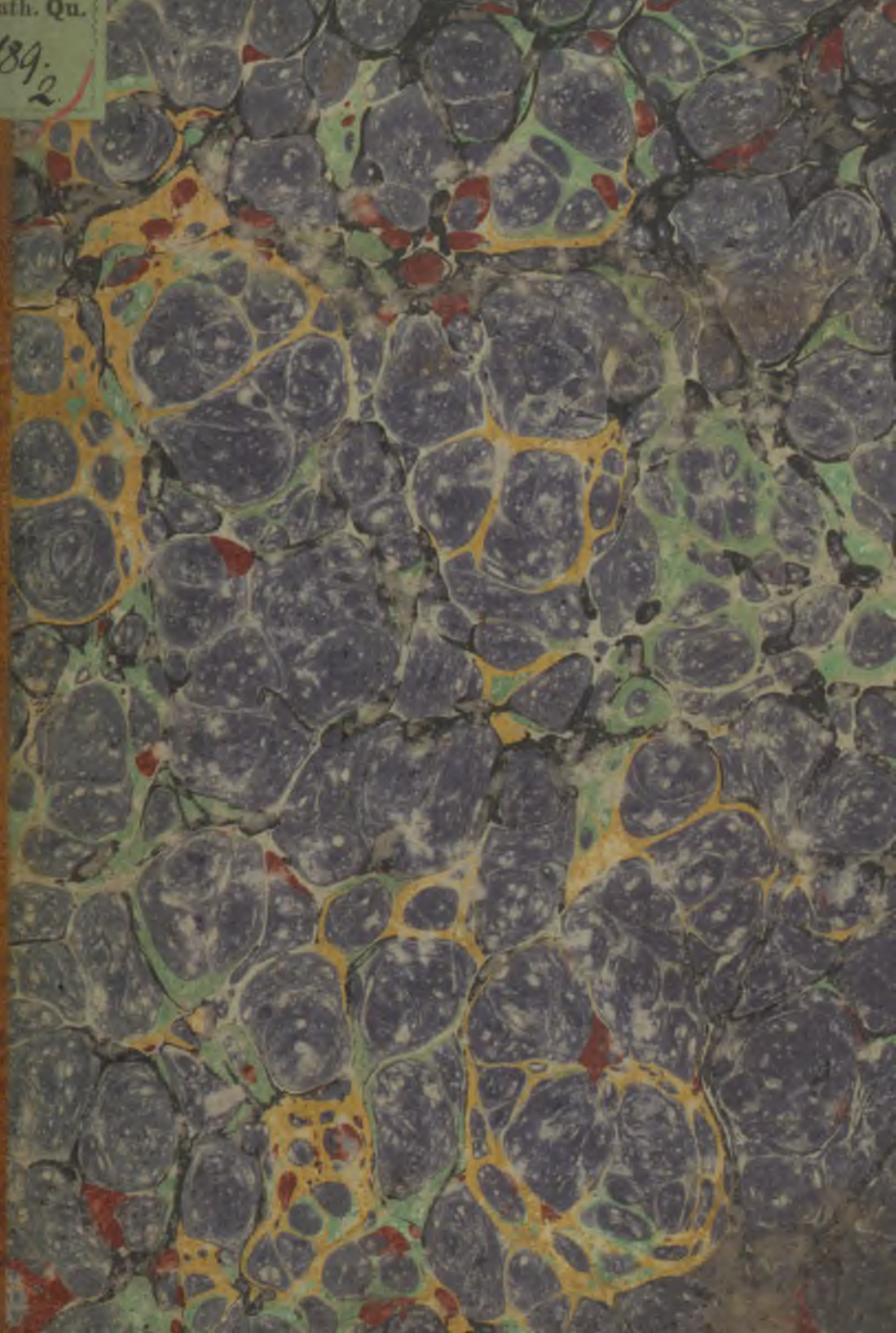


Math. Qu.

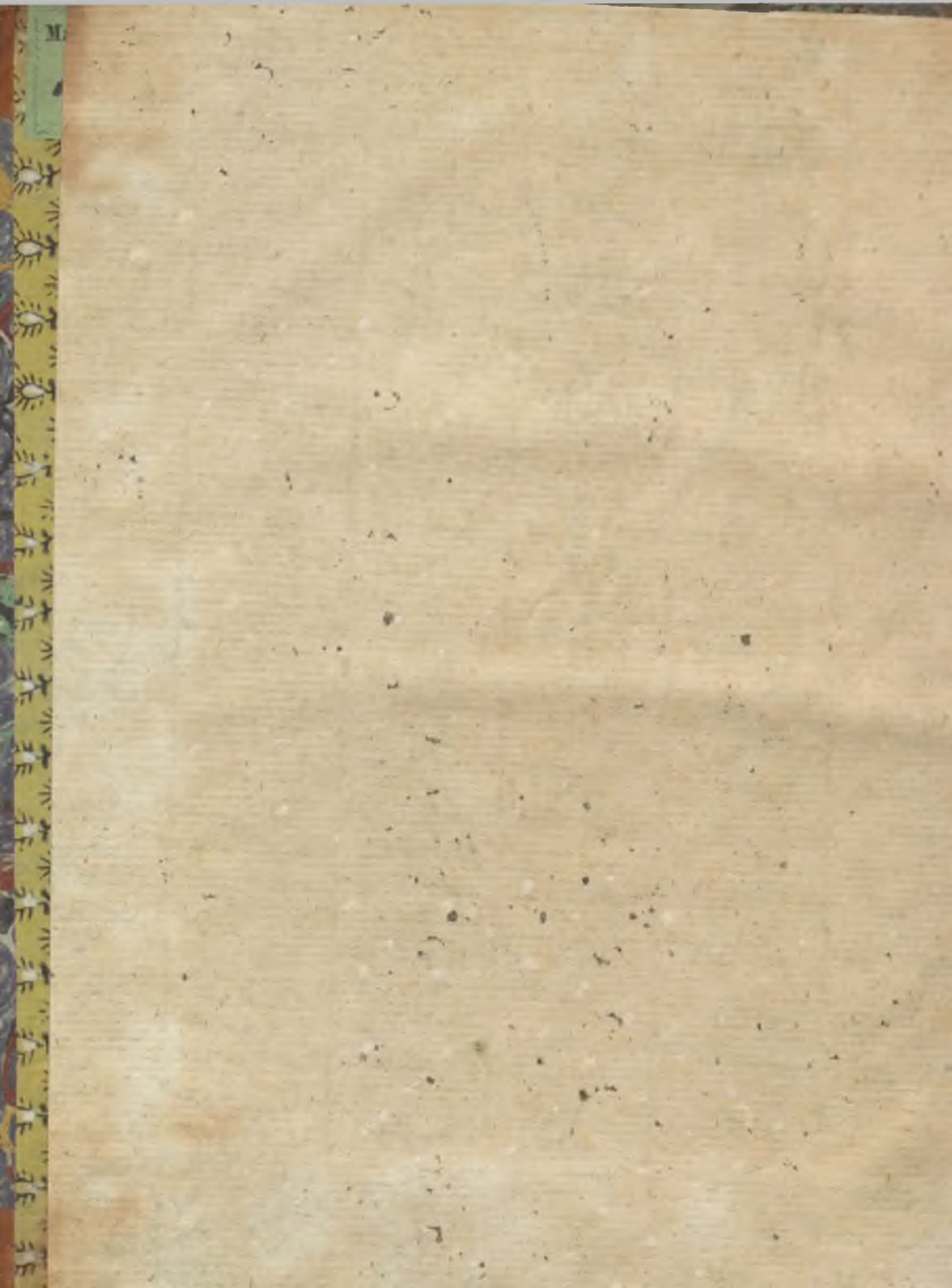
189.2



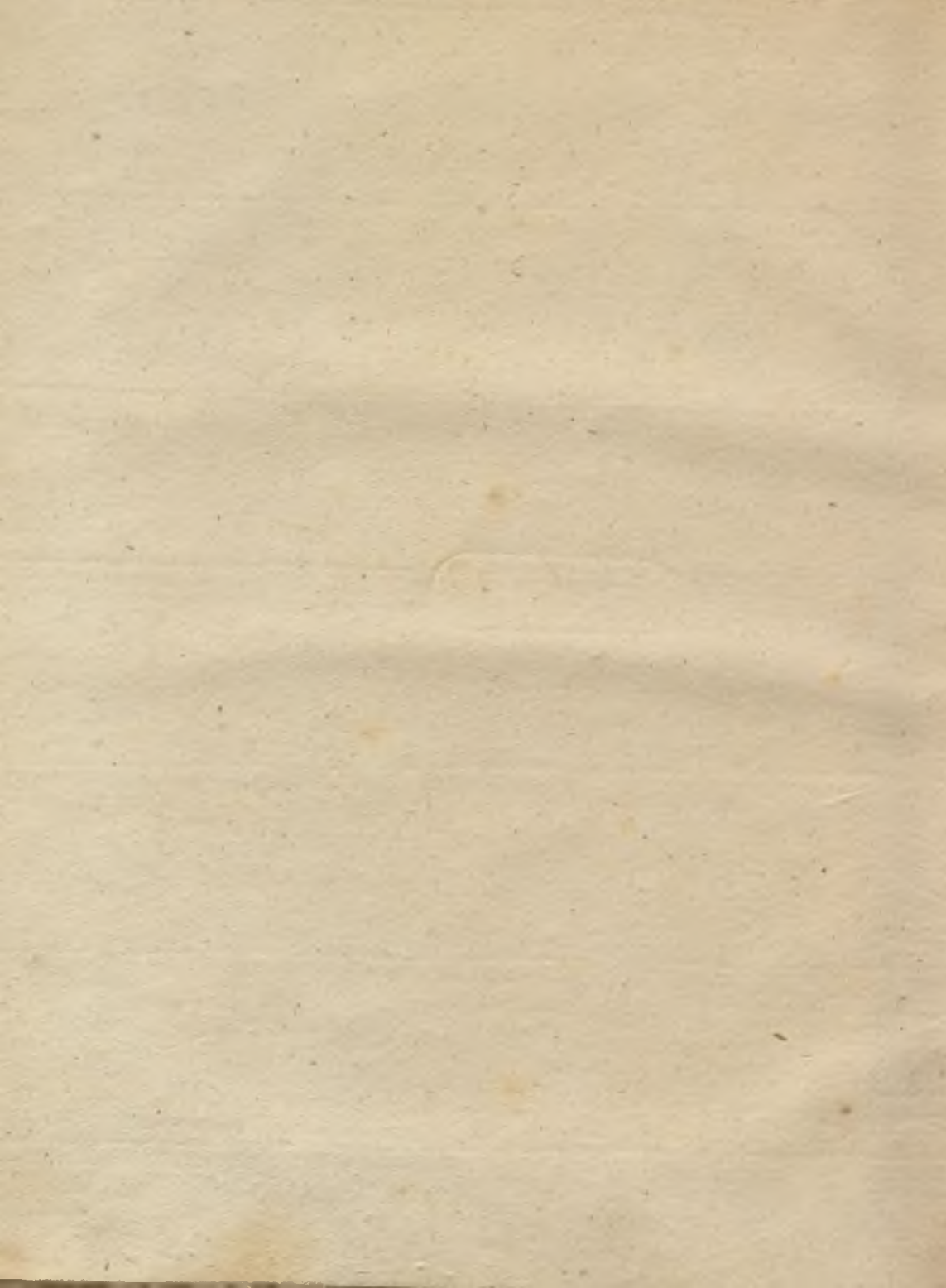
189.











OPUSCULA  
STATICO-MECHANICA

PRINCIPIIS  
ANALYSEOS FINITORUM  
SUPERSTRUCTA

---

EDITORE

IOANNE PASQUICH

REGIAE SCIENTIARUM SOCIETATIS BOHEMICAЕ MEMBRO  
EXTRAORDINARIO; REGIAE SOCIETAT. SCIENT. GOTTIN-  
GENSIS A COMMERC. LITTERARUM SODALI; ET MATHE-  
SEOS SUBLIMIORIS IN REG. SCIENT. UNIVERSIT.  
HUNGAR. PROFESSORE EMERITO.

---

*VOLUMEN II.*

CUM FIGURIS.

---

LIPSIAE  
IN LIBRARIA WEIDMANNIANA

1799.

1878  
STATE OF MICHIGAN  
OFFICE OF THE  
LIBRARIAN

M. ACADEMIA  
KÖNYVTÁRA



## INDEX CONTENTORUM.

### *Introductio.*

Completens brevem expositionem naturae et discriminis quantorum  
commensurabilium et incommensurabilium.

### *Dissertatio I.*

De generalibus quibusdam corporum physicorum, viriumque in illa  
agentium proprietatibus.

### *Dissertatio II.*

De lege aequilibrii virium in rectas inflexiles directe agentium.

### *Dissertatio III.*

De viribus in rectas inflexiles oblique agentibus, earumque compo-  
sitione et resolutione.

### *Dissertatio IV.*

De Centro aequilibrii virium directionibus parallelis in datum systema  
plurium punctorum agentium.

### *Dissertatio V.*

De centro gravitatis in genere.

*Dissertatio VI.*

De investigatione centri gravitatis linearum et planorum gravium.

*Dissertatio VII.*

De investigatione centri gravitatis in corporibus, eorumque superficiebus.

*Dissertatio VIII.*

De motu punctorum aequabili uniformiterque accelerato et retardato.

*Dissertatio IX.*

De determinatione motus progressivi datarum massarum per datas vires.

*Dissertatio X.*

De lapsu corporum gravium per plana inclinata et lineas curvas.

*Dissertatio XI.*

De momento inertiae.

*Dissertatio XII.*

De motu massarum circa axes fixos.

*Dissertatio XIII.*

De motu pendulorum, centroque oscillationis.



## INTRODUCTIO

COMPLECTENS BREVEM EXPOSITIONEM NATURAE  
ET DISCRIMINIS QUANTORUM COMMENSURABI-  
LIUM ET INCOMMENSURABILIIUM.

### I. DEFINITIO.

**S**i quodcunque quantum  $g$  aliquoties, puta bis, ter, quater, aut pluries, sumtum exaequet aliud quantum  $G$ ; erit  $g$  pars *aliquota* quanti  $G$ , et  $G$  *multiplum* quanti  $G$ . Quantum  $e$  est *communis pars aliquota* duorum quantorum  $M$ ,  $N$ , si  $e$  aequetur alicui parti aliquotae tam quanti  $M$ , quam quanti  $N$ , si e. gr. quantum  $e$  sit pars *5ta* quanti  $M$ , et pars *7ma* quanti  $N$ .

### 2. Corollarium.

Pars aliquota  $x$  partis aliquotae  $X$  quanti  $Z$  est pars aliquota quanti  $Z$ .  
(I. §).

### 3. DEFINITIO.

Quanta  $M$ ,  $N$  erunt *commensurabilia*, si ea communem habuerint aliquam partem aliquotam (I. §): quanta vero  $M$ ,  $N$  dicentur *incommensurabilia*, si nullam habeant communem partem aliquotam.

### Scholion.

Ut nimirum duo quanta  $M$ ,  $N$  possint dici commensurabilia, sufficit, ut constet, dari certum quantum  $e$ , quod sit communis pars aliquota eorundem quantorum (I. §), dari idcirco aliquam partem aliquotam quanti  $M$ , quae aequetur certae parti aliquotae quanti  $N$ , licet fors non omnis pars aliquota quanti  $M$  sit simul aliqua pars aliquota quanti  $N$ . Sic si esset  $M = 7e$ , et  $N = 5e$ , adeoque  $e$  pars *7ma* quanti  $M$ , et pars *5ta* quanti  $N$ ; esset  $e$  communis pars aliquota quantorum  $M$ ,  $N$  (I. §), quantaque haec essent commensurabilia, licet non omnis pars aliquota quanti  $M$  sit aliqua

pars aliquota quanti N, ut e. gr. pars 3<sup>ta</sup>  $\frac{M}{3} = \frac{7e}{3}$  nulla potest esse pars aliquota quanti N = 5e; fecus daretur numerus integer n, pro quo fieret  $\frac{7e}{3} = \frac{5e}{n}$ , hinc  $n = \frac{15}{7}$ , quod est impossibile. Verum, ut duo quanta M, N sint incommensurabilia, haud sufficit, ut *certa* pars aliquota quanti M nulli parti aliquotae quanti N aequetur, aut ut *certum* quantum e nulla sit communis pars aliquota quantorum M, N; ad id enim necessario requiritur, ut nullum absolute sit possibile quantum e aequale communi parti aliquotae quantorum M, N, ut idcirco nulla absoluta pars aliquota quanti M, utcumque parva illa sumatur, sit simul aliqua pars aliquota quanti N. Haec de discrimine quantorum commensurabilium et incommensurabilium in gratiam tyronum dicta sint, quorum multi doctrinam, quam hic paucis exponere constitui, aut penitus ignorabunt, aut minus, quam necessarium est, habebunt perspectam.

#### 4. Corollarium 1.

Si alterutrum duorum quantorum M, N, puta N, fuerit pars quaecunque aliquota alterius quanti M; erit quaevis pars aliquota quanti N aequalis alicui parti aliquotae quanti M (2. §), quantaque M, N erunt commensurabilia (3. 1. §).

#### 5. Corollarium 2.

Impossibile est, ut duo quanta M, N sint commensurabilia simul et incommensurabilia (3. §): duo autem quanta homogenea M, N (e. gr. duo tempora, vel duae lineae, aut duae superficies, etc.) semper erunt vel commensurabilia, vel incommensurabilia (3. §).

#### 6. Corollarium 3.

Quoties duo quanta M, N fuerint commensurabilia, toties vel erit ipsum quantum N aliqua pars *mta* quanti M, vel certa pars *nta* quanti N aequabitur alicui *mtae* parti quanti M (4 3. §): extabit igitur numerus integer m, vel fractus  $\frac{m}{n}$  aequalis exponenti rationis quanti M ad N, pro quo fiet  $M = Nm$  vel  $M = N \frac{m}{n}$ . E. gr. si dicas, partem *stam* quanti N aequari parti *svae* quanti M, aut totum quantum N esse partem *svam* quanti M, erit  $M = N \frac{2}{3}$  casu primo, et  $M = N 8$  casu altero; consequenter erit  $\frac{2}{3}$ , casu primo, et 8, casu altero, exponens rationis quanti M ad N.

#### 7. Corol-

## 7. Corollarium 4.

Et vicissim, si extet numerus integer  $m$  vel fractus  $\frac{m}{n}$  aequalis exponenti rationis quanti  $M$  ad  $N$ , pro quo fiat  $M = N^m$  vel  $M = N^{\frac{m}{n}}$ ; erit  $N$  pars *mta* quanti  $M$  casu primo, et pars *nta* quanti  $N$  aequabitur parti *mtae* quanti  $M$  casu secundo (1. §): utroque casu erunt ergo  $M$ ,  $N$  quanta commensurabilia (4. 3. §).

## 8. Corollarium 5.

Quamobrem, si certo constet, duo quanta  $M$ ,  $N$  esse incommensurabilia, constabit eo ipso, nullum esse numerum integrum vel fractum assignabilem, qui aequetur exponenti rationis quanti  $M$  ad  $N$ ; secus enim quanta  $M$ ,  $N$ , ex hypothese incommensurabilia, essent simul commensurabilia (7. §), contra (5. §)

## 9. Corollarium. 6.

Et vicissim, undecunque constiterit, nullum esse numerum, nec integrum, neque fractum, assignabilem, qui aequetur exponenti rationis quanti  $M$  ad quantum homogeneum  $N$ , constabit eo ipso, quanta  $M$ ,  $N$  esse incommensurabilia; secus deberent ea esse commensurabilia (5. §), proinde assignabilis esset talis numerus (6. §), contra hypothesein.

## 10. Theorema.

Pro quibuslibet duobus quantis  $E > e$  inaequalibus extat numerus integer  $m$ , pro quo esset  $E = em$ , vel  $E > em$  et simul  $E < e(m+1)$ .

## Demonstratio.

Cum minus quantum  $e$  instar unius partis quanti majoris  $E$  liceat spectare, poterit quantum  $E$  in partes aequales  $e$ ,  $e$ ,  $e$ , ---  $e$  mente resolvi, ita ut numerus  $m$  harum partium per magnitudinem quanti  $E$  ejusdemque partis  $e$  perfecte determinatus sit, utque aut hae partes simul sumtae exaequent quantum  $E$ , quo fiat  $E = em$ , aut eae omnes una cum quapiam parte  $x$ , quae minor sit parte  $e$ , totum  $E$  constituent, adeoque sit  $E = em + x$ , proinde  $E > em$ , sed simul  $E < e(m+1)$ .

## 11. Corollarium. 1.

Pro quovis quanto  $e$  utcumque parvo et alio homogeneo  $E$  utcumque magno extabit numerus integer  $r$ , pro quo *rtuplum* quanti  $e$  esset majus quanto

quanto  $E$ , nimirum  $e > E$  (10. §.): igitur pars *nta* quanti  $E$  minor quanto  $e$ , nimirum  $\frac{1}{r} E < e$ .

## 12. Corollarium. 2.

Si quanta  $M$ ,  $N$  sunt incommensurabilia, dari debet pars aliqua *nta* quanti  $N$  minor quanto  $M$  (11. §.), et pro quavis ejusmodi parte, utcumque magni denominatoris  $n$ , cum illa nulli parti aliquotae quanti  $M$  possit aequari (3. §.), cum idcirco  $M$  nullum possit esse multipulum ejusdem partis (1. §.), debet extare numerus integer  $m$ , pro quo fiat  $M > N \frac{m}{n}$  et simul  $M > N \frac{m+1}{n}$  (10. §.).

## 13. Corollarium. 3.

Ex his *rationalium irrationaliumque* rationum natura elucet. Ratio inter duo quanta  $M$ ,  $N$  commensurabilia est *rationalis*, ut et illius exponents, utpote aequalis determinato cuipiam numero integro vel fracto  $e$ , pro quo fit  $M = Ne$  (6. §.). Ratio autem inter duo quanta,  $M$ ,  $N$  incommensurabilia est *irrationalis*; exponents illius  $e$  est *furdus* numerus seu *irrationalis*, nulli determinato numero, integro aut fracto, aequalis (8. §.) sed unitati incommensurabilis, ita ut is pro *hisdem* numeris  $m$ ,  $n$  sit  $e > \frac{m}{n}$  et  $e < \frac{m+1}{n}$ , pro quibus est  $M > N \frac{m}{n}$  et  $M < N \frac{m+1}{n}$  (12. §.).

## Scholion.

Exponents enim  $e$  supponitur per id ipsum, quod is ex unitate  $1$  complectitur, indicare, quantum in data ratione  $M:N$  ex quanto  $N$  in  $M$  continetur, seu quoties aut totum quantum  $N$ , aut certa pars aliquota quanti  $N$  sumi debet, ut prodeat  $M$ : utprimum ergo est  $M > N \frac{m}{n}$  et  $M < N \frac{m+1}{n}$ , quia id ipsum debet exponents  $e$  rationis  $M:N$  indicare; erit quoque  $e > \frac{m}{n}$  et  $e < \frac{m+1}{n}$ , nimirum  $e > 1 \cdot \frac{m}{n}$  et  $e < 1 \cdot \frac{m+1}{n}$ .

## 14. DEFINITIO.

*Mensuram* alicujus quanti  $Q$  vocant quantum homogeneous  $q$  determinatae notaeque magnitudinis: quantum autem  $Q$  ope mensurae  $q$  *metiri* dicimur, dum rationem illius ad mensuram  $q$  investigamus.

15. Corollarium, 1.

Dato exponente e rationis quanti Q ad ipsius mensuram q, cum eo ipso sit  $Q = q^e$ , poterit poni  $Q = e$  posita mensura  $q = 1$ : nimirum omne quantum Q, spectata ejusdem magnitudine licebit per certum numerum e exprimere, qui videlicet aequetur exponenti rationis quanti Q ad quantum q pro ejusdem mensura assumtum (14. §.), modo hic numerus ad unitatem mensuram q denotantem relatus cogitetur.

Sic e. gr. in geometricis dimensionibus, denotante q certum pedem cubicum, si numerus integer 4 vel fractus  $\frac{4}{2}$  sit exponens rationis dati Cylindri C ad eundem pedem cubicum q; poterit poni  $C = 4$  casu primo, et  $C = \frac{4}{2}$  casu secundo, modo hi numeri ad pedem cubicum q pro unitate assumtum relati cogitentur, quo fiat, ut  $C = 4$  vel  $C = \frac{4}{2}$  tantundem denotet, ac cylindrum C aequari quatuor pedibus cubicis q, vel quatuor *stis* unius pedis cubici q.

Scholion.

Hoc sensu omnis numerus concretus exprimit aliquod quantum, pro cuius mensura sumta est unitas, ad quam is numerus refertur; idemque numerus, instar abstracti spectatus, dat exponentem rationis quanti per illum numerum expressi ad quantum pro ejus mensura assumtum. Sic e. gr. 8 horae expriment certum tempus, pro cuius mensura una hora est sumta, ita ut 8 sit exponens rationis ejusdem temporis ad assumtam mensuram.

16. Corollarium. 2.

Hoc tamen modo (15. §.) tunc solum licebit datum quantum Q per certum numerum accurate exprimere, si illud sit assumtae mensurae q commensurabile: dum enim Q fuerit incommensurabile mensurae q; nullus erit assignabilis numerus e, pro quo possit poni  $Q = q^e$ , adeoque  $Q = e$  pro  $q = 1$  (13. §.).

17. Corollarium. 3.

Semper autem, dum datum quantum Q incommensurabile fuerit assumtae mensurae q, poterit accipi aliqua nta pars mensurae q minor quanto Q, et pro illa determinari numerus integer m, qui det  $Q > q \frac{m}{n}$  et  $Q < q \frac{m+1}{n} = q \frac{m}{n} + \frac{q}{n}$  (12. §.): hac ergo ratione poterimus approximare ad quantum  $q \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$  pro  $q = 1$ , cujus differentia a dato quanto

erit minor parte *nta*  $\frac{q}{n}$  mensurae  $q$ , quod idcirco in praxi, ubi minutiae solent negligi, quanto  $Q$  poterit substitui, si numerus  $n$  adeo magnus sit, ut pars *nta* mensurae  $q$  citra notabilem errorem possit negligi.

## Scholion.

Ponamus dari triangulum rectangulum, quod habeat hypothensam  $h$ , et cathetos aequales  $q, q$ ; erit  $h^2 = q^2 + q^2 = 2q^2$ , hinc  $h = q\sqrt{2}$ . Exponens rationis hypothensae  $h$  ad cathetum  $q$  est  $\sqrt{2}$ , nulli idcirco numero assignabili, nec integro neque fracto, aequalis; hypothensa  $h$  est incommensurabilis catheto  $q$ ; sumta catheto  $q = 1$  pro mensura hypothensae, poterit quidem poni  $h = \sqrt{2}$ , sed  $h$  nullo numero assignabili poterit exacte exprimi. Interea licebit adproximare ad rectam  $qe$ , cujus differentia ab hypothensa  $h$  minor sit data quacunque parte decimali  $q \cdot \frac{1}{100\dots0}$  ipsius catheti  $q$ , si nimirum extractione radicis  $\sqrt{2}$  adproximetur ad numerum  $e$ , cujus differentia a radice  $\sqrt{2}$  minor sit parte decimali  $\frac{1}{100\dots0}$  unitatis.

## 18. Corollarium 4.

Interea etiam eo casu, quo quantum  $Q$  fuerit incommensurable sumtae mensurae  $q$ , quo casu idcirco pro quovis numero integro  $n$  alter  $m$  extiterit, qui det  $Q > q \frac{m}{n}$  et  $Q < q \frac{m+1}{n}$  (12. §.), licebit ponere  $Q = qe$ , hinc  $Q = e$  pro  $q = 1$ , modo per  $e$  intelligatur numerus surdus semper major fractione  $\frac{m}{n}$  et minor fractione  $\frac{m+1}{n}$  (13. §.), ad quem per (17. §.) adproximare liceat.

## Scholion.

Expressiones hae, utriusque generis, quantorum per numeros (15. 18. §.) amplissimum habent usum in universa mathesi applicata, ipsaeque adproximationes in (17. §.) expositae utilissime adhibentur, ubi summa accuratio nec possibilis est, neque necessaria. Verum ubi de demonstrandis quantorum relationibus agitur, necertitudo evidentiaque mathematica patitur, summo rigore opus est, eoque ipso ab incommensurabilitate quantorum nunquam licet praescindere, et ea, quae de quantis pro commensurabilibus sumtis demonstrata habentur, ad quanta generatim sumta extendere: quoties idcirco relatio aliqua duorum aut plurium quantorum in sequentibus demon-

demonstranda fuerit, quanta ejusmodi in utroque statu considerabimus, quo evidenter appareat, utrum talis relatio de iis semper, seu illa sint commensurabilia, seu incommensurabilia, possit praedicari, atque in hunc finem subjungam criteria, tam aequalitatis duorum quantorum uni tertio incommensurabilium, quam proportionalitatis quatuor quantorum talis indolis.

## 19. DEFINITIO.

Quantum aliquod  $g$  bis, ter, quater, et generatim *ries contineri* dicitur in dato quanto  $G$ , si quantum  $g$  *ries* sumtum exaequet aut totum quantum  $G$ , aut unam partem quanti  $G$ , ita ut pars altera quanti  $G$  minor sit quanto  $g$ .

E. gr. Numerus 4 ter continetur tam in 12, quam in 15, quia numerus 4 ter sumtus exaequat totum numerum 12, et unam partem numeri 15, ita ut pars altera 3 hujus numeri minor sit numero 4.

## 20. Theorema.

Si dentur duo quanta inaequalia  $U > u$ , eademque comparentur cum quanto tertio homogeneo  $V$ ; possibilis debet esse pars aliquota quanti  $V$ , quae in quanto majore  $U$  pluries contineatur, quam in minore  $u$ .

## Demonstratio.

Quidquid sint quanta  $U$ ,  $u$ ,  $V$ , debet necessario extare pars aliquota quanti  $V$ , quae minor sit singulis quantis  $U$ ,  $u$ , eorundemque differentia  $U - u = D$  (11. §.), quae idcirco, si non pluries, semel tamen contineatur in  $u$ , et semel in  $D$  (19. §.), adeoque pluries in  $U = u + D$  quam in  $u$ .

## 21. Theorema.

Duo quanta  $Z$ ,  $X$  uni tertio  $z$  incommensurabilia erunt necessario inter se aequalia, si pro quovis utcumque magno numero integro  $n$  extet alter numerus integer  $m$ , quo fiat tam  $Z > z \frac{m}{n}$  et  $Z < z \frac{m+1}{n}$ , quam  $X > z \frac{m}{n}$  et  $X < z \frac{m+1}{n}$ .

## Demonstratio.

Pro qualibet *nta* parte quanti  $z$  dari numerum integrum  $m$ , pro quo fit tam  $Z > z \frac{m}{n}$  et  $Z < z \frac{m+1}{n}$ , quam  $X > z \frac{m}{n}$  et  $X < z \frac{m+1}{n}$  tantandem significat, ac quamlibet partem aliquotam quanti  $z$  in quovis quantorum  $Z$ ,  $X$  toties contineri, quoties ea continetur in altero (19. §.): in assumta  
hypo-

hypothesi est ergo impossibilis pars aliquota quanti  $z$ , quae in alterutro quantorum  $Z$ ,  $X$  pluries quam in altero contineatur, unde necessario sequitur, quanta  $Z$ ,  $X$ , cum nequeant esse inaequalia (20. §.), esse inter se aequalia.

22. Theorema.

*Si, datis quatuor quantis  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ , pro quolibet utcumque magno numero integro  $n$  alter numerus integer  $m$  fuerit possibilis, qui det tam  $M > N \frac{m}{n}$  et  $M < N \frac{m+1}{n}$ , quam  $P > Q \frac{m}{n}$  et  $P < Q \frac{m+1}{n}$  (12. §.), erit ratio quanti  $M$  ad  $N$  aequalis rationi quanti  $P$  ad  $Q$ , seu erit  $M:N = P:Q$ .*

Demonstratio.

Si enim quantum  $x$  sit homogeneous quantum  $Q$  et petatur ratio quanti  $x$  ad  $Q$ , aequalis rationi quanti  $M$  ad  $N$ , quo fiat  $M:N = x:Q$ ; necesse est, ut tantundem contineat  $x$  ex  $Q$ , quantum continet  $M$  ex  $N$ : pro iisdem ergo numeris integris  $m$ ,  $n$ , pro quibus fuerit  $M > N \frac{m}{n}$  et  $M < N \frac{m+1}{n}$ , debet etiam esse  $x > Q \frac{m}{n}$  et  $x < Q \frac{m+1}{n}$ . Quare, cum per hypothesein fit  $P > Q \frac{m}{n}$  et  $P < Q \frac{m+1}{n}$ ; erit necessario  $x = P$  (21. §.), consequenter  $M:N = P:Q$ .

---

DISSERTATIONES  
AD  
STATICAM CORPORUM SOLIDORUM  
PERTINENTES.

THE  
STANDARD CORPORATION  
NEW YORK

---

DISSERTATIO I  
DE  
GENERALIBUS QUIBUSDAM CORPORUM PHYSICO-  
RUM, VIRIUMQUE IN ILLA AGENTIUM  
PROPRIETATIBUS.

---

23. DEFINITIO.

**T**ria in omni corpore physico merentur notari: *Volumen*, seu pars spatii, quam totum corpus occupat: *Massa*, seu quantitas materiae sub eodem volumine contentae: *Pori* denique, seu interstitia omni materia, ad massam corporis pertinente, vacua et per totum volumen, teste experientia, disseminata.

24. Corollarium 1.

Inventio voluminis dati cujuscunque corporis physici ab iisdem pendet principiis, quibus determinatio soliditatis corporum geometricorum nititur (23. §.).

E. gr. Volumen cylindri plumbei aequabitur producto ex area baseos in altitudinem cylindri; volumen conii lignei erit aequale uni tertiae producti ex area baseos in altitudinem conii, et sic porro.

25. Corollarium 2.

Utcunque autem dati alicujus corporis volumen notum fuerit, poterit ejusdem massa penitus ignorari (23. §.) Cum enim partem unam voluminis massa expleat, partem vero alteram pori occupent; nisi spatium innotescat, quod omnes pori dati corporis simul sumti occupant, impossibile erit spatium noscere, quod ejus massa explet.

## 26. Corollarium 3.

Interea facile ex (23. §.) elucet, massam cujuslibet corporis eo *densiorem* futuram, quo minor fuerit pars dati voluminis, quam omnes pori occupant, quo magis idcirco particulae materiales massam corporis constituentes stipatae, seu quo viciniores illae inter se fuerint, ita ut generatim, quaelibet massa eo densior futura sit, quo major fuerit illius quantitas sub determinato volumine.

## 27. DEFINITIO.

Quamobrem, si massa per certum volumen sic sit diffusa, ut quaevis partes aequales ejusdem voluminis, utcunque magnae aut parvae, eandem massae quantitatem complectantur, eadem erit in omnibus voluminis partibus massae densitas, ipsaque massa vocabitur *aequaliter densa*: corpora autem aequaliter densa vocabuntur, quorum massae (23. §.) aequaliter densae fuerint. Generatim autem duo corpora, quorum massae ejusdem vel diversae speciei materia constiterint, ut e. gr. duo globi aurei, vel duo globi, quarum unus sit plumbeus, et alter aureus; erunt *homogenea* casu primo, et *heterogenea* casu secundo. Hinc intelligitur, quid significet, corpus aliquod C esse *homogeneum*: quoties nimirum omnes, magnae et parvae partes corporis C ejusdem speciei massa constiterint; dicetur C esse corpus *homogeneum*.

## 28. Corollarium 1.

Si corpus C voluminis V sit aequaliter densum, sumaturque aliqua pars c ejusdem corporis, cujus volumen aequetur parti dimidiae, aut *3tae*, vel *4tae*, aut generatim parti *ntae* totius voluminis V; debet quoque massa partis c aequari uni *ntae* parti massae totius corporis C (27. §.)

## 29. Corollarium 2.

Quare, sumta alia parte q corporis aequaliter densi C; cujus volumen sit *rtuplum* voluminis partis p; erit etiam massa partis q *rtupla* massae partis p (28. §.): quaevis idcirco pars q corporis aequaliter densi C, cujus volumen fuerit *rtuplum* unius *ntae* partis voluminis V totius corporis C, habebit quoque massam *rtuplam* unius *ntae* partis massae totius corporis C (28. §.).

## 30. Corollarium 3.

Si duo corpora aequaliter densa sub eodem volumine inaequales massas complectantur, ita ut massa unius corporis aut totam massam alterius

*ries*

*ries* sumtam, aut unam *ntam* partem hujus massae *ries* acceptam exaequet; debet etiam densitas prioris corporis aut totam densitatem, aut unam *ntam* partem densitatis posterioris corporis *ries* sumtam exaequare (27. 26. §).

## 31. Corollarium 4.

Quodsi autem duo corpora L, l aequaliter densa sub inaequalibus voluminibus K, k eandem massae quantitatem complectantur; erit massa corporis l, cujus volumen k minus est, densior quam massa corporis L, cujus volumen K est majus. In hac videlicet hypothesis continebit pars corporis L, cujus volumen exaequat volumen k corporis l, minus massae, quam corpus l sub volumine k complectitur (27. §); consequenter erit densitas massae in illa parte corporis L minor densitate massae corporis l (26. §.), eoque ipso erit quoque densitas massae totius corporis L minor densitate massae corporis l (27. §.).

## 32. Corollarium 5.

Ponamus, corpora L, l aequaliter densa sub inaequalibus voluminibus K, k eandem massae quantitatem  $\mu$  complecti, esseque  $k = K \frac{l}{n}$ , vel  $k = K \frac{r}{n}$ , nimirum volumen minus corporis l aequale aut uni *ntae* parti majoris voluminis K corporis L, aut *rtuplo* unius *ntae* partis voluminis K; debet reciprocè densitas corporis L aequari aut uni *ntae* parti densitatis corporis l, aut *rtuplo* unius *ntae* partis hujus densitatis. Nam pars x corporis L, cujus volumen sit  $= K \frac{l}{n}$  vel  $= K \frac{r}{n}$ , habebit massam pariter  $= \mu \frac{l}{n}$  vel  $= \mu \frac{r}{n}$  (28. 29. §.): igitur erit densitas partis x corporis L, eadem cum densitate totius corporis L (27. §.), vel  $= \frac{l}{n}$  vel  $= \frac{r}{n}$  densitatis corporis l (30. §.).

## 33. Corollarium 6.

Corpora homogenea et aequaliter densa, omnesque illorum partes, utcunque magnae vel parvae, eandem habent massarum densitatem (27. §.).

## 34. Theorema.

*Densitates* D, d duorum corporum aequaliter densorum, *massas* inaequales M, m sub eodem volumine continentium, sunt in ratione directa *massarum*, seu est  $D:d = M:m$ .

## Demonstratio.

Massae  $M, m$  vel sunt commensurabiles, vel incommensurabiles (3. §.). Primo casu necessario extabit numerus integer  $r$  vel fractus  $\frac{r}{n}$ , pro quo fit  $M = mr$  vel  $M = m \frac{r}{n}$  (6. §.): igitur erit etiam  $D = dr$ , vel  $D = d \frac{r}{n}$  (30. §.), hinc utroque casu  $D : d = M : m$ .

Sint jam massae  $M, m$  incommensurabiles; necesse est, ut pro quolibet utcumque magno numero integro  $n$  extet alter numerus integer  $r$ , pro quo fiat  $M > m \frac{r}{n}$  et  $M < m \frac{r+1}{n}$  (12. §.). Quare, cum pro  $M = m \frac{r}{n}$  vel  $M = m \frac{r+1}{n}$  necessario fieret  $D = d \frac{r}{n}$  vel  $D = d \frac{r+1}{n}$  (30. §.), debet esse pro iisdem numeris  $D > d \frac{r}{n}$  et  $D < d \frac{r+1}{n}$  (26. §.), hinc  $D : d = M : m$  (22. §.).

## 35. Theorema.

*Densitates  $D, d$  duorum corporum aequabiliter densorum, eandem massae quantitatem sub diversis voluminibus  $V, v$  continentium, sunt in ratione inversa voluminum, seu est  $D : d = v : V$ .*

## Demonstratio.

Volumina  $V, v$  commensurabilia possunt esse, vel incommensurabilia (3. §.). Casu primo dabitur certus numerus integer  $n$  vel fractus  $\frac{n}{r}$ , pro quo fit  $V = vn$  vel  $V = v \frac{n}{r}$  (6. §.), quo fiat  $v = V \frac{1}{n}$  vel  $v = V \frac{r}{n}$ : consequenter erit reciproce  $D = d \frac{1}{n}$  vel  $D = d \frac{r}{n}$  (32. §.), et ideo utroque casu  $D : d = v : V$ .

Quodsi vero volumina  $V, v$  sint incommensurabilia debet, pro quolibet, utcumque magno, numero integro  $n$  extare alter numerus integer  $r$ , quo fiat  $V > v \frac{r}{n}$  et  $V < v \frac{r+1}{n}$  (12. §.): cum igitur pro  $V = v \frac{r}{n}$  vel  $V = v \frac{r+1}{n}$  deberet esse reciproce  $d = D \frac{r}{n}$  vel  $d = D \frac{r+1}{n}$  (32. §.), erit re ipsa  $d > D \frac{r}{n}$  et  $d < D \frac{r+1}{n}$  (31. §.), hinc  $d : D = V : v$  per (22. §.).

## 36. Corollarium 1.

Densitates  $D, d$  duorum corporum aequabiliter densorum, inaequales massas  $M, m$  sub inaequalibus voluminibus  $V, v$  continentium, sunt inter se in ratione composita ex directa ratione massarum, et inverla voluminum, seu est  $D:d = Mv:mV$ . Si enim cogitetur tertium corpus aequabiliter densum, cujus densitas sit  $\delta$ , massa  $M$ , et volumen  $v$ ; erit

$$D:\delta = v:V \text{ per (35. §.)};$$

$$\delta:d = M:m \text{ per (34. §.):}$$

igitur multiplicando

$$D\delta:\delta d = vM:Vm, \text{ seu } D:d = vM:Vm.$$

## 37. Corollarium 2.

Pro corporibus homogeneis aequabiliterque densis erit per (33. §.) in (36. §.)  $D=d$ , hinc  $vM=Vm$ , et  $M:m=V:v$ , nimirum: massae duorum corporum homogeneorum et aequabiliter densorum sunt inter se in ratione directa voluminum.

## 38. DEFINITIO.

Corpus, quod aut constanter in eodem loco manet, aut locum continuo mutat, dicitur *quiescere* casu primo, et *moveri* casu altero: quidquid autem aut actu aliquem motum producit, aut eum producere nititur, ita ut is sublatis impedimentis necessario debeat sequi, ei *Vim motricem* velut motus causam tribuimus.

## 39. DEFINITIO.

Omne corpus, teste experientia, ita est comparatum, ut illud perpetuo deorsum urgeatur, actuque labatur, nisi quid lapsum impediat: vis, quae omnia corpora circa terrae superficiem deorsum urget, vocatur *Gravitas* seu *Vis gravitatis*.

## 40. Corollarium 1.

Omne corpus, quantumlibet parvum id sit vel magnum, est grave (39. §.).

## 41. Corollarium 2.

Utrum minimae omnium corporum physicorum particulae aequae graves sint (40. §.), singulae nimirum pari efficacia a vi gravitatis deorsum urgeantur (39. §.), nondum hic potest definiri: assumemus id interea instar hypo-

hypotheseos, quae, prouti deinceps videbimus, cum experimentis summa diligentia institutis, calculisque legitime superstructis quam optime consentit.

#### Scholion.

Haec tamen de quavis terrae regione seorsim sumpta debent intelligi. Sicut enim ex variis observationibus experimentisque in certa regione, quaecunque ea sit, institutis clare videtur sequi, eandem esse efficaciam vis gravitatis in minimas omnium corporum ejus regionis particulas; sic ex aliis observationibus et experimentis aequae clare sequitur, efficaciam vis gravitatis in minimas corporum particulas diversam esse in diversis terrae regionibus.

#### 42. DEFINITIO.

Perpetua experientia docet, minima omnium corporum libere (nimirum ob solam vim gravitatis, quin aliud aliquid in motum ab ejus actione pendente quaqua ratione influat) labentium percurrere rectas inter se ad sensum parallelas, atque ad superficiem aquae stagnantis perpendiculares; ob hanc causam vocari solent ejusmodi rectae jam *Lineae verticales*, jam *gravitatis Directiones*.

#### 43. Corollarium.

Filum tenue, e cujus uno extremo globulus plumbeus, aut aliud aliquid grave corpusculum libere pendeat, exhibebit, quiescente hoc corpusculo, directionem gravitatis (42. §.).

#### 44. DEFINITIO.

*Planum verticale* est, quod talem habet situm, ut impossibile sit, ex aliquo ejus puncto lineam verticalem demittere (42. §.), quin illa tota in eodem plano, producto si opus est, jaceat. *Horizontalem autem lineam* vocant, ad quam linea verticalis (42. §.) est perpendicularis: et *planum horizontale* dicitur, ad quod linea verticalis est perpendicularis, ita ut illa cum plano, ex omni parte, angulos rectos comprehendat.

#### 45. DEFINITIO.

*Pondus absolutum* cujuslibet corporis, seu simpliciter *Pondus* est tota pressio, quam vis gravitatis in illo producit (39. §.).

#### Scholion.

Pondus corporis distingui debet a vi gravitatis in corpus agente, velut effectus a sua causa. Si e. gr. globum plumbeum G manu sustineas, manum certa

certa efficacia deorsum premi experieris: nimirum globus  $G$  a vi gravitatis deorsum premitur, et istam pressionem, quam vis gravitatis ut causa effectum (38. 39. §.) in globo  $G$  producit, is necessario perentiscit, qui globum  $G$  manu sustinet; eandem vero pressionem nomine *ponderis* globi  $G$  solemus intelligere.

## 46. Corollarium 1.

Cum quaelibet particula dati corporis  $C$  a vi gravitatis deorsum urgeatur (39. 40. §.); debet pondus corporis  $C$  aequari summae pressionum, quas singulae particulae materiales ejusdem corporis ob vim gravitatis perentiscunt (45. §.).

## 47. Corollarium 2.

Quare, cum minimae particulae omnium corporum pari efficacia a vi gravitatis premantur (41. §.), sic pendebunt pondera  $P, p$  duorum corporum ab illorum massis  $M, m$ , ut pondus  $P$  debitum massae  $M$  futurum sit aequale ponderi  $p$ , vel majus aut minus pondere  $p$  debito massae  $m$ , prout fuerit massa  $M$  aequalis massae  $m$ , vel major aut minor massa  $m$  (46. §.).

## 48. Corollarium 3.

In specie vero, si massa alicujus corporis  $A$  fuerit *rtupla* massae alterius corporis  $B$ , vel *rtupla* unius *ntae* partis massae corporis  $B$ ; debet etiam pondus corporis  $A$  esse *rtuplum* ponderis corporis  $B$  casu primo, vel *rtuplum* unius *ntae* partis ponderis corporis  $B$  casu secundo (46. 47. §.).

## 49. Theorema.

*Pondera*  $P, p$  quorumvis duorum corporum *massas*  $M, m$  habentium sunt his *massis proportionalia* seu est  $P:p=M:m$ .

## Demonstratio.

Massae  $M, m$  commensurabiles sunt, aut incommensurabiles (3. §.). Pro massis  $M, m$  commensurabilibus debet dari numerus integer  $r$  vel fractus  $\frac{r}{n}$ , pro quo fit  $M=mr$  vel  $M=m\frac{r}{n}$  (6. §.): igitur etiam  $P=pr$  vel  $P=p\frac{r}{n}$  (48. §.), adeoque utroque casu  $P:p=M:m$ .

Si vero massae  $M, m$  sint incommensurabiles, debet pro quolibet utcumque magno numero integro  $n$  extare alter numerus integer  $r$ , qui

det  $M > m \frac{r}{n}$  et  $M < m \frac{r+1}{n}$  (12. §.): quare, cum pro  $M = m \frac{r}{n}$  vel  $M = m \frac{r+1}{n}$  deberet fieri  $P = p \frac{r}{n}$  vel  $P = p \frac{r+1}{n}$  (48. §.); erit re ipsa  $P > p \frac{r}{n}$  et  $P < p \frac{r+1}{n}$  (47. §.), et ideo  $P : p = M : m$  (22. §.).

## 50. Corollarium 1.

Si duo corpora aequabiliter densa habeant volumina  $V, v$ , massas  $M, m$ , pondera  $P, p$ , et densitates  $D, d$ ; erit  $D : d = M v : m V$  (36. §.), et  $M : m = P : p$  (49. §.): igitur  $D : d = P v : p V$ , nimirum: *densitates duorum corporum aequabiliter densorum sunt in ratione composita ex ratione directa ponderum et inversa voluminum.*

## 51. Corollarium 2.

Semper autem, dum duo corpora fuerint homogenea et aequabiliter densa (27. §.), erunt illorum pondera inter se in ratione directa voluminum, nimirum:  $P : p = M : m$  (49. §.) et  $V : v = M : m$  (37. §.), hinc  $P : p = V : v$ .

## 52. Corollarium 3.

Quodlibet corpus determinati ponderis  $p$  habet massam  $m$  perfecte determinatam, ita ut nullum aliud corpus ejusdem ponderis  $p$  plus vel minus, quam  $m$ , massae possit habere (47. §.): quamobrem, sumto certo pondere  $p$  pro mensura omnium ponderum, sumtaque massa  $m$  ei debita pro mensura omnium massarum (14. §.), facile omnes corporum massae per eorum pondera, et haec per illas aestimabuntur. Cum enim sit  $\frac{P}{p} = \frac{M}{m}$  (49. §.); patet, exponentem rationis geometricae cujuslibet ponderis  $P$  ad assumptam illius mensuram  $p$  aequalem futurum exponenti rationis massae  $M$  debitaе illi ponderi ad ejusdem massae mensuram  $m$ : quodsi ergo per  $M$  intelligatur, non massa corporis pondus  $P$  habentis, sed exponens rationis hujus massae ad assumptam mensuram  $m$ , licebit ponere pondus  $P = M$ , exponente  $M$  relato ad unitatem  $= p$ ; et si per  $P$ , non pondus corporis habentis massam  $m$ , sed exponens rationis hujus ponderis ad assumptam mensuram  $p$  intelligatur, poterit poni ipsa massa  $M = P$ , exponente  $P$  relato ad unitatem  $= p$  (15. 18. §.).

## Scholion.

Hoc sensu in sequentibus massae corporum determinabuntur per ipsorum pondera, et pondera per massas, ea nimirum ratione, qua in disquisitionibus geometricis arcus per angulos, et hi per illos solent determinari. Si e. gr. pondus  $p$  unius librae pro mensura omnium ponderum, et massa  $m$  corporis, cujus pondus uni librae aequatur, pro mensura omnium massarum sumatur, tum detur alicujus corporis  $C$  massa  $M = 8$  id est  $8pla$  massae  $m$ ; dicetur illius pondus esse  $P = 8$ , nimirum  $8plum$  ponderis  $p$  unius librae, adeoque  $8$  librarum: dato vero pondere  $P = \frac{3}{8}$  id est aequale  $3$   $8vis$  unius librae; erit ejus massa  $M = \frac{3}{8}$ , nimirum aequalis  $3$   $8vis$  massae  $m$ . Ceterum notent sibi tyrones, saepenumero ipsa corpora gravia nomine ponderum intelligi; sic e. gr. ubi in sequentibus de ponderibus quibusdam  $A, B, C$  e datis punctis pendentibus sermo fuerit, re ipsa nomine ponderum debebunt intelligi corpora, quorum pondera sint  $A, B, C$ .

## 53. DEFINITIO.

Quaevis massa aequabiliter densa sic est conformata, ut ea sub quibuslibet voluminibus aequalibus det pondera aequalia (27. 47. §.), quo sit, ut si pondus talis massae sub certo volumine noscatur, eo ipso etiam illius pondus sub dato quovis alio volumine possit determinari (51. §.). Ob hanc causam quaevis massa aequabiliter densa sub determinato quopiam volumine  $v$ , e. gr. volumine unius digiti, vel pedis cubici, solet considerari: pondus vero massae sub tali volumine vocatur ejus *Gravitas respectiva*, aut *specificae*, seu *Pondus respectivum*, nimirum restrictum ad determinatum volumen  $v$ . Massa aequabiliter densa certae speciei (e. gr. aurum) determinatum habet pondus sub determinato volumine  $v$ , distinctum ab illo pondere, quod alterius speciei massa (e. gr. argentum) sub eodem habet volumine, unde ratio denominationis gravitatis *specificae* elucet.

## 54. Corollarium 1.

Si  $P$  sit pondus massae aequabiliter densae sub volumine  $V$ , et  $G$  illius gravitas specifica restricta ad volumen  $v$ ; erit  $P : G = V : v$  (53. 51. §.)

## 55. Corollarium 2.

Ex (54. §.) sequitur  $P = G \frac{V}{v}$ , hinc  $P = GV$  pro  $v = 1$ , quo fiat, ut  $V$  exprimat exponentem rationis voluminis, sub quo pondus  $P$  continetur,

ad volumē  $v$ . Si ergo cognita gravitate specifica  $G$  massae alicujus corporis  $C$  petatur pondus  $P$  hujus corporis; fumatur volumen  $v$ , ad quod gravitas specifica sit restricta (53. §.) pro mensura voluminis  $V$  ejusdem corporis, tum, determinato exponente rationis ejusdem voluminis  $V$  ad mensuram  $v$  (14. 15. 18. §.), ducatur in illam gravitas specifica  $G$ .

E. gr. Petatur pondus  $P$  cylindri ferrei, cujus radius baseos sit  $r=6$  digitis, et altitudo  $a=2$  pedibus, data gravitate specifica ferri  $G=558$  ℔, quae pondus unius pedis cubici ferri exprimat. Si  $V$  denotet volumen cylindri, pro cujus mensura fumatur pes cubicus; erit, denotante  $\pi$  semiperipheriam circuli radio  $=1$  descripti,

$$V = a \pi r^2 = 2.3.141.\frac{1}{4} = 1,57 \text{ ped. cub.}$$

$$P = G V = 558.1,57 = 876,06 \text{ ℔.}$$

### 56. Corollarium 3.

Volumen autem erit  $V = v \frac{P}{G}$  (54. §.), seu  $V = \frac{P}{G}$  pro  $v = 1$ . Dato itaque pondere  $P$ , dataque gravitate specifica  $G$  massae alicujus corporis  $C$ , inveniatur volumen  $V$  ejusdem corporis, si pondus  $P$  dividatur per gravitatem specificam  $G$ , tum per quotum relatum ad unitatem  $=v$  exprimatur volumen  $V$  (15. 18. §.).

E. gr. Si  $P = 876,06$  ℔ sit pondus cylindri ferrei, et  $G = 558$  ℔ gravitas specifica ferri, aequalis ponderi ferri in uno pede cubico  $=v$ ; erit volumen ejusdem cylindri

$$V = \frac{876,06 \text{ ℔}}{558 \text{ ℔}} = 1,57 \text{ ped. cub.}$$

### 57. Corollarium 4.

Et ipsa gravitas specifica erit  $G = P \cdot \frac{v}{V}$  (54 §.), seu  $G = P \cdot \frac{V}{v} = \frac{P}{V}$  pro  $v = 1$ . Quare, dato pondere certi corporis inveniatur gravitas specifica  $G$  illius massae, si volumen  $v$ , ad quod gravitas specifica  $G$  debet restringi (53. §.), fumatur pro mensura voluminis  $V$ , tum invento exponente rationis hujus voluminis ad mensuram  $v$  (14. 15. 18. §.), dividatur per illum pondus  $P$ .

E. gr. Si, dato pondere  $P = 876,06$  ℔ cylindri ferrei, quaeratur gravitas specifica  $G$  ferri, quae exprimat pondus ferri in uno pede cubico  $=v$ ; quae-

quaeratur volumen  $V=1,57$  ped. cub. ejusdem cylindri, tum per  $1,57$  dividatur  $P$ : erit enim

$$G = \frac{876,06 \text{ lb}}{1,57} = 558 \text{ lb.}$$

### 58. Corollarium 5.

Si gravitates specificae  $G, g$  duarum massarum aequabiliter densarum ad idem volumen  $v$  restringantur, adeoque denotent pondera talium massarum sub eodem determinato volumine  $v$  contentarum (53. §.), densitates vero earundem massarum sint  $D, d$ ; erit  $D, d=G:g$  (50. §.).

### 59. Corollarium 6.

Hac ratione, assumpta densitate  $d$  certae massae aequabiliter densae pro unitate seu mensura densitatum omnium massarum aequabiliter densarum, cognitaque gravitate specifica  $g$  illius massae, facile innotescit densitas  $D$  cujuslibet alterius massae, data ejus gravitate specifica  $G$  ad idem volumen restricta, ad quod gravitas specifica  $g$  relata sit: erit nimirum  $D=d \frac{G}{g}$  (58. §.), hinc  $D=\frac{G}{g}$  pro  $d=1$ , aut etiam  $D=G$  pro  $g=1$ , id est, exponens rationis gravitatis specificae  $G$  massae  $M$  ad gravitatem specificam  $g$  massae  $m$ , relatus ad unitatem aequalem densitati  $d$  hujus massae exprimet densitatem  $D$  massae  $M$  (15. 18. §.).

E. gr. Si densitas  $d$  aquae sumatur pro mensura densitatum reliquarum massarum, sciaturque exponens  $=14$  gravitatis specificae mercurii ad gravitatem specificam aquae; erit densitas mercurii  $D=14$ , hoc numero ad unitatem  $=d$  relato, quo fiat, ut  $D=14$  tantundem denotet, ac  $D=d 14$ , adeoque significet, densitatem mercurii esse *14plam* densitatis aquae.

### Scholion.

Veri simillimum quidem est, nullas in natura massas extare, quae sint aequabiliter densae, unde sequi videtur, ea, quae haecenus de talibus massis sunt demonstrata, ad corpora, qualia in natura re ipsa occurrunt, non posse applicari. Verum constat quoque, dari massas, quae ad aequabiliter densas proxime accedunt, ita ut ad sensum pro talibus possint haberi. Si e. gr. pondera duorum aut plurium plumbeorum globorum ejusdem diametri ope exquisitissimae bilancis seorsim explores; nullum inter illa discrimen notabile deprehendes: unde necessario sequitur, quemvis

globum plumbeum ejusdem diametri eandem ad sensum quantitatem massae continere (47. §.), consequenter massam plumbi pro aequabiliter densa posse haberi. Ad tales ergo massas praecedentia principia semper licebit applicare, eo videlicet rigore, quem in omni praxi, ubi minutiae facile negliguntur, solemus observare.

## 60. DEFINITIO.

Divisio corporum in *solida, fluida, dura*, etc. repetenda est a diverso gradu cohaesionis inter particulas materiales ea corpora constituentes: quidquid illa sint, non est, cur hic illorum definitiones quaeramus; dabimus eas, ubi de talibus corporibus in specie actum fuerit. Supponemus enim in sequentibus, omne corpus esse *rigidum* seu *perfecte durum*, nimirum tale, cujus omnes partes, etiam minimae, tanta vi inter se cohaereant, ut respectivi illarum situs a nullis assignabilibus viribus possint turbari.

## 61. DEFINITIO.

Omnis vis motrix debet massam, in quam illa agit, ad motum sollicitare (38. §.): dum hanc ab illa *trahi, urgeri, premi*, etc. dicimus, eandem vis motricis actionem, nimirum sollicitationem ad motum, sed sub diverso respectu consideratam indicamus. *Aequales* dicentur vires, si quaevis illarum datam massam eadem efficacia ad motum sollicitet: quodsi autem aliqua vis majori, alia minori efficacia id praestet; erit illa *major*, et haec *minor*, simulque sumtae vires *inaequales* erunt.

## 62. Corollarium.

Fig. 1.

Quaecunque vis  $V$  agat in punctum  $c$  datae massae  $mn$  (1. Fig.) directione  $cV$ , semper licebit cogitare pondus unum  $P$ , quod, si e puncto  $c$  libere penderet, punctum  $c$  deorsum directione verticali  $cP$  tanta efficacia ad motum urgeret, quanta illud a vi  $V$  ad motum directione  $cV$  concipiendum urgetur, id est; quaevis vis  $V$  potest aequari certo ponderi  $P$  (61. §.), atque hoc sensu vires per pondera solent aestimari.

## Scholion.

Fieri potest, ut, durante motu alicujus massae, vis  $V$  massam continuo movens continuo mutetur, crescat nimirum vel decrescat: hoc casu debet vis  $V$  quovis momento alteri ponderi aequari, majori vel minori, prout illa eodem momento major evaserit vel minor. Verum in sequentibus

tibus nifus duntaxat viriam ad motus producendos in considerationem vocabimus, nullam mutationis rationem habituri, quam fors nifus illi subire deberent, si motus re ipsa fequeretur.

## 63. DEFINITIO.

Si duae aut plures vires datam massam ad motum sollicitent, sese tamen ita impediunt, ut ideo solum nullus in eadem massa motus sequatur, licet haec a qualibet vi ad motum possit concitari; dicentur eae vires esse inter se in *Aequilibrio*.

## 64. Corollarium 1.

Quotcunque vires A, B, C, --- a, b, c, ---  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. agant in datam massam, debebunt omnes inter se esse in aequilibrio, si vires A, B, C, etc. inter se, vires quoque a, b, c, etc. pariter inter se, et  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. etiam inter se seorsim fuerint in aequilibrio (63. §.).

## 65. Corollarium 2.

Et si omnes vires P, Q, R, --- Z, m, n, --- x in certam massam agentes sint inter se, et aliquae illarum P, Q, R, --- Z inter se seorsim sint in aequilibrio; debebunt etiam reliquae vires m, n, --- x inter se seorsim esse in aequilibrio (63. §.).

## 66. Corollarium 3.

Vires aequales V, U (1. Fig.) in idem datae massae mn punctum c Fig. 1. secundum directiones cV, cU oppositas, in una recta VU sitas, agentes erunt necessario inter se in aequilibrio (61. 63. §.).

## 67. Corollarium 4.

Si autem vires  $V > U$  in punctum c massae mn secundum oppositas directiones cV, cU agentes sint inaequales, non poterunt eae esse in aequilibrio, sed punctum c concipiet necessario motum aliquem secundum directionem cV vis majoris V (61. 63. §.).

## 68. Corollarium 5.

Vicissim ergo, si duae vires V, U agentes in punctum c massae mn secundum directiones oppositas cV, cU sint inter se in aequilibrio; debebunt eae inter se esse aequales (67. §.).

## 69. Corollarium 6.

Si autem duae vires V, U agentes in punctum c directionibus oppositis cV, cU non sint inter se in aequilibrio, sed re ipsa motum aliquem

in

in puncto c directione cU producant; erunt vires V, U inaequales; visque U erit major vi V: nam nec  $V=U$  potest esse (66. §.), nec  $V > U$  (67. §.).

## 70. Corollarium 7.

Quae in (66. 67. 68. 69. §.) de duabus viribus V, U in idem punctum c datae massae mn agentibus dicta sunt, ad vires etiam A, B in duo diversa massae mn puncta b, a agentes debent extendi, modo mn sit massa corporis rigidi (60. §.), et directiones virium bA, aB oppositae cum punctis b, a in una recta AB jaceant: eadem enim est in hac hypothese actio utriusque vis in quodvis punctum b, a, ac si vis utraque in punctum a, vel utraque in b immediate ageret.

## 71. Corollarium 8.

Fig. 2. 3. Si, sumpta quacunq[ue] linea mn (2. 3. Fig.) perfecte inflexili seu rigida (60. §.) et libere quaquaversus mobili, cogitentur in ejus puncta a, b, c, d, e, agere vires, A, B, C, D, E directionibus aA, bB, cC, dD, eE inter se parallelis, ita ut aut omnes ad eandem lineae mn partem jaceant (2. Fig.), aut aliquae aA, bB, cC, ad unam, aliae vero dD, eE ad partem ejus oppositam cadant (3. Fig.), sic tamen ut hae ipsae directiones dD, eE ad partem certi puncti  $\gamma$  in linea mn ei oppositam jaceant, ad quam priores aA, bB, cC jacent; impossibile erit aequilibrium inter vires A, B, C, D, E (63. §.).

## 72. Corollarium 9.

Fig. 11. Sit linea AB (11. Fig.) fulcro immobili b in C ita innixa, ut circa illud libere possit converti. Si ejus punctum B a vi quacunq[ue] Q directione BQ ad motum sollicitetur; debet necessario linea AB circa C moveri, punctumque ejus A progredietur in arcu  $A\alpha$  radii AC: verum si in A adsit fulcrum immobile a, nascetur ob actionem vis Q certa pressio in puncto A versus fulcrum a determinata quapiam directione Ay, atque hanc ipsam pressionem debet fulcrum a sustinere, ne ob illam punctum A motum aliquem in arcu  $A\alpha$  concipiat: quare, cum pro omni pressione vis aliqua possit cogitari, quae in punctum, quod premitur, immediate agens, in illo eandem pressionem producat; possibilis erit quoque certa vis P, quae, si in punctum A directione opposita AP agat, illud hac directione eadem efficacia ad motum sollicitet, qua id directione Ay a vi Q sollicitatur, quae idcirco, sublato fulcro a, cum vi Q sit in aequilibrio (63. §.).

## 73. Corollarium 10.

Quodsi vero supponas, rectam  $AB$  circa fixum punctum  $C$  libere posse moveri, vires tamen  $P, Q$  directionibus  $AP, BQ$  in ejus puncta  $A, B$  agentes inter se esse in aequilibrio (72. §.); necesse est, ut punctum  $C$  ejus lineae versus fulcrum immobile  $b$  determinatam quampiam pressionem certa directione  $Cv$  perferat, ob quam, nisi illam sustineret fulcrum  $b$ , punctum  $C$  directione  $Cv$  motum conciperet: ea propter, quia pro quolibet pressione, quam datum punctum perferat, vis aliqua est cogitabilis, quae immediate in illud punctum agens, parem pressionem data directione producat; possibilis est vis  $Z$ , quae, sublato fulcro  $b$ , punctum  $C$  directione opposita  $CZ$  tanta efficacia ad motum urgeat, quanta id a viribus  $P, Q$  directione  $Cv$  urgetur, quae proinde cum his viribus sit in aequilibrio (63. §.).

## 74. Corollarium 11.

Hinc (72. 73. §.) perspicuum fit, semper, si in unum punctum  $B$  datae lineae  $AB$  libere quaquaversus mobilis directione  $BQ$  agat quaecunque vis  $Q$ , possibiles esse duas vires  $P, Z$ , quae in bina quaevis alia puncta  $A, C$  ejusdem lineae certis directionibus  $AP, CZ$  agentes cum vi  $Q$  in perfecto aequilibrio sint. Quamobrem nihil, quod sit impossibile adeoque absurdum, quaeremus, investigaturi, quaenam relationes inter datam vim  $Q$ , viresque quaesitas  $P, Z$ , directiones virium  $BQ, CZ, AP$ , et distantias punctorum  $A, B$  ab intermedio puncto  $C$  debeant intercedere, ut vires omnes  $Q, P, Z$  inter se sint in perfecto aequilibrio.

---

DISSERTATIO II.  
DE  
LEGE AEQUILIBRII VIRIUM IN RECTAS INFLEXILES  
DIRECTE AGENTIUM.

---

75. Hypothesis.

*Directiones virium in datas quascunque rectas agentium sint perpendiculares ad easdem rectas.*

76. Theorema.

Fig. 4. 5. 6. *Si aut recta inflexilis AB (6 Fig.) in medio puncto C, aut angulus quiscunque invariabilis ACB (4. 5. Fig.) aequalium crurum AC, BC in vertice C ita figi cogitetur, ut tam illa recta, quam hic angulus libere circa punctum C converti, nullum tamen alium motum a viribus P, Q directionibus AP, BQ (75. §.) in puncta A, B agentibus possit recipere; erunt vires P, Q in aequilibrio, si eae fuerint inter se aequales.*

Demonstratio.

Cum enim puncta A, B ab aequalibus viribus P, Q pari efficacia secundum directiones AP, BQ debeant premi, cumque, per hypothesim, et puncta A, B aequaliter distent a puncto fixo C, et directiones virium AP, BQ sub aequalibus angulis ad rectas AC, BC sint inclinatae (75. §.); evidens est, tanta efficacia niti vim P rectam AC circa C convertere, quanta efficacia nititur vis Q rectam BC circa C movere: quare, cum ob inflexibilitatem rectarum AC, BC, AB, invariabilitatemque anguli ACB neutra rectarum AC, BC a vi in illam immediate agente circa C possit converti, quin tota recta AB (6. Fig.), totusque angulus ACB (4. 5. Fig.), in eandem partem circa C convertatur, cumque idcirco vires P, Q rectam AB (6. Fig.) et angulum ACB (4. 5. Fig.) in partes oppositas nitantur convertere; necesse est, ut sub assumtis conditionibus aut perfecte quiescat recta AB et angulus ACB, viresque P, Q sint in aequilibrio (63. §.), aut in partes oppositas eodem tempore moveatur, quod est absolute impossibile.

## 77. Corollarium 1.

Quod rectam AB (6. Fig.) in medio puncto C retinet, ne illa prae. Fig. 6.  
ter motum rotationis circa C alium aliquem motum possit concipere, debet  
sustinere pressionem, quam ambae vires P, Q in puncto C directione Cv  
(75. §.) producant; id ipsum ergo motum duntaxat puncti C, ad quem illud  
ea pressione secundum directionem Cv sollicitatur, impedit: quod si ergo  
soluta vinculo in C, quo recta AB quaquaversus libere mobilis redda-  
tur, in ejus puncto medio C directione opposita CV (75. §.) applicetur  
vis V aequalis summae virium aequalium P, Q, quae idcirco punctum C  
directione CV tanta efficacia premit, quanta illud a viribus P, Q directio-  
ne Cv premitur; erit vis V cum viribus P, Q in aequilibrio (76. 66. §.).

## 78. Corollarium 2.

In quocunque puncta a et h, b et g, c et f, d et e, aequidistantia a Fig. 7.  
puncto medio C datae rectae ah (7. Fig.) in omnem partem libere mobi-  
lis agant vires aequales v, v, v, etc. directionibus av, bv, cv, dv, ev, fv, gv, hv  
(75. §.); erit cum omnibus vis unica X in aequilibrio, modo ea agat in  
C directione opposita CX (75. §.), aequeturque summae omnium virium  
v, v, v, etc. (77. 64. §.).

## 79. Theorema.

Quidquid sint duae vires P, Q (8. Fig.) in duo puncta A, B datae rectae Fig. 8.  
AB quaquaversus libere mobilis directionibus AP, BQ agentes, et ubicun-  
que inter puncta A, B sumatur tertium punctum C, in quod directione oppo-  
sita CZ (75. §.) agat vis tertia Z; necesse est, ut in statu aequilibrum inter  
omnes tres vires P, Q, Z, (74. §.), vis media Z aequetur summae virium  
P, Q.

## Demonstratio.

Producta recta AB fiat  $CD = CB$ , et  $AC = EC$ , cogitenturque in  
D, E applicari vires  $s = Q$ ,  $u = P$ , in C vero supponatur adhuc una vis Z  
agere. Cum, per hypotheseum, vis Z in aequilibrio sit cum viribus P, Q;  
erit, ob pares prorsus causas, etiam vis altera Z in aequilibrio cum viri-  
bus s, u: quare, si praeterea in C directionibus Cx, Cy agerent vires  
aequales x, y, quarum quaevis sit  $= P + s + Q + u = 2P + 2Q$ , cum hae  
inter se essent in aequilibrio (66. §.), deberent necessario omnes vires P,  
Q, Z, Z, s, u, x, y inter se esse in aequilibrio (64. §.). Esset autem una pars  
 $= 2Q$  vis x cum viribus aequalibus s, Q, in D, et B et altera pars  $= 2P$  ejus-

dem vis  $x$  cum viribus aequalibus  $P, u$  in aequilibrio (77. §.): sublatis ergo viribus  $x, P, Q, s, u$ , maneret vis  $\equiv zZ$  agens in  $C$  directione  $CZ$  cum vi  $y \equiv 2P + 2Q$  agente in  $C$  directione opposita  $Cy$  in aequilibrio (65. §.), eoque ipso deberet fieri  $zZ \equiv 2P + 2Q$  (68. §.), hinc  $Z \equiv P + Q$ .

## 80. Theorema.

*Si distantia  $AC$  puncti  $A$  rectae inflexilis  $AB$  ab ejus puncto  $C$  major sit quam distantia  $BC$ , et tres vires  $P, Q, Z$  agentes in puncta  $A, B, C$  directionibus  $AP, BQ, CZ$  (75. §.) sint inter se in aequilibrio; erit vis  $P$  in distantia majori  $AC$  minor vi  $Q$  agente in distantia minori  $BC$ .*

## Demonstratio.

Patebit id, si ostendatur, nec  $P \equiv Q$  posse esse, neque  $P > Q$ . Eapropter accipiatur  $AD \equiv BD$ , et in puncto  $D$  directionibus oppositis  $Dr, Ds$  applicentur vires aequales  $r \equiv 2Q, s \equiv 2Q$ : quia hae inter se debent esse in aequilibrio (66. §.); erunt omnes vires  $P, Q, Z, r, s$  inter se in aequilibrio (64. §.) Iam vero, si esset  $P \equiv Q$ , adeoque vis  $r$  cum viribus  $P, Q$  in aequilibrio (77. §.); deberent, sublatis viribus  $P, Q, r$ , vires  $s, Z$  inter se esse in aequilibrio (65. §.), contra (71. §.): si autem esset  $P > Q$ , puta  $P \equiv Q + \omega$ , adeoque vis  $r$  cum viribus  $Q, Q$  in  $A$  et  $B$  in aequilibrio (77. §.); manerent, remotis viribus  $r$ , et  $Q, Q$  ex  $D, A, B$ , vires  $Z, s, \omega$  in  $C, D, A$  inter se in aequilibrio (65. §.), contra (71. §.)

## 81. Theorema.

*Si, recta  $aB$  inaequaliter secta in  $b, C$ , ita ut sit  $aC > bC > BC$ , tres vires  $k, q, Q$  ejusmodi esse dicantur, ut, si, vi  $Q$  agente in  $B$ , in  $b$  applicetur vis  $q$ , et in  $C$  vis  $Z = q + Q$ , vel in  $a$  vis  $k$ , et in  $C$  vis  $Z = k + Q$ , casu primo vis  $Z = q + Q$  cum viribus  $q, Q$ , et casu altero vis  $Z = k + Q$  cum viribus  $k, Q$  debeat esse in aequilibrio; erit vis  $k$  agens in majori distantia  $aC$  minor vi  $q$  agente in minori distantia  $bC$ .*

## Demonstratio.

Producta recta  $aB$  sumatur  $Ca \equiv CE$ , et in  $a, E$  applicentur vires aequales  $k, u$ , in  $C$  vero directione opposita  $Cx$  agat vis  $x \equiv k + u$ ; erunt vires  $k, u, x$  inter se in aequilibrio (77. §.): quodsi ergo vires  $q, Q$  et  $Z = q + Q$  sint inter se in aequilibrio; erunt omnes vires  $k, u, q, Q, x \equiv k + u, Z = q + Q$  inter se in aequilibrio (64. §.). Quapropter,

cum

cum, per hypothesim, vires  $k, Q$  cum  $vi = k + Q$  in  $C$  sint in aequilibrio, debebunt, sublati his viribus, reliquae  $q, u$  cum  $vi = q + u$  in  $C$  manere in aequilibrio (65. §.) quod non potest fieri, quin, ob  $CE = aC > bC$ , sit  $u < q$  (80. §.), seu  $k < q$ .

82. Theorema.

*Si, recta AB in C (9. Fig.) sic secta, ut pars major AC sit r-tupla Fig. 9. partis minoris BC, adeoque  $AC = BC \cdot r$  pro quocunque numero integro  $r$ , in puncta A, B, C directionibus AP, BQ, CS agant vires P, Q, S, quarum secunda Q sit r-tupla primae, nimirum  $Q = Pr$ , et tertia S aequalis summae reliquarum virium P, Q; erunt vires P, Q, S in aequilibrio.*

Demonstratio.

1. Producta AB in utramque partem fiat  $AE = BC = AD$ , et  $CF = CD$ , hinc  $BF = BE$ .

2. Cum pars AC sit r-tupla partis BC; potest AC in numero  $r$  partes aliquotas singulas  $= AE = BC$  dividi, eruntque in CD numero  $r + 1$ , totidemque in CF, in BE autem erunt numero  $r$ , totidemque in BF partes aliquotae, singulae  $= BC$ , ob (1).

3. Quodsi ergo in puncta media  $a, b, c, \dots, n, o, r$ , singularum partium aliquotarum totius rectae DF in (2) cogitentur agere vires aequales  $p = \frac{1}{2}P$  directionibus  $ap, bp, cp, \dots$ ; erit summa virium  $p$  in  $a$  et  $b$  agentium  $p + p = P$ , adeoque erunt eae vires cum vi  $P$  in aequilibrio (77. §.) Summa porro omnium virium  $p$  per EF diffusarum erit  $= \frac{1}{2}P$ . et ob (2), seu  $= Pr = Q$  per hypothesim: quare erunt etiam vires  $p$  per EF diffusae cum vi  $Q$  in aequilibrio (78. §.). Omnes ergo vires  $p$  per totam rectam DF diffusae erunt cum viribus  $P, Q$  in aequilibrio (64. §.).

4. Eapropter, si in C directionibus oppositis CS, CR applicentur vires aequales  $S = P + Q, R = P + Q$ , quia illae inter se debent esse in aequilibrio (66. §.); habebimus vires  $P, Q, R, S$ , et vires  $p$  per DF diffusae, omnes ob (3) per (64. §.) inter se in aequilibrio. Est autem summa omnium per DF diffusarum virium  $p$  ob (3)  $= Pr + P = Q + P = R$ ; adeoque, ob  $DC = CE$  per (1) est vis  $R$  cum omnibus per DF diffusis viribus  $p$  in aequilibrio (78. §.): sublati igitur omnibus viribus  $p$  una cum vi  $R$ , manebit vis  $S = P + Q$  sola cum viribus  $P, Q$  in aequilibrio (65. §.).

## 83. Corollarium.

Fig. 10. Recta ergo  $ae$  (10. Fig.) sic secta in  $C$ , ut pars major  $aC$  sit *rtupla* unius *ntae* partis minoris  $Ce$ , nimirum  $aC = Ce \cdot \frac{r}{n}$ ; erit vis  $x = u + v$  in aequilibrio cum viribus  $u, v$ , si fuerit reciproce vis  $v = u \cdot \frac{r}{n}$  *rtupla* unius *ntae* partis vis  $u$ . Si enim capiatur  $Cb = Cd = Ce \cdot \frac{r}{n}$  pars *nta* rectae  $Ce$ , et in  $b, d$  cogitentur applicari vires  $z, y$ , prior  $z = vn$ , et posterior  $y = ur$ , directione vero  $Cx$  concipiatur loco  $x$  agere vis  $V = u + z + y + v$ ; cum in assumpta hypothese debeat esse  $aC = Cd \cdot r$ , et  $eC = bC \cdot n$ , erunt vires  $u, y$  in  $C$  cum viribus  $u, y$  in  $a, d$ , et vires  $z, v$  in  $C$  cum viribus  $z, v$  in  $b, e$  seorsim in aequilibrio (82. §.): igitur erunt omnes vires, illae et hae, inter se in aequilibrio (64. §.). Quare, cum per hypothese sit  $v = u \cdot \frac{r}{n}$ ; hinc  $vn = ur$ , adeoque  $z = y$ , cumque idcirco vires  $z, y$  in  $C$  cum viribus  $z, y$  in  $b, d$  seorsim debeant esse in aequilibrio (77. §.); necesse est, ut sublatis his viribus maneat vis  $= v + u$  in  $C$  cum viribus  $v, u$  in  $e, a$  in aequilibrio (65. §.).

## 84. Theorema.

Fig. 8. Quotiescunque tres vires  $P, Q, x$  (8. Fig.) *directionibus*  $AP, BQ, Cx$  egerint in tria puncta  $A, B, C$  rectae  $AB$  *quaquaverfus* libere mobilis; erunt illae inter se in aequilibrio, si fuerit  $P:Q = BC:AC$ , et  $x = P + Q$  (79. §.).

## Demonstratio.

1. Partes  $AC, BC$  rectae  $AB$  erunt inter se commensurabiles vel incommensurabiles (5. §.). Primo casu extabit certus numerus integer  $r$  vel fractus  $\frac{r}{n}$ , pro quo sit  $AC = BC \cdot r$  vel  $AC = BC \cdot \frac{r}{n}$  (6. §.); hinc, ob  $P:Q = BC:AC$  per hypothese, etiam  $Q = Pr$  vel  $Q = P \cdot \frac{r}{n}$ , quod nequit subsistere, quin vires  $P, Q, x$  sint inter se in aequilibrio (82. 83. §.).

2. Sint vero  $BC, AC$  duae rectae incommensurabiles: debet pro quovis quantumlibet magno numero integro  $n$  extare alter numerus integer  $r$ , qui det  $AC > BC \cdot \frac{r}{n}$  et  $AC < BC \cdot \frac{r+1}{n}$  (12 §.); et pro iisdem numeris, cum per hypothese sit  $P:Q = BC:AC$ , erit  $Q > P \cdot \frac{r}{n}$  et  $Q < P \cdot \frac{r+1}{n}$ .

3. Hoc praemisso supponamus in puncto A requiri vim  $\omega$ , hinc in C vim  $x = \omega + Q$ , quo vires  $\omega$ ,  $x$  cum vi  $Q$  sint in aequilibrio (74. 79. §.); dico, debere esse  $\omega = P$ , hinc  $x = P + Q$ .

4. Si enim accipiatur  $bC = BC \cdot \frac{r}{n}$ , et  $aC = BC \cdot \frac{r+1}{n}$ ; jacebit ob (2) punctum A inter puncta a, b, et si in b applicetur vis  $q = Q \frac{n}{r}$ , in C autem vis  $Z = q + Q$ , vel in a vis  $k = Q \frac{n}{r+1}$ , et in C vis  $Z = k + Q$ ; erunt vires  $q$ ,  $Q$  cum vi  $Z = q + Q$  casu primo, et vires  $k$ ,  $Q$  cum vi  $Z = k + Q$  casu altero in aequilibrio (83. §.): igitur erit ob (3) vis  $\omega < q$  et  $\omega > k$  (81. §.); adeoque semper  $\omega < Q \frac{n}{r}$ , et  $\omega > Q \frac{n}{r+1}$ , hinc  $Q > \omega \frac{r}{n}$ , et  $Q < \omega \frac{r+1}{n}$ , quod ob (2) est impossibile, quin sit  $Q : P = Q : \omega$  (22. §.) proinde  $\omega = P$ .

## 85. Theorema.

Et vicissim, si vires  $P$ ,  $Q$  cum vi  $Z = P + Q$  in recta AB quaqua-versus libere mobili sint in aequilibrio; debebit esse  $P : Q = BC : AC$ .

## Demonstratio.

Si stante aequilibrio inter vires  $P$ ,  $Q$ ,  $Z$  non esset  $P : Q = BC : AC$ ; deberet in AB dari unum punctum a vel b, pro quo fieret  $BC : aC = P : Q$ , vel  $BC : bC = P : Q$ ; et si, remota vi  $P$  ex puncto A, applicaretur in a vis  $k = P$ , vel in b vis  $q = P$ , essent vires  $k$ ,  $Z$ ,  $Q$  casu primo, et  $q$ ,  $Z$ ,  $Q$  casu secundo inter se in aequilibrio (84. §.); contra (81. §.).

## 86. DEFINITIO.

Omnem rectam AB (11. Fig.) AC (12. Fig.) inflexilem gravitatisque Fig. 11. 12. expertem, in cujus bina puncta A, B supponuntur agere duae vires P, Q, si ea in uno puncto C ita sit fixa, ut circa illud a viribus P, Q libere moveri, nullum tamen alium motum possit concipere, vocant *vectem mathematicum rectilineum*, et punctum fixum C *centrum motus*. Ipse vero vectis est *heterodromus*, si centrum motus C (11. Fig.) jacet intra puncta A, B, in quae vires P, Q agunt: *homodromus* autem appellatur vectis, in quo puncta A, B a viribus P, Q ad motum sollicitata (12. Fig.) ad eandem partem centri motus C cadunt.

## 87. Corollarium 1.

Fig. 11. Si directiones AP, Bq (11. Fig.) duarum virium P, q in puncta A, B vectis heterodromi AB (86. §.) agentium cadant ad diversas partes ejusdem vectis, nitentur vires P, q vectem AC ad eandem partem circa centrum motus C convertere, consequenter non poterunt esse in aequilibrio (63. §.): quare, ut duae vires P, Q in duo puncta A, B vectis heterodromi agentes possint esse in aequilibrio, debent illarum directiones AP, BQ ad eandem partem ejusdem vectis jacere.

## 88. Corollarium 2.

Fig. 12. In vecte autem homodromo AC (12. Fig.), ut duae vires P, Q agentes in ejus puncta A, B (86. §.) possint esse in aequilibrio, debent directiones AP, BQ earundem virium ad diversas vectis partes cadere. Vires enim P, q<sup>u</sup> agentes in puncta A, B, quarum directiones AP, Bq<sup>u</sup> cadunt ad eandem partem vectis AC, nituntur hunc circa centrum motus C ad eandem partem convertere, et ideo nequeunt illae esse in aequilibrio (63. §.).

## 89. Corollarium 3.

Fig. 11. Duae vires P, Q agentes in puncta A, B vectis heterodromi AB (11. Fig.) secundum directiones AP, BQ (75. 87. §.) debebunt esse in aequilibrio, si fuerit  $P:Q=BC:AC$ ; pressio autem, quam vires P, Q in centro motus C directione Cv directionibus AP, BQ parallela producent, aequabitur pressioni, quam vis unica  $v=P+Q$  in C produceret, si illa directione Cv in C immediate ageret. Si enim recta AB non esset in C fixa, sed quaquaversus libere mobilis, et in C directione CZ ad AB perpendiculari ageret vis  $Z=P+Q$ ; esset Z cum viribus P, Q in aequilibrio (84. §.): cum igitur vis Z illum duntaxat motum impediat, quem punctum C rectae AB directione Cv potest concipere; aberit omnis motus, viresque P, Q servabunt rectam AB in aequilibrio, si remota vi Z recta AB in C ita figatur, ut circa C libere converti, sed nullum alium motum a viribus P, Q possit recipere.

## 90. Corollarium 4.

Et vicissim utprimum in vecte heterodromo AB duae vires P, Q directionibus AP, BQ in ejus puncta A, B agentes (75. 87. §.) fuerint inter se

se in aequilibrio; debet esse  $P:Q=BC:AC$ . Secus enim daretur in recta AB aliud aliquod punctum D vel d, pro quo esset  $P:Q=BD:AD$  vel  $P:Q=Bd:Ad$ , et si in D vel d directionibus Dr, Ds vel dr, ds (75. §.) applicarentur vires aequales r, s, ut sit  $r=s=P+Q$ ; essent tam haec inter se per (66. §.), quam P, Q inter se per hypothesim, adeoque omnes quatuor r, s, P, Q inter se in aequilibrio (64. §.): quare, remotis viribus r, P, Q inter se in aequilibrio existentibus (84. §.); deberet sola vis s agens in D vel d rectam circa C libere mobilem servare in aequilibrio (65. §.), quod est impossibile.

## 91. DEFINITIO.

Praeterea memorabilis est vectis *inflexus seu angularis*, quem duae rectae inflexiles AC, BC (13. Fig.) constituent, si illae sub certo angulo ACB jungantur, qui in vertice C ita fixus sit, ut circa hunc libere converti, nullum tamen alium motum possit recipere, nec ullam mutationem subire, quaecunque vires P, Q agant in ejus latera AC, BC. Omnis vero vectis, tam angularis (13. Fig.), quam rectilineus (11. 12. Fig.) duo *Brachia* habere censetur, quorum nomine ejus partes AC, BC inter centrum motus C punctaque A, B, in quae binae vires P, Q supponuntur agere, interceptae debent intelligi.

## 92. Theorema.

In omni vecte, tam rectilineo quam angulari (11. 12. 13. 14. Fig.) vires P, Q directionibus AP, BQ in puncta A, B agentes (75. §.) erunt in aequilibrio, si illae sint in ratione inversa brachiorum, seu si sit  $P:Q=BC:AC$  (91. §.). Et vicissim erunt eae in hac ratione, si fuerint in aequilibrio.

## Demonstratio.

Cum id pro quovis vecte heterodromo (11. Fig.) in (89. 90. §.) sit demonstratum, superest, ut idem adhuc pro vecte rectilineo homodromo (12. Fig.) et angulari (13. 14. Fig.) demonstretur.

1. Quamobrem cogitetur produci majus brachium AC ultra C, ut fiat  $Cb=CB$  (12. 13. 14. Fig.), et in b concipiantur agere vires

aequales  $q, q'$ , quarum quaevis aequetur vi  $Q$ , directionibus  $bq, bq'$  (75. §.); erunt, non modo vires  $q, q'$  inter se (66. §.), sed etiam vires  $Q, q'$  pariter inter se in aequilibrio (76. §.).

2. Quodsi ergo sit  $P:Q = BC:AC$ , cum eo ipso sit quoque  $P:q = bC:AC$  ob (1), adeoque vis  $P$  cum  $q$  in vecte heterodromo  $Ab$  in aequilibrio (89. §.); erunt ob (1) omnes quatuor vires  $P, q, Q, q'$  inter se in aequilibrio (64. §.): remotis itaque viribus  $q, q'$  manebunt vires  $P, Q$  inter se in aequilibrio ob (1) per (65. §.).

3. Et si vires  $P, Q$  sint inter se in aequilibrio; erunt ob (1) per (64. §.) omnes quatuor  $P, Q, q, q'$  inter se in aequilibrio: igitur remotis viribus  $Q, q'$  manebunt vires  $P, q$  ob (1) per (65. §.) in vecte heterodromo  $Ab$  inter se in aequilibrio; proinde debet esse  $P:q = bC:AC$  (90. §.), hinc ob (1)  $P:Q = BC:AC$ .

## DISSERTATIO III.

DE

## VIRIBUS IN RECTAS INFLEXILES OBLIQUE AGENTIBUS, EARUMQUE COMPOSITIONE, ET RESOLUTIONE.

## 93. Theorema.

*Si in punctum A rectae AC (15. 16. Fig.) circa fixum extremum C li. Fig. 15. 16. bere mobilis agant duae vires, una X directione AX ad AC perpendiculari, et altera Q directione AQ sub angulo acuto vel obtuso QAC ad AC inclinata, et CD sit perpendicularis ad directionem vis Q; erunt vires X, Q in aequilibrio, si fuerit  $X:Q=CD:AC$ : et vicissim, si vires X sint in aequilibrio, erit  $X:Q=CD:AC$ .*

## Demonstratio.

1. Si praeter vires Q, X, agentes in punctum A applicetur in A vis  $x=X$  directione Ax ad AC perpendiculari, et in D vis  $q=Q$  directione Dq cum AQ jacente in una recta AD, recta vero AC supponatur esse unum latus plani ADC ad D rectanguli et circa punctum fixum C mobilis; erunt vires X, x inter se, et q, Q pariter inter se (66. 70. §.), consequenter omnes quatuor vires X, x, q, Q inter se in aequilibrio (64. §.).

2. Sit jam  $X:Q=CD:AC$ , adeoque ob (1) etiam  $x:q=CD:AC$ , debebunt vires q, x esse inter se in aequilibrio, cum illae planum ADC haud alia efficacia circa C convertere nitantur, quam qua eae vectem angularem ACD niterentur circa C convertere (92. §.): quodsi ergo absint vires q, x, manebunt vires X, Q ob (1) inter se in aequilibrio (65. §.).

3. Si vero dicas, vires X, Q esse in aequilibrio; debebunt, iis remotis, vires x, q inter se manere in aequilibrio; ob (1) per (65. §.): sed si vires x, q agentes in puncta A, D plani ADC circa C mobilis sunt in

aequilibrio, erunt illae eo quoque casu in aequilibrio, si eidem plano vectis angularis  $ACD$  circa  $C$  mobilis substituatur; consequenter debet esse  $x:q = CD:AC$  (92. §), hinc ob (1)  $X:Q = CD:AC$ .

## 94. Corollarium 1.

Vis  $Q$  agens in punctum  $A$  rectae  $AC$  circa fixum extremum  $C$  libere mobilis secundum directionem  $AQ$  sub angulo  $CAQ$  ad  $AC$  inclinatam, tanta efficacia nititur rectam  $AC$  circa  $C$  convertere, quanta efficacia id praestare niteretur vis  $x = X = \frac{Q \cdot CD}{AC} = Q \sin CAQ$ , si haec in idem punctum  $A$  directione  $Ax$  ad  $AC$  perpendiculari ageret (93. §).

## 95. Corollarium 2.

Si in punctum  $A$  rectae  $AC$  circa fixum extremum  $C$  mobilis agant vires  $P, Q$  secundum directiones  $AP, AQ$ ; erunt hae vires in aequilibrio, si fuerit  $P \sin PAC = Q \sin QAC$ : et vicissim, si eae sint in aequilibrio, erit  $P \sin PAC = Q \sin QAC$ . Si enim in  $A$  directionibus  $AX, Ax$  ad  $AC$  perpendicularibus applicentur vires  $X = P \sin PAC, x = Q \sin QAC$ ; erunt vires  $X, x$  (66. §), proinde etiam  $P, Q$  inter se in aequilibrio (94. §), si fuerit  $X = x$ ; et vicissim, si vires  $X, x$ , adeoque etiam  $P, Q$  sint inter se in aequilibrio (94. §), erit  $X = x$  (68. §).

## 96. DEFINITIO.

Fig. 17. Si in datum punctum  $A$  (17. Fig.) agant duae vires  $P, Q$  secundum directiones  $AP, AQ$  sub quocunque angulo  $PAQ$  concurrentes, quem deinceps nomine *Anguli virium* intelligemus; debet punctum  $A$  media quapiam directione  $AC$  ab iisdem viribus ad motum inchoandum sollicitari, ac si illud ab una vi  $C$  ea ipsa directione premeretur: idcirco vocatur directio ejusmodi  $AC$  *Directio media* virium  $P, Q$ ; et vis  $C$ , quae sola agens in punctum  $A$  istud directione media  $AC$  tanta efficacia premeret, quanta id a viribus  $P, Q$  ea directione premuntur, appellatur *Vis media*, respectu cujus vires  $P, Q$  vocantur *laterales*.

## 97. Corollarium 1.

Inventio directionis mediae  $AC$  (96 §.) pendet ab inventione angulorum  $PAC, QAC$  inter illam et directiones datarum virium lateralium  $P, Q$  interceptorum.

## 98. Corollarium 2.

Debet autem directio media virium  $P, Q$  in punctum  $A$  agentium ejusmodi esse indolis, ut, si punctum  $A$  supponatur pertinere ad rectam inflexilem  $AC$  coincidentem cum directione media, rectaque  $AC$  cogitetur in  $C$  ita figi, ut ea circa  $C$  libere converti, nullum tamen alium motum possit recipere, vires  $P, Q$  eo ipso debeant esse inter se in aequilibrio (96. §.).

## 99. Corollarium 3.

Et vicissim, si vires  $P, Q$  agentes in punctum  $A$  rectae  $AC$  circa punctum fixum  $C$  libere mobilis sint inter se in aequilibrio; debet recta  $AC$  coincidere cum media directione virium  $P, Q$ . Secus premeretur punctum  $A$  a viribus  $P, Q$  alia quapiam directione  $A\gamma$ , ac si, absentibus viribus  $P, Q$ , vis media  $\gamma$  sola secundum directionem  $A\gamma$  in  $A$  ageret (96. §.); consequenter deberet recta  $AC$  converti circa  $C$ , contra hypothelium aequilibrii.

## 100. Corollarium 4.

Quoties ergo fuerit  $P \sin PAC = Q \sin QAC$ , toties erit  $AC$  directio media virium  $P, Q$  (99. 95. §.); et vicissim quoties fuerit  $AC$  directio media virium  $P, Q$ , toties debet esse  $P \sin PAC = Q \sin QAC$  (98. 95. §.).

## 101. Corollarium 5.

Quemcumque situm habeat directio media  $AC$  datarum virium  $P, Q$ , et quantacumque sit vis media  $C$  ex illis resultans, si haec innotesceret, directioneque opposita  $AM$  applicaretur vis  $M$  ei aequalis; deberet vis  $M$  in aequilibrio esse cum viribus  $P, Q$  (96. 66. §.). Et vicissim, inventa vi  $M$ , quae directione  $AM$  opposita directioni mediae  $AC$  virium  $P, Q$  agens in punctum  $A$  cum viribus  $P, Q$  sit in aequilibrio; erit eadem vis  $M$  aequalis vi mediae resultanti ex viribus lateralibus  $P, Q$  (68. 96. §.).

## 102. Corollarium 6.

Quoties demum tres vires  $M, P, Q$  directionibus  $AM, AP, AQ$  in datum punctum  $A$  agentes fuerint inter se in aequilibrio; debet directio media quarumvis binarum virium coincidere cum producta directione vis tertiae; e. gr. directio media virium  $P, Q$  coincidit cum producta di-

rectione AM vis tertiae M. Si enim AC sit productio directionis AM, et punctum A supponatur spectare ad rectam AC coincidentem cum illa productione, atque circa punctum fixum C libere mobilem; erunt nunc quoque omnes tres vires M, P, Q inter se in aequilibrio: quare, cum vis M directione CM agens in punctum C nullo pacto influat in conversionem rectae AC circa C, sublata vi M, manebunt vires P, Q inter se in aequilibrio, eoque ipso est AC directio media harum virium (99. §.).

## 103. Problema.

*Datis duabus viribus P, Q in unum punctum A secundum directiones AP, AQ agentibus, datoque earum angulo,  $PAQ = \phi$ , invenire directionem mediam AC.*

## Solutio.

Directio media virium P, Q determinabitur, si definiantur anguli  $PAC = p$ ,  $QAC = q$ , quos directio media AC cum directionibus AP, AQ illarum virium debet intercipere (97. §.): hi vero anguli possunt sequenti modo inveniri. Debet esse

$$p = \phi - q; \quad q = \phi - p;$$

et  $P \sin p = Q \sin q$  per (100. §.):

per (Vol. I. 5. §. 1. Schol.) erit ergo

$$P \sin p = Q \sin \phi \cos p - Q \cos \phi \sin p;$$

$$Q \sin q = P \sin \phi \cos q - P \cos \phi \sin q.$$

Quare, si prior aequatio per  $\cos p$ , et posterior per  $\cos q$  dividatur, fiet

$$P \operatorname{Tang} p = Q \sin \phi - Q \cos \phi \operatorname{Tang} p;$$

$$Q \operatorname{Tang} q = P \sin \phi - P \cos \phi \operatorname{Tang} q.$$

Habebimus itaque

$$\operatorname{Tang} p = \frac{Q \sin \phi}{P + Q \cos \phi}; \quad \operatorname{Tang} q = \frac{P \sin \phi}{Q + P \cos \phi}.$$

## 104. Problema.

*Inventa directione media AC duarum virium P, Q in punctum A secundum directiones AP, AQ agentium, invenire vim mediam M.*

Solu-

## Solutio.

Cum nota sit directio media AC, noti debent esse etiam anguli  $p = CAP$ ,  $q = CAQ$  (103. §.). Iam vero vis media aequabitur vi M, quae secundum mediam directionem CA, seu potius secundum illius productionem AM in punctum A agens cum viribus P, Q, effert in aequilibrio (101. §.): pro illa, si AP versus S, et AQ versus R producatur, erit ergo AS directio media virium M, Q, et AR directio media virium M, P (102. §.). Per (100. §.) habebimus itaque

$$M \sin MAS = Q \sin QAS; \quad M \sin MAR = P \sin PAR.$$

$$\text{Sed est } PAC = MAS = p; \quad QAC = MAR = q;$$

$$\text{et } QAS = PAR = 180^\circ - \varphi: \text{ ergo erit}$$

$$M \sin p = Q \sin \varphi; \quad M \sin q = P \sin \varphi;$$

$$M = \frac{Q \sin \varphi}{\sin p}; \quad M = \frac{P \sin \varphi}{\sin q}.$$

## 105. Corollarium 1.

Datis duabus viribus P, Q agentibus in datum punctum A, datoque virium angulo  $\varphi = PAQ$  (96. §.), licebit tam illarum directionem mediam AC per (103. §.), quam dependenter ab hac ipsam vim mediam M per (104. §.) determinare. Potest vero vis media M inveniri etiam independenter a directione media AC hoc modo.

$$\frac{Q \sin \varphi \operatorname{Cof} p}{\sin p} = P + Q \operatorname{Cof} \varphi \quad (103. \text{ §.}):$$

igitur elevando ad quadratum

$$\begin{aligned} \frac{Q^2 \sin^2 \varphi \operatorname{Cof}^2 p}{\sin^2 p} &= P^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi + Q^2 \operatorname{Cof}^2 \varphi \\ &= P^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi + Q^2 - Q^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Hinc porro, facta translatione et reductione, ob  $\sin^2 p + \operatorname{Cof}^2 p = 1$ , obtinebimus

$$\frac{Q^2 \sin^2 \varphi}{\sin^2 p} = P^2 + Q^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi.$$

Et ideo per (104. §.) fiet

$$M = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi}.$$

## 106. Corollarium 2.

Si vires P, Q agentes in punctum A sint aequales, nimirum  $P = Q$ ; erit vis media ex illis resultans  $M = \sqrt{2P^2 + 2P^2 \operatorname{Cof} \varphi} = P\sqrt{2(1 + \operatorname{Cof} \varphi)}$

per

per (105. §.): directio autem media AC (96. §) ita determinabitur, ut sit  $\text{Tang } p = \text{Tang } q$ , proinde angulus  $p = \text{PAC} = q = \text{QAC}$  (103. §.), id est, dum aequales vires P, Q sub quocunque directionum angulo PAQ datum punctum A ad motum sollicitant, directio media AC debet angulum PAQ bissecare.

## 107. Corollarium 3.

Eo determinato casu, quo angulus virium  $\phi = \text{PAQ}$  rectus fuerit, erit  $\text{Sin } \phi = 1$ , et  $\text{Cos } \phi = 0$ ; igitur erit vis media  $M = \sqrt{(P^2 + Q^2)}$  per (105. §.); et pro directione media AC debet fieri  $\text{Tang } p = \frac{Q}{P}$ ,  $\text{Tang } q = \frac{P}{Q}$  (103. §.). Quodsi porro in eadem hypothese vires P, Q sint aequales; fiet vis media  $M = P\sqrt{2}$ , directione media AC bissecante angulum virium PAQ (106. §.).

## 108. Corollarium 4.

Pro quolibet angulo virium  $\phi = \text{PAQ}$  est  $\text{Cos } \phi$  fractio genuina radii  $= 1$ , adeoque minor unitate, et quidem valoris negativi, dum angulus  $\phi$  est obtusus: semper est ergo  $2PQ \text{Cos } \phi < 2PQ$ , hinc etiam  $P^2 + Q^2 + 2PQ \text{Cos } \phi < P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2$ , et ideo  $M < P + Q$  (105. §.). Nimirum omni casu erit vis media minor quam summa virium lateralium (96. §.).

## 109. Corollarium 5.

Cum porro pro quolibet angulo  $\phi$  obtuso sit ejus cosinus negativus, pro quovis vero acuto positivus; patet, vim mediam M respondentem duabus viribus lateralibus P, Q majorem futuram pro quolibet angulo  $\phi = \text{PAC}$  acuto, quam pro obtuso (105. §.).

## 110. Corollarium 6.

Ex (102. 104. §.) elucet, semper, dum tres vires M, P, Q in datum punctum A agentes sunt in aequilibrio, binas quasque vires esse inter se in ratione directa finuum angulorum, quos illarum directiones cum directione vis tertiae comprehendunt: est enim

$$M : Q = \text{Sin } \phi : \text{Sin } p;$$

$$M : P = \text{Sin } \phi : \text{Sin } q;$$

$$P : Q = \text{Sin } q : \text{Sin } p;$$

## Scholion.

In quamplurimis disquisitionibus vires per lineas utilissime exprimuntur: sicut enim omnia quanta ad certas mensuras relata (14. §.) per numeros possunt exprimi (15. 18. §.); sic licebit eadem quanta per lineas determinatae longitudinis exprimere, modo communis aliqua linearum mensura praevis definiatur.

1. Sit  $v$  communis virium mensura, ut e. gr. pondus unius librae communis ponderum mensura (14. §.); pro mensura autem linearum sumatur lineola  $l$ , e. gr. unus pes. Quidquid sit vis  $V$ , semper erit cogitabilis linea recta  $L$ , cujus ratio ad assumptam mensuram  $l$  aequetur rationi vis  $V$  ad ejus mensuram  $v$ , quo fiat  $L:l = V:v$ , hinc  $V = v \cdot \frac{L}{l}$ , et ideo  $V = \frac{L}{1}$  pro  $v = 1$ , vel etiam  $V = L$  pro  $l = 1$ . Hoc sensu dicetur *recta*  $L$  *exprimere vim*  $V$ ; proprie autem aequatio  $V = L$  nihil aliud potest denotare, quam exponentem rationis (qui sub  $V$  debet intelligi) vis  $V$  ad assumptam virium mensuram  $v$  aequari exponenti rationis (quem  $L$  in illa aequatione debet significare) lineae rectae  $L$  ad assumptam linearum mensuram  $l$ , quo fiat, ut idem numerus, tali exponenti aequalis, jam vim  $V$ , jam rectam  $L$  expressurus sit, si is ad mensuram  $v$  virium, vel mensuram  $l$  linearum pro unitate assumptam referatur (15. 18. §.).

2. Quotcunque ergo dentur vires  $U, X, Z$ , poterunt illae per totidem lineas rectas  $u, x, z$  exprimi. Assumpta nimirum communi virium mensura  $v$  et communi linearum mensura  $l$ , quaeratur recta  $u$  exprimens vim  $U$  per (1), tum determinentur reliquae rectae  $x, z$  ita, ut illae ad rectam  $u$  in eadem sint ratione, in qua sunt vires  $X, Z$  ad vim  $U$ : nam si sit  $u = U$  in sensu (1), et  $Z:U = z:u, X:U = x:u$ ; erit utique etiam  $x = X$  et  $z = Z$  in eodem significatu.

## III. Problema.

*Datis viribus P, Q in punctum A secundum directiones AP, AQ, sub dato angulo PAQ concurrentes agentibus, geometricè determinare tam directionem, quam vim mediam.*

## Solutio.

In rectis AP, AQ coincidentibus cum virium P, Q directionibus sumantur partes Ab, Aa, quae datas vires P, Q exprimant, ita ut sit  $P:Q =$

Ab: Aa, tum construatur parallelogrammum Abda; diagonalis Ad erit directio media virium P, Q, exprimetque sua longitudine vim mediam M, ita ut sit  $M:P = Ad:Ab$ , et  $M:Q = Ad:Aa$  (110 §. Schol.)

#### Demonstratio.

In parallelogrammo enim Abda est  $Ab:Aa = \text{Sind } Aa : \text{Sind } Ab = \text{Sin } QAC : \text{Sin } PAC$ ; cum igitur sit  $Ab:Aa = P:Q$ ; est quoque  $P:Q = \text{Sin } QAC : \text{Sin } PAC$ , et  $P \text{Sin } PAC = Q \text{Sin } QAC$ , eoque ipso coincidit diagonalis Ad cum media directione virium P, Q (100. §).

Porro est in eodem parallelogrammo  $Ab:Ad = \text{Sina } Ad : \text{Sin } PAQ$ , et  $P:M = \text{Sina } Ad : \text{Sin } PAQ$  (104. §.): igitur debet esse  $Ab:Ad = P:M$ ; cumque fuerit  $P:Q = Ab:Aa$ , adeoque  $Ab = \frac{P \cdot Aa}{Q}$ , est etiam  $\frac{P \cdot Aa}{Q} : Ad = P:M$ , seu  $Aa:Ad = Q:M$ .

#### 112. DEFINITIO.

Duas vires P, Q secundum directiones AP, AQ in unum punctum A agentes in unam vim componere tantundem significat, ac tam mediam directionem AC virium P, Q, quam vim mediam ex illis resultantem invenire (96. §); haec vis media vocatur idcirco *vis composita*, et respectu illius sunt P, Q vires *componentes*. Quodsi autem detur una vis V agens in punctum A secundum datam directionem AC; vim V in duas vires P, Q, quae in idem punctum A secundum certas directiones AP, AQ cum AC in eodem plano jacentes agant, *resolvere* tantundem significabit, ac ejusmodi vires P, Q invenire, ut et media illarum directio coincidat cum directione AC vis datae V, et vis media ex illis resultans aequetur datae vi V.

#### 113. Corollarium 1.

Pressio, quam punctum A secundum directionem mediam AC a datis viribus componentibus P, Q perferentiscit, aequatur pressioni, quam vis composita V in puncto A produceret, si illa, remotis viribus P, Q, sola in punctum A secundum mediam directionem AC ageret (112. 96. §.): hoc sensu *aequalebit* vis composita V viribus componentibus P, Q simul sumtis, licet vis composita V semper sit minor quam summa virium componentium P, Q (112. 108. §.).

## 114. Corollarium 2.

Compositio datarum virium P, Q, dato illarum angulo  $PAQ = \phi$  (96. §.), perficietur trigonometrica, si directio media AC per (103. §.) et vis media (112. §.) per (104. §.), vel (105. §.) determinetur. Geometrica, vero poterit ea per (111. §.) perfici.

## 115. Corollarium 3.

Quodsi autem detur vis V agens in datum punctum A secundum datam directionem AC, quae in binas vires P, Q secundum determinatas directiones AP, AQ debeat resolvi; poterit haec resolutio, dato angulo  $PAQ = \phi$ , trigonometrica perfici, si vires P, Q per (104. §.), ob (112. §.) ita definiantur, ut sit

$$P = \frac{V \sin QAC}{\sin \phi}; \quad Q = \frac{V \sin PAC}{\sin \phi}.$$

## 116. Corollarium 4.

Geometrica datae vis V in punctum A directione AC agentis resolutio perficietur hoc modo. Abscindatur in recta AC pars Ad, quae vim V exprimat (110. §. Schol.), tum ex d ducantur parallelae da, db ad datas directiones AP, AQ virium, in quas V debet resolvi: latera enim Ab, Aa debebunt has ipsas vires exprimere (112. 111. §.).

## 117. Corollarium 5.

Hoc modo vis  $V = Ad$  agens in punctum A datae rectae AB (18. Fig.) secundum directionem AC sub angulo acuto  $BAC = \alpha$  ad AB inclinam, constructo rectangulo Abda, resolvi solet in duas vires, quarum una  $Aa = V \sin \alpha$  directione Aa ad AB perpendiculari, et altera  $Ab = V \cos \alpha$  directione Ab in recta AB jacente agat in punctum A (116. §.).

---

DISSERTATIO IV.  
DE  
CENTRO AEQUILIBRII VIRIUM DIRECTIONIBUS  
PARALLELIS IN DATUM SYSTEMA PLURIUM  
PUNCTORUM AGENTIUM.

---

118. DEFINITIO.

*Systema punctorum* est quodvis aggregatum plurium punctorum determinata aliqua ratione per datum spatium distributorum, quae, ne illorum situs respectivi ab uilis viribus possint turbari, omnia per lineas inflexiles inter se connexa poterunt cogitari, ac si ea totidem puncta unius corporis rigidi exhiberent (60. §.). Si punctis massas quascunque, puta lineas, superficies, aut corpora, substituas; habebis *Systema plurium massarum*.

119. DEFINITIO.

*Centrum aequilibræ dati systematis*, cujus singula puncta (118. §.) a certis viribus secundum directiones inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum sollicitentur, vocabitur punctum, quod respectu punctorum totius systematis talem situm habeat, ut, si in illud certa vis secundum determinatam directionem agere supponatur, ea in quovis situ totius systematis cum omnibus ejus viribus in aequilibrio esse debeat, seu directiones harum virium unam eandemque in omni situ systematis plagam respiciant, seu non, modo eae in quovis situ seorsim spectato omnes in eandem plagam tendant, et inter se sint parallelæ.

Scholion.

Casus hic directionum parallelarum est maxime memorabilis, tum quia is in corporibus physicis ad sensum habet locum, tum etiam quia ad hunc casum omnes reliqui casus possunt revocari, quod patebit, ubi generalissima staticarum disciplinarum principia recensuerimus. Gravitatis quidem sic agit in quodlibet corpus physicum, ut omnia illius puncta, quemcumque situm totum corpus habeat, semper secundum directiones ad sensum

senfum parallelas deorsum premantur, quo fit, ut hae directiones in omni corporis situ unam eandemque plagam respiciant. Verum possibile est, ut puncta dati systematis ab aliis viribus ad motum urgeantur, quarum directiones sint inter se parallelae, et omnes in quovis situ systematis in eandem plagam tendant, licet haec mutato situ systematis mutetur.

## 120. Theorema.

Si recta bD (19. Fig.), in cujus puncta b, a agent duae vires Q, P Fig. 19. secundum directiones parallelas bQ, aP secetur in C, ita ut sit  $P:Q = bC:aC$ , et in C directione Cc parallela directionibus bQ, aP applicetur vis  $c = P + Q$ ; erit haec in aequilibrio cum viribus P, Q.

## Demonstratio.

1. Vires P, Q, c agentes directionibus aP, bQ, Cc in puncta a, b, C, si ponatur angulus  $DaP = DbQ = cCb = \phi$ , possunt per (117. §.) in sequentes vires resolvi.

$$\text{Vis P in } a\alpha = P \sin \phi, \text{ et } a\alpha' = P \cos \phi;$$

$$Q \text{ in } b\beta = Q \sin \phi, \text{ et } b\beta' = Q \cos \phi;$$

$$c \text{ in } C\gamma = c \sin \phi, \text{ et } C\gamma' = c \cos \phi.$$

2. Quamobrem erunt vires P, Q, c in aequilibrio, si vires  $a\alpha$ ,  $a\alpha'$ ,  $b\beta$ ,  $b\beta'$ ,  $C\gamma$ ,  $C\gamma'$  omnes inter se fuerint in aequilibrio. Est autem per hypothesim  $c = P + Q$ : igitur est vis  $C\gamma'$  aequalis summae virium  $a\alpha'$ ,  $b\beta'$  in (1), proinde cum his viribus in aequilibrio (66. 70. §.). Porro est per hypothesim  $P:Q = bC:aC$ : igitur  $a\alpha : b\beta = bC:aC$  in (1); consequenter sunt quoque vires  $a\alpha$ ,  $b\beta$  cum vi  $C\gamma = a\alpha + b\beta$  in aequilibrio (89. §.).

## 121. Corollarium 1.

Secundum quascunque directiones aP, bQ inter se parallelas egerint binae vires P, Q in duo puncta a, b unius rectae bD; jacebit illarum centrum aequilibrum in puncto C ejusdem rectae sic determinato, ut sit  $Ca:Cb = Q:P$ ; idemque centrum ita premetur a viribus P, Q directione Ce parallela directionibus aP, bQ, ac si in illud una vis  $c = P + Q$  immediate ageret (120. 119. §.).

## 122. Corollarium 2.

Pro viribus aequalibus P, Q erit  $Ca = Cb$ : centrum aequilibrum illarum coincidet ergo cum puncto medio C rectae ab (121. §.).

## 123. Corollarium 3.

Data distantia ab punctorum  $a, b$  rectae  $bD$ , in qua agant datae vires  $P, Q$  directionibus  $aP, bQ$  inter se parallelis, inveniatur illarum centrum aequilibrum  $C$ , inventa hujus distantia ab alterutro puncto  $a, b$ ; determinabitur vero haec distantia ex aequatione  $aC \cdot P = bC \cdot Q$  (121. §.). Est enim

$$bC = ab - aC; \quad aC = ab - bC;$$

igitur erit

$$(ab - bC)P = (ab - aC)Q;$$

$$bC = \frac{ab \cdot P}{P + Q}; \quad aC = \frac{ab \cdot Q}{P + Q}.$$

## 124. Corollarium 4.

Poterit porro centrum aequilibrum  $C$  duarum virium  $P, Q$  directionibus parallelis  $aP, bQ$  in puncta  $a, b$  datae rectae  $bD$  agentium determinari etiam per ejus distantiam  $dC$  a dato quocunque puncto  $d$  in eodem recta. Cum enim sit

$$aC = dC - da; \quad bC = db - dC;$$

habebimus per (121. §.)

$$P : Q = (db - dC) : (dC - da); \quad \text{hinc}$$

$$dC = \frac{da \cdot P + db \cdot Q}{P + Q}.$$

## 125. Corollarium 5.

Fig. 20. Si dicas, punctum  $\alpha$  rectae  $aZ$  (20. Fig.) esse centrum aequilibrum virium  $A, B, C, \dots P$  secundum directiones parallelas  $aA, bB, cC, \dots pP$  agentium in puncta  $a, b, c, \dots p$  ejusdem rectae, in quo vis unica  $X = A + B + C + \dots + P$  applicata secundum directionem oppositam  $\alpha X$  parallelam illis directionibus sit in aequilibrio cum omnibus viribus  $A, B, C, \dots P$ , in puncta vero  $q, \alpha$  cogitentur agere vires  $Q, S = A + B + C + \dots + P$  secundum directiones  $qQ, \alpha S$  prioribus parallelas, quarum centrum aequilibrum  $\beta$  dabit

$$Z\beta = \frac{Z\alpha \cdot S + Zq \cdot Q}{S + Q} \quad (124. \S.),$$

ita ut una vis  $U = S + Q$  in  $\beta$  secundum directionem  $\beta U$  directionibus  $qQ, \alpha S$  parallelam applicata cum viribus  $Q, S$  sit in aequilibrio (121. §.); erit

erit eadem vis  $U$  etiam cum viribus  $A, B, C, - - - P, Q$ , absentibus  $S, X$ , in aequilibrio, punctumque  $\beta$  erit centrum aequilibrum virium  $A, B, C, - - - P, Q$  (119. §.). Cum enim in hac hypothese omnes vires  $A, B, C, - - - P, Q, S, U, X$  sint inter se in aequilibrio (64. §.), et vires  $S, X$  seorsim inter se in aequilibrio (66. §.); necesse est, ut his remotis vis  $U$  cum viribus  $A, B, C, - - - P, Q$  maneat in aequilibrio (65. §.).

## 126. Problema.

*Datis quocumque viribus  $A, B, C$ , etc. in data puncta  $a, b, c$ , etc. unius rectae  $aZ$  secundum directiones parallelas  $aA, bB, cC$  etc. agentibus; invenire illarum centrum aequilibrum, directionemque et quantitatem vis in eodem centro applicandae, quae cum omnibus illis viribus sit in aequilibrio.*

## Solutio.

Sumto quocumque puncto  $Z$  in data recta, multiplicentur distantiae singulorum punctorum  $a, b, c$ , etc. a puncto  $Z$  per vires in iis applicatas, et summa productorum dividatur per summam omnium virium; erit quotus distantia quaesiti centri aequilibrum, puta  $\gamma$ , a puncto  $Z$ . Quodsi jam in hac directione opposita  $\gamma V$  parallela directionibus virium  $A, B$ , etc. cogitetur applicari vis  $V$  aequalis summae omnium virium  $A, B$ , etc.; debeat illa esse in aequilibrio cum omnibus his viribus.

## Demonstratio.

1. Ex (124. 121. §.) elucet, solutionem hanc pro duabus viribus re ipsa locum habere.

2. Porro, si numero  $n$  vires  $A, B, C, - - - P$  habeant in  $\alpha$  centrum aequilibrum, pro quo sit

$$Z\alpha = \frac{A.aZ + B.bZ + - - - + P.pZ}{A+B + - - - + P},$$

et vis  $X = A+B + - - - + P$  in  $\alpha$  agens directione opposita cum viribus  $A, B, - - - P$  simul sumtis sit in aequilibrio; habebunt etiam una plures vires  $A, B, - - - P, Q$  unum centrum aequilibrum in  $\beta$ , pro quo fiet

$$Z\beta = \frac{Z\alpha(A+B + - - - + P) + Zq.Q}{A+B + - - - + P+Q},$$

et vis  $U = A+B + - - - + P+Q$  in  $\beta$  secundum oppositam directionem  $\beta U$  agens erit cum omnibus viribus  $A, B, - - - P, Q$  in aequilibrio

librio (125. §.): ut primum ergo data solutio de certo numero  $n$  virium vera est, debet illa eo ipso etiam de numero  $n+1$  talium virium vera esse, unde et ex (1) per (Vol. I. §. 31.) sequitur, datam solutionem problematis de quovis possibili virium numero veram debere esse.

## 127. Problema.

Fig. Si singula puncta  $a, b, c, d, e, f, \dots p, q$  alicujus systematis a totidem viribus  $A, B, C, D, E, F, \dots P, Q$  secundum directiones  $\alpha A, \beta B, \dots qQ$  inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum sollicitentur, constetque, vires  $A, B, C, \dots P$  habere centrum aequilibrii in  $\alpha$ , in quo vis una  $x = A + B + C + \dots + P$  agens directione opposita  $\alpha x$  parallela virium  $A, B, \dots$  directionibus cum omnibus viribus  $A, B, C, \dots P$  esset in aequilibrio; invenire tam centrum aequilibrii virium  $A, B, C, \dots P, Q$  quam directionem quantitatemque vis in illo applicandae, ut ea cum omnibus viribus  $A, B, C, \dots P, Q$  sit in aequilibrio.

## Solutio.

Ducta e centro aequilibrii  $\alpha$  virium  $A, B, C, \dots P$  ad punctum  $q$ , in quod agit vis  $Q$ , recta  $\alpha q$ , determinetur in eadem recta punctum  $\beta$  sic, ut sit

$$\alpha\beta = \frac{\alpha q \cdot Q}{A + B + C + \dots + P + Q};$$

erit  $\beta$  centrum aequilibrii virium  $A, B, C, \dots P, Q$ , in quo vis unica  $v = A + B + C + \dots + P + Q$  secundum directionem  $\beta v$  oppositam et parallelam directionibus illarum virium applicata debeat cum omnibus viribus  $A, B, C, \dots P, Q$  esse in aequilibrio.

## Demonstratio.

Si in centrum aequilibrii  $\alpha$  virium  $A, B, \dots P$  secundum oppositas directiones  $\alpha x, \alpha y$  parallelas directionibus illarum virium agant vires aequales  $x, y$ , quarum quaevis aequetur summae virium  $A, B, C, \dots P$ , et praeterea in  $\beta$  agat vis  $v = y + Q = A + B + C + \dots + P + Q$  directione  $\beta v$  parallela directionibus  $\alpha y, qQ$ ; erit  $\beta$  centrum aequilibrii virium  $y, Q$ , et vis  $v$  in aequilibrio cum viribus  $y, Q$  (121. 123. §.): cum igitur per hypothesein sit vis  $x$  in aequilibrio cum viribus  $A, B, C, \dots P$ ; erunt omnes vires  $A, B, C, \dots P, Q, v, x, y$  inter se in aequilibrio (64. §.). Quamobrem, quia vires  $x, y$  sunt inter se seorsim in aequilibrio

librio (66. §.), sublatis his viribus manebit vis  $v$  in aequilibrio cum viribus  $A, B, C, - - - P, Q$  (65. §.), punctumque  $\beta$  erit centrum aequilibrum virium  $A, B, C, - - - P, Q$  (119. §.).

## 128. Corollarium 1.

Pro quovis systemate punctorum, quae a totidem viribus secundum directiones inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum urgeantur (118. §.), debet dari unum centrum aequilibrum, in quo vis unica secundum directionem oppositam applicata, in quovis situ systematis cum iisdem viribus esset in aequilibrio, si illa summae omnium virium aequaretur. Cum enim hoc pro systemate duorum punctorum in (121. §.) sit demonstratum, idque, si de systemate constante punctis quocunque numero  $n$  verum esse supponatur, eo ipso etiam pro systemate uno plurium punctorum debeat subsistere (127. §.); necessarium est, ut id generatim de quovis possibili systemate sit verum (Vol. I. §. 31.).

## 129. Corollarium 2.

Est autem absolute impossibile, ut unum idemque systema plura centra aequilibrum habeat. Ponamus enim datum systema (21. Fig.) habere unum centrum aequilibrum in puncto  $\alpha$ , in quod agat vis  $x = A + B + - - - + Q$  directione opposita et parallela directionibus virium  $A, B, - - - Q$  in quovis situ systematis, quo illa sit in quovis systematis situ in aequilibrio cum omnibus viribus  $A, B, - - - Q$  (128. §.); dico, praeter hoc nullum aliud centrum aequilibrum  $\beta$  in eodem systemate esse possibile. Secus enim posset systemati talis situs tribui, in quo directio  $\alpha x$  vis  $x$  cum recta  $\alpha\beta$ , non coincidat, sed certum angulum  $x\alpha\beta$  formet; daretur porro aliqua vis  $v$ , quae in  $\beta$  certa directione  $\beta v$  agens cum omnibus viribus  $A, B, - - - Q$  systematis esset in aequilibrio (119. §.): quare, si in  $\alpha$  cogitetur agere vis  $y$  aequalis vi  $x$  secundum directionem  $\alpha y$  directioni  $\alpha x$  oppositam, quae cum  $x$  sit eo ipso in aequilibrio (66. §.); debent omnes vires  $A, B, - - - Q, v, y, x$  esse inter se in aequilibrio (64. §.). Cum igitur vis  $x$  sit in aequilibrio cum viribus  $A, B, - - - Q$ ; deberet, sublatis his omnibus viribus, vis  $y$  cum vi  $v$  manere in aequilibrio, quod est impossibile.

## 130. DEFINITIO.

Si systema plurium punctorum ad datum quodcunque planum referatur, productum ex qualibet vi in uno puncto systematis applicata (118. §.) in distantiam perpendicularem hujus puncti a dato plano vocabitur, improprie quidem, *Momentum vis respectu ejusdem plani*; summa vero momentorum omnium virium systematis respectu unius plani positione dati dabit *Momentum systematis respectu ejusdem plani*.

## 131. Corollarium.

In quocunque partes cogitetur datum systema plurium punctorum divisum, quae seorsim totidem systemata exhibebunt (118. §.); erit summa momentorum omnium partium respectu dati plani aequale momento totius systematis respectu ejusdem plani (130. §.).

## 132. Lemma.

Fig. 22. Si recta AB (22. Fig.) secetur in C in data ratione  $r:s$ , ut fit  $AC:BC=r:s$ , et ex punctis A, B, C ad planum MN positione datum ducantur perpendiculara  $A\alpha, B\beta, C\gamma$ ; debet esse  $(r+s)C\gamma=r.B\beta+s.A\alpha$ .

## Demonstratio.

Cogitetur duci per C aliud planum mn parallelum plano MN; debent perpendiculara  $A\alpha, B\beta$  ei in duobus punctis a, b occurrere; et si ex C ad haec puncta ducantur in plano mn rectae Ca, Cb, nascentur triangula similia  $A\alpha C, B\beta C$  ad a, b rectangula: erit igitur

$$AC:BC=A\alpha:B\beta:$$

quare, cum per hypothesim fit

$$AC:BC=r:s, \text{ erit}$$

$$r:s=A\alpha:B\beta=(C\gamma-A\alpha):(B\beta-C\gamma).$$

Et hinc obtinebimus

$$r(B\beta-C\gamma)=s(C\gamma-A\alpha), \text{ adeoque}$$

$$(r+s)C\gamma=r.B\beta+s.A\alpha.$$

## 133. Corollarium 1.

In systemate duorum punctorum A, B, quae a duabus viribus P, Q secundum directiones parallelas AP, BQ ad motum sollicitentur, jacebit centrum aequilibrii in puncto C rectae AB, ita ut sit  $P:Q=BC:AC$  (121. §.): erit ergo  $(P+Q)C\gamma=P.A\alpha+Q.B\beta$  (132. §.), seu momentum

tum systematis duorum punctorum respectu dati plani MN aequabitur producto ex summa duarum virium in illa puncta agentium in distantiam centri aequilibræ systematis ab eodem plano (130. §.).

## 134. Corollarium 2.

Sit  $n+1$  numerus punctorum  $a, b, c, d, e, f, \dots, p, q$  alicujus systematis, in quæ totidem vires  $A, B, C, D, E, F, \dots, P, Q$  agant secundum directiones  $aA, bB, cC, \dots$  parallelas et in eandem plagam tendentes, punctum vero  $\alpha$  sit centrum aequilibræ virium  $A, B, C, \dots, P$ , quarum summam denotet  $K$ : si recta  $\alpha q$  sic secetur in  $\beta$ , ut sit  $\alpha\beta:\beta q = Q:K$ , adeoque etiam  $\alpha\beta:\alpha q = Q:(Q+K)$ ; erit  $\beta$  centrum aequilibræ omnium  $n+1$  virium  $A, B, C, \dots, P, Q$  (127. §.), demissisque ex  $q, \beta, \alpha$  ad datum quodcumque planum MN perpendicularibus  $qq', \beta\beta', \alpha\alpha'$ , fiet  $(Q+K)\beta\beta' = K.\alpha\alpha' + Q.qq'$  (133. §.). Quare, si  $K.\alpha\alpha'$  aequetur summæ productorum ex  $n$  viribus  $A, B, C, \dots, P$  in distantias punctorum  $a, b, c, \dots, p$  a plano MN, aequabitur  $(Q+K)\beta\beta'$  summæ productorum ex  $n+1$  viribus  $A, B, C, \dots, P, Q$ , quarum summam  $Q+K$  exprimit, in distantias punctorum  $a, b, c, \dots, p, q$  ab eodem plano MN.

## 135. Theorema.

In quolibet systemate punctorum a totidem viribus secundum directiones inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum sollicitatorum erit productum ex summa omnium virium in distantiam communis centri aequilibræ (128. §.) a quovis plano positione dato aequale summæ momentorum singularum virium, adeoque aequale momento totius systematis (130. §.) respectu ejusdem plani.

## Demonstratio.

Verum est id de systemate duorum punctorum (133. §.); et si id supponatur esse verum de systemate  $n$  punctorum, verum erit id eo ipso etiam de systemate  $n+1$  punctorum (134. §.): debet ergo propositum theorema generatim pro quovis possibili systemate punctorum (118. §.) subsistere (Vol. I. §. 31.).

## 136. Theorema.

Omne planum  $mn$  (23. Fig.) transiens per centrum aequilibræ  $\gamma$  dati Fig. 23. cujuscunque systematis  $uvxy$  (118. 128. §.), dividet lotum systema in duas partes  $uvx, uyx$ , quarum momenta respectu plani.  $mn$  erunt inter se aequalia.

## Demonstratio.

Centra aequilibrii partium  $uvx$ ,  $uyx$  systematis  $uvxyu$  sint in  $a$ ,  $b$ , et  $MN$  sit planum parallelum plano  $mn$ , ad quod ex  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  ducta sint perpendiculara  $aA$ ,  $\gamma C$ ,  $bB$  plano  $mn$  in  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  occurrentia. Porro sint  $V$ ,  $Y$  summae virium agentium in partes  $uvx$ ,  $uyx$  systematis  $uvxyu$ ; erit  $V \cdot aA$  momentum partis  $uvx$ ,  $Y \cdot bB$  momentum partis  $uyx$  adeoque  $V \cdot aA + Y \cdot bB$  momentum totius systematis  $uvxyu$  respectu plani  $MN$  (135. 131. §.): cum igitur hoc ipsum momentum sit etiam  $= (V + Y) \gamma C$  (135. §.); debet esse

$$(V + Y) \gamma C = V \cdot aA + Y \cdot bB.$$

Igitur fiet

$$(V + Y) \gamma C = V(\gamma C - a\alpha) + Y(\gamma C + b\beta);$$

$$\text{hinc } V \cdot a\alpha = Y \cdot b\beta,$$

quod ob (135. §.) erat demonstrandum.

## 137. Theorema.

*Et vicissim omne planum  $mn$ , quod datum quodcunque systema (118. §.)  $uvxyu$  in duas partes  $uvx$ ,  $uyx$  ita dirimit, ut illarum momenta respectu ejusdem plani sint inter se aequalia, transit per centrum aequilibrii systematis.*

## Demonstratio.

1. Secus jaceret centrum aequilibrii systematis  $uvxyu$  extra planum  $mn$ , possetque per illud duci aliud planum  $m'n'$  parallelum plano  $mn$ , quod datum systema  $uvxyu$  in partes  $rvs$ ,  $rys$  dirimeret; inter utrumque autem planum jaceret una pars  $ruxs$  systematis, quod est impossibile.

2. Nam partes  $uvx$ ,  $ruxs$ ,  $rys$  deberent habere propria centra aequilibrii, puta in,  $a$ ,  $b$ ,  $g$ , et si  $A$ ,  $B$ ,  $G$  denotent summas virium in eadem partes agentium (128. §.), ductis perpendicularis ad,  $g\gamma$ ,  $b\beta$ ,  $be$  ad plana  $m'n'$ ,  $mn$ , essent  $A \cdot a d$ ,  $B \cdot be$ ,  $G \cdot gc$  momenta partium  $uvx$ ,  $ruxs$ ,  $rys$  respectu plani  $m'n'$ , et  $A \cdot a\alpha$ ,  $B \cdot b\beta$ ,  $G \cdot g\gamma$  momenta earundem partium respectu plani  $mn$  (135. §.); consequenter esset  $A \cdot ad + B \cdot be$  momentum partis  $rvs$  respectu plani  $m'n'$ , et  $G \cdot g\gamma + B \cdot b\beta$  momentum partis  $uyx$  respectu plani  $mn$  (131. §.): igitur per hypothesim in theoremate assumtam, et (1) ob (136. §.) deberet esse

$$G \cdot g\gamma + B \cdot b\beta = A \cdot a\alpha;$$

$$A \cdot ad + B \cdot be = G \cdot gc.$$

Quare

Quare fieret  $G.g\gamma = A.a\alpha - B.b\beta$ : ob  $G.g\gamma > G.gc$  deberet ergo esse  $A.a\alpha - B.b\beta > A.ad + B.be$ , quod est impossibile.

## 138. Theorema.

Si planum  $m'n'$  datum *systema* (118. §.)  $uvxyu$  dividat in duas partes  $rvs$ ,  $rys$ , centrum vero *aequilibrium* totius *systematis* jaceat extra planum  $m'n'$  alicubi in  $\gamma$ ; erit differentia momenti partis  $rys$  a momento partis  $rvs$ , in qua jacet  $\gamma$ , respectu plani  $m'n'$  aequalis producto ex summa virium totius *systematis* (119. §.)  $uvxyu$  in distantiam illius centri *aequilibrium*  $\gamma$  ab eodem plano  $m'n'$ .

## Demonstratio.

1. Transeat per  $\gamma$  planum  $mn$  parallelum plano  $m'n'$ , quo totum *systema*  $uvxyu$  in tres partes  $uvx$ ,  $uxsr$ ,  $rsy$  dividatur. Centra *aequilibrium* harum partium sint  $a$ ,  $b$ ,  $g$ , et  $ad$ ,  $be$ ,  $b\beta$ ,  $g\gamma$  perpendiculara ad utrumque planum;  $A$  vero,  $B$  et  $G$  sint summae virium (119. §.) agentium in partes  $uvx$ ,  $uxsr$ ,  $rsy$  *systematis*.

2. Erit momentum partis  $ruvxs$  respectu plani  $m'n'$  aequale summae  $A.ad + B.be$  ob (1) per (135. 131. §.), et  $G.gc$  momentum partis  $rys$  respectu ejusdem plani  $m'n'$  (135. §.): differentia horum momentorum erit ergo

$$\begin{aligned} & A.ad + B.be - G.gc = \\ & = A(\gamma c + a\alpha) + B(\gamma c - b\beta) - G(g\gamma - \gamma c) = \\ & = (A + B + G)\gamma c + A.a\alpha - (B.b\beta + G.g\gamma). \end{aligned}$$

Sed  $A.a\alpha$  et  $B.b\beta + G.g\gamma$  sunt momenta partium  $uvx$ ,  $uyx$  respectu plani  $mn$ , ob (1) per (135. 131. §.), inter se aequalia (136. §.): igitur est etiam

$$(A.ad + B.be) - G.gc = (A + B + G)\gamma c.$$

## 139. Theorema.

Si in singula puncta  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , etc. (24. Fig.) dati cujuscunque *systematis*  $uvx$  plurium punctorum (118. §.) agent vel determinatae vires  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , etc. secundum directiones  $aA$ ,  $bB$ ,  $cC$ ,  $dD$ ,  $eE$  inter se parallelas et in eandem plagam tendentes, vel quaecunque aliae vires  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$ , quae ad priores sint in certa ratione  $m:n$ , et quidem vel secundum priores directiones vel secundum alias directiones  $aA'$ ,  $bB'$ ,  $cC'$ ,  $dD'$ ,  $eE'$ ,

*inter se parallelas et in eandem plagam tendentes; idem erit semper centrum aequilibrum totius systematis.*

**Demonstratio.**

Secus haberet datum systema  $u \vee x$  in hypothese virium  $A', B', C', D', E'$  unum centrum aequilibrum  $\beta$  distinctum a centro aequilibrum  $\alpha$ , quod illud in hypothese virium  $A, B, C, D, E$  debet habere (128. §.), ductoque plano  $MN$  ad rectam  $\beta\alpha$  sub angulo  $\beta MN$  inclinato esset distantia perpendicularis  $\alpha\gamma$  centri aequilibrum  $\alpha$  minor quam distantia  $\beta\delta$  centri  $\beta$  a plano  $MN$ , quod in assumpta hypothese est impossibile.

Si enim  $a', b', c', d', e'$  sint distantiae perpendiculares punctorum  $a, b, c, d, e$  a plano  $MN$ ; deberet esse per (135. 130. §.)

$$(A + B + C + D + E)\alpha\gamma = A \cdot a' + B \cdot b' + C \cdot c' + D \cdot d' + E \cdot e';$$

$$(A' + B' + C' + D' + E')\beta\delta = A' \cdot a' + B' \cdot b' + C' \cdot c' + D' \cdot d' + E' \cdot e'.$$

Cum vero per hypothese sit  $A':A = m:n$ , consequenter  $A' = A \frac{m}{n}$ , et sic  $B' = B \frac{m}{n}$ ,  $C' = C \frac{m}{n}$ ,  $D' = D \frac{m}{n}$ ,  $E' = E \frac{m}{n}$ ; abibit, facta substitutione, secunda aequatio in sequentem

$$(A + B + C + D + E)\beta\delta = A \cdot a' + B \cdot b' + C \cdot c' + D \cdot d' + E \cdot e'.$$

Ex hac vero et prima aequatione evidenter sequitur, debere esse  $\alpha\gamma = \beta\delta$ , adeoque impossibile esse, ut fiat  $\alpha\gamma < \beta\delta$ .

DISSERTATIO V.  
DE  
CENTRO GRAVITATIS IN GENERE.

140. DEFINITIO.

Dum vires singula puncta certi systematis (118. §.) directionibus inter se parallelis et in eandem plagam tendentibus ad motum sollicitantes a gravitate proveniunt (39. §.), centrum aequilibræ ejusdem systematis vocatur *centrum gravitatis*.

141. Corollarium 1.

Pondera e totidem punctis alicujus rectæ libere pendentia spectari debent instar virium in eadem puncta secundum directiones inter se parallelas agentium (42. 43. §.), sic, ut, quaecunque in præcedente dissertatione de ejusmodi virium centro aequilibræ generatim sunt demonstrata, etiam ad centrum gravitatis talium ponderum debeant extendi (140. §.).

142. Corollarium 2.

Quamobrem jacebit centrum gravitatis duorum ponderum aequalium *Fig. 25.* P, Q e punctis a, b (25. Fig.) datae rectæ bD libere pendentium in medio puncto C inter a et b (141. 122. §.).

143. Corollarium 3.

Quodsi autem pondera P, Q fuerint inaequalia; debet illorum centrum gravitatis coincidere cum puncto C rectæ ab, si hoc ita determinetur, ut sit  $P:Q = bC:aC$  (141. 121. §.).

144. Corollarium 4.

Erit porro distantia centri gravitatis C duorum ponderum P, Q ab alterutro puncto suspensionis (a vel b) aequalis producto ex recta ab in pondus (Q vel P) pendens ex altero puncto suspensionis (b vel a) diviso per summam ponderum P, Q (141. 123. §.).

E. gr. Sit recta  $ab = 7$  pedibus, quaeraturque centrum gravitatis C ponderum  $P = 6$  lb,  $Q = 15$  lb; erit

$$aC = \frac{7 \cdot 15}{6 + 15} = 5 \text{ pedibus};$$

$$bC = \frac{7 \cdot 6}{6 + 15} = 2 \text{ pedibus.}$$

## 145. Corollarium 5.

Et distantia centri gravitatis C duorum ponderum P, Q a dato quocunque in recta bD puncto d aequabitur summae productorum ex distantiiis singulorum punctorum suspensionis a, b a puncto d in pondera ex illis pendentia divisae per summam ponderum (141. 124. §.).

E. gr. Detur punctum d in distantiiis da=3 pedibus, db=10 pedibus a punctis a, b, et quaeratur centrum gravitatis C ponderum P=15 lb, Q=5 lb; jacebit illud in distantia a puncto d

$$dC = \frac{3 \cdot 15 + 10 \cdot 5}{15 + 5} = 4\frac{1}{2} \text{ ped.}$$

## 146. Corollarium 6.

Fig. 26.

Et generatim quocunque pondera A, B, C, - - - P, Q e totidem punctis, a, b, c, - - - p, q datae rectae aZ libere pendeant, habebunt illa commune centrum gravitatis in puncto  $\beta$  ejusdem rectae ita determinato, ut illius distantia Z $\beta$  a dato quocunque in eadem recta puncto Z aequetur summae productorum ex distantiiis Za, Zb, Zc, - - - Zp, Zq singulorum punctorum suspensionis a puncto Z in ipsa pondera ex illis pendentia divisae per summam omnium ponderum: pressio vero, quam centrum  $\beta$  directione verticali  $\beta y$  ab omnibus ponderibus persentiscet, aequabitur pressioni, quam in illo unicum pondus S summae omnium ponderum aequale ex  $\beta$  libere pendens produceret (141. 126. §.).

## 147. DEFINITIO.

Omnis massa gravis, linea, superficies, et corpus determinatae figurae, potest spectari instar unius systematis plurium punctorum materialium (118. §.): pressiones aequales, quae in singulis punctis secundum directiones verticales inter se parallelas in quovis massae situ deorsum tendentes a vi gravitatis producantur (41. 42. §.), licebit instar totidem virium aequalium considerare: producta ex his viribus in distantias perpendiculares punctorum, in quae illae agunt, a dato plano erunt *Momenta* earundem virium respectu dati plani, et summa omnium momentorum dabit

dabit *Momentum* totius massae gravis respectu ejusdem plani (130. §.): summa demum omnium virium aequalium in puncta massae agentium erit pondus totius massae (45. §.).

## 148. Corollarium 1.

Omnis massa gravis  $uvx$  (27. Fig.) habebit aliquod idque unicum Fig. 27. centrum gravitatis  $C$ : si in hoc directione verticali opposita  $CV$  cogitetur agere vis  $V$  aequalis ponderi totius massae  $uvx$ ; vel si, absente vi  $V$ , massa  $uvx$  in centro  $C$  ita cogitetur figi, ut illa, quin circa  $C$  convertatur, moveri nequeat; debet utroque casu tota massa  $uvx$  in aequilibrio servari: unde necessario sequitur, pressionem, quam gravitas in centro  $C$  directione verticali  $Cy$  producit, aequari pressioni, quam in illo vis una  $y$  ponderi massae  $uvx$  aequalis produceret (141. 128. 129. §.).

## 149. Corollarium 2.

Potest ergo omne systema plurium massarum gravium spectari instar unius systematis totidem punctorum, cum centris gravitatis illarum massarum coincidentium, quae a viribus per pondera earundem massarum determinatis secundum directiones verticales deorsum ad motum debent urgeri (148. 118. §.): omne itaque systema plurium massarum gravium habebit aliquod idque unicum centrum gravitatis (140. 128. 129. §.), quod tanta efficacia directione verticali deorsum premetur ac si ex illo unum pondus aequale summae ponderum omnium massarum totum systema constituentium libere penderet: momentum cujusvis talis massae respectu dati plani erit productum ex distantia centri gravitatis ejusdem massae in illius pondus, et summa momentorum omnium massarum dabit momentum totius systematis respectu dati plani (130. §.).

## 150. Corollarium 3.

Momentum cujuslibet massae gravis  $uvx$  respectu cujuscunque plani  $mn$  erit aequale producto ex pondere ejusdem massae, seu ipsa massa ei proportionali (52. §.), in distantiam perpendicularem  $Cc$  ejus centri gravitatis  $C$  (148. §.) ab eodem plano (140. 147. 135. §.).

## 151. Corollarium 4.

Et momentum cujusvis systematis plurium massarum gravium (149. §.) respectu dati plani aequabitur producto ex summa ponderum omnium

massarum in distantiam perpendicularem centri gravitatis totius systematis ab eodem plano (149. 140. 135. §.).

## 152. Corollarium 5.

Si in singula puncta datae massae gravis M cogitentur agere vires aequales independentes a gravitate secundum quascunque directiones in quovis massae M situ inter se parallelas et in eandem plagam tendentes; erit commune centrum aequilibrum omnium harum virium idem cum centro gravitatis massae gravis M (141. 147. 139. §.).

## 153. Corollarium 6.

Et si, dato quocunque systemate plurium massarum gravium A, B, C, - - - P, Q, in centra gravitatis singularum massarum (148. §.) agant quaecunque vires A<sup>1</sup>, B<sup>1</sup>, C<sup>1</sup>, - - - P<sup>1</sup>, Q<sup>1</sup>, ponderibus illarum massarum proportionales, secundum directiones in quovis situ systematis inter se parallelas et in eandem plagam tendentes, seu illae verticales sint, seu a verticalibus utcurque declinent; erit centrum aequilibrum omnium virium A<sup>1</sup>, B<sup>1</sup>, C<sup>1</sup>, - - - P<sup>1</sup>, Q<sup>1</sup> idem cum centro gravitatis systematis massarum gravium A, B, C, - - - P, Q (149. 140. 139. §.).

## 154. Corollarium 7.

Fig. 28. Centrum gravitatis systematis duarum massarum gravium A, B (28. Fig.), quarum centra gravitatis z, x aliunde sint nota, jacebit in rectae xz puncto a, quod, data mutua centrorum x, z distantia xz, determinabitur ob (149. §.), si recta xz secetur in a in ratione inversa ponderum, vel massarum A, B illis proportionalium (121. §.), vel per (123. §.) definiatur ejus distantia ab alterutro centro x, z, aut ab alio quocunque puncto u dato in recta xz per (124. §.), quo fiat

$$ax : az = Z : X;$$

$$az = \frac{xz \cdot X}{X + Z}; \quad ax = \frac{xz \cdot Z}{X + Z};$$

$$au = \frac{xu \cdot X + zu \cdot Z}{X + Z}.$$

## 155. Corollarium 8.

Ex (154. §.) nascentur sequentes formulae, ope quarum, dato centro gravitatis a unius systematis duarum massarum gravium A, B, datoque cen-

tro gravitatis  $z$  vel  $x$  alterutrius massae, centrum gravitatis alterius massae in recta  $ux$  transeunte per data centra poterit determinari.

Si datis  $a, x$  quaeratur  $z$ .

$$az = \frac{ax \cdot X}{Z}; \quad xz = \frac{ax(X+Z)}{Z};$$

$$uz = \frac{ua \cdot Z - ax \cdot X}{Z} = \frac{ua(X+Z) - ux \cdot X}{Z}.$$

Si datis  $a, z$  quaeratur  $x$ .

$$ax = \frac{az \cdot Z}{X}; \quad zx = \frac{az(X+Z)}{X};$$

$$ux = \frac{ua \cdot X + az \cdot Z}{X} = \frac{ua(X+Z) - uz \cdot Z}{X}.$$

### 156. Corollarium 9.

Quodsi autem detur systema numero  $n+1$  massarum gravium  $A, B, C, \dots, P, Q$  (21. Fig.) suis ponderibus proportionalium, quarum centra gravitatis  $a, b, c, \dots, p, q$  nota sint, noscaturque commune centrum gravitatis  $\alpha$   $n$  massarum  $A, B, C, \dots, P$ ; inveniatur centrum gravitatis omnium  $n+1$  massarum  $A, B, C, \dots, P, Q$  in puncto  $\beta$  rectae  $\alpha q$ , si ob (149. 140. 127. §) fiat

$$\alpha\beta = \frac{\alpha q \cdot Q}{A+B+C+\dots+P+Q}.$$

### 157. Corollarium 10.

Hinc (154. 156. §.) per se manifestum fit, qua methodo centrum gravitatis cujuslibet systematis plurium massarum gravium investigare liceat, datis centris gravitatis et ponderibus singularum massarum (148. §.).

Sic, si e. gr. detur sistema quinque massarum gravium  $A, B, C, D, E$  Fig. 29. suis ponderibus proportionalium, quarum centra gravitatis in  $a, b, c, d, e$  sita sint, ducta recta  $ab$ , eademque in  $l$  ita secta, ut sit

$$al = \frac{ab \cdot B}{A+B};$$

erit  $l$  centrum gravitatis massarum  $A, B$  (154. §.). Si jam ex hoc ad  $c$  ducatur recta  $lc$ , tum determinetur

$$lm = \frac{lc \cdot C}{A+B+C};$$

H 2

erit

erit m commune centrum gravitatis trium massarum A, B, C (156. §.).  
Si porro ex m ad d ducatur recta md, deinde quaeratur

$$mn = \frac{md \cdot D}{A + B + C + D};$$

erit n commune centrum gravitatis quatuor massarum A, B, C, D (156. §.).  
Si demum ex n ad e ducatur recta ne, et determinetur

$$no = \frac{ne \cdot E}{A + B + C + D + E};$$

erit o commune centrum gravitatis quinque massarum A, B, C, D, E  
(156. §.).

#### 158. DEFINITIO.

*Planum gravitatis* datae massae gravis, vel *Diameter gravitatis*, est planum vel linea recta transiens per centrum gravitatis ejusdem massae (148. §.).

#### 159. Corollarium 1.

Innumera possunt duci plana gravitatis, et innumerae diametri gravitatis in qualibet massa gravi (158. §.).

#### 160. Corollarium 2.

Omnes diametri gravitatis cujuslibet massae gravis (159. §.) intersecant se in ejus centro gravitatis (158. 148. §.).

#### 161. Corollarium 3.

Communis interseccio duorum planorum gravitatis datae cujuscunque massae gravis erit diameter gravitatis ejusdem massae (158. §.).

#### 162. Corollarium 4.

Et si diameter gravitatis alicujus massae secetur a plano gravitatis ejusdem massae, erit interseccio illius centrum gravitatis (158. §.).

#### 163. Corollarium 5.

Omne planum gravitatis vel unius massae gravis M, vel certi systematis S plurium massarum gravium, dividet totam massam M, vel totum systema S in duas partes, quarum momenta respectu ejusdem piani erunt inter se aequalia (158. 149. 147. 136. §.).

#### 164. Corollarium 6.

Et vicissim omne planum datam massam gravem M, vel datum systema S plurium massarum gravium in duas partes dirimens, quarum momenta

menta respectu ejusdem plani sint inter se aequalia, erit unum planum gravitatis ejusdem massae M vel systematis S (149. 147. 137. 158. §.).

## 165. Corollarium 7.

Si vero planum mn (27. Fig.) datam massam gravem uvx in duas Fig. 27. partes rus, rvxs dirimat, quin id transeat per centrum gravitatis C massae uvx; erunt momenta partium rus, rvxs respectu plani mn inaequalia, et differentia momenti partis rus a momento partis rvxs, in qua jacet centrum gravitatis C massae uvx, aequabitur producto ex pondere totius massae uvx in distantiam Cc centri gravitatis C a plano mn (148. 147. 138. §.).

## 166. Corollarium 8.

Ex (164. §.) demum colliges, quod si omnia puncta alicujus massae gravis in uno plano jaceant, hoc ipsum planum debeat esse unum planum gravitatis talis massae: momenta enim partium, in quas massa ab ejusmodi plano dirimitur, aequantur nihilo (147. §.).

## 167. Hypothesis.

*In investigatione centrorum gravitatis sumantur omnes massae, lineae, superficies, et corpora, pro aequabiliter densis et homogeneis, quo fiat, ut tam massae, quam pondera illis proportionalia, per volumina, sub quibus continentur, possint exprimi.*

## Scholion.

Si enim generatim sit P pondus massae M sub volumine V contentae, et p pondus talis massae contentae sub determinato quopiam volumine v, puta uno pede cubico; erit  $P:p = V:v$  (51. §.), hinc  $P = p \frac{V}{v}$ . Quamobrem licebit ponere  $P = V$ , modo per V intelligatur exponens rationis voluminis V, sub quo pondus P continetur, ad volumen determinatum v, sub quo continetur pondus p pro mensura prioris assumtum, ita ut V in  $P = V$  numerum concretum ad unitatem  $= p$  relatum exprimat (15. 18 §.). Hoc sensu poterit massa et pondus cujuslibet lineae gravis per ejus longitudinem; massa vero et pondus cujusvis superficiei gravis per ipsam superficiem geometricè determinatam, et massa pondusque dati cujusconque corporis per ejus volumen exprimi. Sic e. gr. in investigatione centri gravitatis conii, cujus altitudo a, et area baseos b data sit, licebit ipsius

massam et pondus ei proportionale per volumen  $\frac{ab}{3}$  exprimere. Nullae quidem extant lineae graves aut superficies; nihil tamen obstat, quominus tales cogitari possint: sicut autem proprietates massarum homogenearum et aequabiliter densarum in prima dissertatione expositae insignem usum habent in practicis disquisitionibus, licet ejusmodi massae nusquam extent; sic etiam investigatio centri gravitatis talium massarum amplum habebit usum in disquisitionibus mechanicis.

## 168. Problema.

*Dato momento  $\mu$  datae cujuscunque massae gravis M respectu plani positione dati; invenire distantiam D centri gravitatis massae M ab eodem plano.*

## Solutio.

Cum sit  $\mu = MD$  (150. §.); erit  $D = \frac{\mu}{M}$ , id est: momentum datae massae gravis respectu plani positione dati divisum per ipsam massam dabit distantiam ejus centri gravitatis ab eodem plano.

## 169. Problema.

*Exponere methodum, qua momentum alicujus massae gravis respectu plani positione dati liceat investigare.*

## Solutio.

Fig. 30. 1. Imaginemur nobis in (30. Fig.) quamcunque lineam curvam, vel superficiem, aut corpus grave ABCDEA: MN vero sit datum planum, respectu cujus determinare oporteat momentum illius massae.

2. Sumta ad arbitrium linea abscissarum PQ perpendiculari ad planum MN, fixaque abscissarum origine in puncto P, capiatur abscissa  $x = Pa$ , et per punctum a cogitetur duci planum ap parallelum plano MN: abscindet ap ex tota massa ABCDEA partem pAq, cujus magnitudo pendeat a longitudine abscissae  $x = Pa$ . Supponamus itaque, possibiles esse duas functiones  $m, \mu$  variabilis abscissae  $x$ , quarum prior  $m$  massam pAq, et posterior  $\mu$  momentum ejusdem massae respectu plani MN exprimat.

3. Quodsi jam abscissa  $x = Pa$  abeat in  $Pb = x + \Delta x$  pro  $ab = \Delta x$  et per punctum b transeat planum br parallelum plano MN; abit functio  $m = pAq$  (1) in novam functionem  $m' = pAq + pqsr$ ,  
et

et functio  $\mu$  exprimens momentum massae  $m = pAq$  abibit in certam functionem  $\mu'$  expressuram momentum massae  $rAs$  aequale summae momentorum illius partium  $pAq, pqsr$  respectu plani  $MN$  (147. §.).

4. In (3) erit itaque  $\Delta m = m' - m$  functio aequalis massae  $pqs r$  inter plana  $pa, rb$  parallela interceptae, et  $\Delta \mu = \mu' - \mu$  functio aequalis momento massae  $\Delta m = pqs r$  respectu plani  $MN$  (Vol. I. §. 18).

5. Ignoramus quidem, in quonam puncto centrum gravitatis massae  $pqs r = \Delta m$  inter plana  $pq, rs$  interceptae jaceat: facile tamen quisque per se perspiciet, cur illud cum certo puncto  $c$  sito inter plana  $pq, rs$  debeat coincidere, ita ut illius distantia  $cd$  a plano  $MN$  major sit quam  $bQ$ , et simul minor quam  $aQ$ . Cum ergo momentum  $\Delta \mu$  massae  $\Delta m = pqs r$  debeat esse  $\Delta \mu = \Delta m \cdot cd$  (135. §.); erit semper

$$\Delta \mu > \Delta m \cdot bQ \text{ et } \Delta \mu < \Delta m \cdot aQ.$$

Hinc pro linea abscissarum  $PQ = a$ , proinde  $aQ = a - x$ , et  $bQ = a - (x + \Delta x)$  fiet

$$\Delta \mu > \Delta m(a - x - \Delta x); \quad \Delta \mu < \Delta m(a - x).$$

6. Verum, si re ipsa est possibilis aliqua functio  $m$  variabilis  $x$ , quae massam  $pAq$  exprimat (2). debet pro ejus differentia dari expressio formae  $\Delta m = \varepsilon m \Delta x + e \Delta x^2 + f \Delta x^3 + \text{etc.}$  (Vol. I. §. 84): eapropter erit in (5)

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} > (a - x) \varepsilon m \frac{+(a - x)(e \Delta x + f \Delta x^2 + \text{etc.})}{-(\varepsilon m \cdot \Delta x + e \Delta x^2 + f \Delta x^3 + \text{etc.})}$$

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} < (a - x) \varepsilon m + (a - x)(e \Delta x + f \Delta x^2 + \text{etc.})$$

Et ideo erit exponens rationis differentialis functionis  $\mu$  per (Vol. I. §. 131.)

$$\varepsilon \mu = (a - x) \varepsilon m.$$

7. Quodsi ergo possibile fuerit,  $\varepsilon m$  per  $x$  et  $\varepsilon x$  determinare, poterit quoque  $\varepsilon \mu$  per  $x$  et  $\varepsilon x$  definiri, tum ope calculi integralis determinari momentum  $\mu$  massae  $m = pAq$  respectu plani  $MN$ . Si porro notus fuerit valor abscissae  $x = Pa$ , pro quo massa  $m = pAq$  abeat in massam  $ACD$ , pro valor  $x = Pe$ , substituto hoc valore loco  $x$  in functione  $\mu$ , obtinebitur momentum totius massae  $ABCDEA$  respectu dati plani  $MN$ .

## Scholion.

Idem problema in systemate infinitesimalistarum potest hoc modo solvi. Si sectioni  $pq$  cogitetur infinite vicina sectio  $rs$ , ut  $ab = dx$  fit infinite parvum incrementum variabilis  $x = Pa$ ; erit  $dm = pqs r$  infinite parvum incrementum massae  $m = pAq$ , et illius momentum respectu plani  $MN$  aequabitur infinite parvo incremento  $d\mu$  momenti  $\mu$  massae  $pAq$  respectu ejusdem plani: cum ergo in hac hypothese centrum gravitatis massae  $pqs r$  adeo vicinum debeat esse sectioni  $pq$ , ut differentia inter illius distantiam a plano  $MN$  et distantiam  $aQ = a - x$  fit infinite parva, proinde nulla; erit momentum  $d\mu$  aequale producto ex massa  $dm$  in distantiam  $a - x$  (135. §), id est,  $d\mu = (a - x) dm$ .

## 170. Corollarium 1.

Sumta origine abscissarum in  $Q$ , positaque abscissa  $Qa = z$ , ut fiat  $a - x = z$ ; erit massa  $m = pAq$  certa functio variabilis  $z$ , ejus autem momentum  $\mu$  respectu plani  $MN$  dabit  $\varepsilon\mu = z\varepsilon m$  (169. §), ubi jam exponens differentialis  $\varepsilon m$  sumendus erit cum signis contrariis, cum crescente variabili  $z = Qa$  versus  $P$  decrescat massa  $m = pAq$ , ejusque momentum  $\mu$  (Vol. I. §. 132.).

## 171. Corollarium 2.

Pars residua massae  $ABCDEA$  sit  $M = pqCDp$ , adeoque  $M = ABCDEA - m$ ; erit  $\varepsilon M = -\varepsilon m$ . Praeterea denotet  $K$  momentum massae  $ABCDEA$  et  $k$  momentum massae  $pqCDp = M$  respectu plani  $MN$ , quo fiat  $k = K - \mu$ ; erit quoque  $\varepsilon k = -\varepsilon\mu$ . Quare ob (169. 170. §.) habebimus sequentes expressiones pro exponente rationis differentialis momenti statici  $k$  massae  $M = pqCDp$  respectu plani  $MN$ , in quarum prima sumetur  $\varepsilon M$  cum signis contrariis, cum crescente variabili  $x = Pa$  decrescat massa  $M = pqCDp$ , ejusque momentum  $k$ .

$$\varepsilon k = (a - x)\varepsilon M; \quad \varepsilon k = z\varepsilon M.$$

## 172. Corollarium 3.

Haec principia offerunt methodum universalem investigandi centrum gravitatis datae cujusvis lineae curvae et superficiei, quae tota in uno plano jaceat. Sit enim  $AB\dot{C}DA$  ejusmodi vel linea curva, vel superficies plana; necesse est, ut illius centrum gravitatis jaceat in plano ipsius curvae vel superficiei (166. 158. §.): quare cogitentur duo plana ad planum, in quo  $ABCDEA$  jacet, perpendicularia, illud in  $MN$ ,  $MR$ , et sese sub

sub angulo recto  $RMN$  interfecantia, quo fiat, ut distantiae centri gravitatis massae  $ABCDEA$  ab iisdem planis aequentur distantis illius a rectis  $MN, MR$  exhibentibus intersectiones eorundem planorum cum plano, in quo jacet  $ABCDEA$ . Quodsi jam per (169. 170. 171. §.) determines momenta curvae lineae, vel superficiei  $ABCDEA$  respectu planorum per  $MN, MR$  ductorum, eaque divides per massam  $ABCDEA$  vel datam, vel quacunq̄ue methodo inventam; invenies distantias centri gravitatis a rectis  $MN, MR$  (168. §.), atque per has erit situs centri gravitatis perfecte determinatus. Fac enim distantiam illius a recta  $MN$  esse  $=S$ , et distantiam a recta  $MR$  inventam esse  $=s$ ; sumta  $Mf=S$  et  $Md=s$ , ductisque ex  $f, d$  ad  $MR, MN$  perpendicularibus  $fc, dc$  in  $c$  sese interfecantibus: erit  $c$  quaesitum centrum gravitatis.

## 173. Corollarium 4.

Ubi autem investigandum fuerit centrum gravitatis vel alicujus corporis, vel cuspis lineae curvae aut superficiei, quae non tota in uno plano jacet; licebit totam ad tria plana sese sub angulis rectis interfecantia referre, tum momenta respectu singulorum planorum per (169. 170. 171. §.) quaerere: si enim haec per datam vel quacunq̄ue ratione determinatam massam dati corporis, aut datae lineae curvae vel superficiei dividantur, obtinebuntur distantiae illius centri gravitatis a singulis planis (168. §.), et per has erit idem centrum perfecte determinatum.

## Scholion.

In multis tamen iisque maxime memorabilibus casibus facile una diameterum gravitatis datae massae cognoscitur, quo ipso investigatio centri gravitatis compendiosior redditur. Per saepe porro occurrunt tales massae, quarum centra gravitatis per data centra aliarum massarum secundum principia superius exposita (154. 155. 157. §.) possunt determinari, quin sit necessarium ad praecedentem methodum, aut aliam illi similem refugere. Utrumque in sequentibus dissertationibus pluribus exemplis illustrabitur: multa horum exemplorum exhibent casus, qui in practicis disquisitionibus frequenter possunt occurrere: reliqua id habent utilitatis, quod tyronibus uberrimum campum sese in adplicatione principiorum calculi differentio-integralis in primo horum opusculorum volumine expositis aperiant.

DISSERTATIO VI.  
DE  
INVESTIGATIONE CENTRI GRAVITATIS LINEARUM  
ET PLANORUM GRAVIUM.

---

174. Problema.

Fig. 6. *Invenire centrum gravitatis datae lineae rectae AB (6. Fig.).*

Solutio.

Bissecetur data recta AB in puncto C; erit C illius centrum gravitatis.

Demonstratio.

Cum enim singula puncta rectae AB pari efficacia secundum directiones verticales inter se parallelas deprsum a vi gravitatis premantur; necesse est, ut, si vis una V aequalis ponderi totius rectae AB (167. §.) secundum directionem verticalem CV oppositam directioni gravitatis in punctum medium C ejusdem rectae agere cogitetur, ea rectam AB servet in aequilibrio (120. §.): punctum ergo C est centrum gravitatis rectae AB (140. 119. §.).

175. Theorema.

Fig. 31. *Si recta QC sit axis datae curvae XQZ (31. Fig.), et XZ chorda ad axem perpendicularis; jacebit in QC centrum gravitatis arcus XQZ, seu QC erit diameter gravitatis hujus arcus (158. §.).*

Demonstratio.

Ex quocunque puncto a axeos QC ducatur chorda pq ad illum perpendicularis, debet haec bissecari in a (Vol. I. §. 438); pro quoque idcirco puncto gravi alterutrius arcus QX, QZ dabitur unum punctum grave in altero arcu, cujus distantia perpendicularis ab axe QC aequetur distantiae perpendiculari prioris puncti ab eodem axe: quodsi ergo cogitur planum LK per axem QC transiens et ad planum, in quo totus arcus XQZ jacere supponitur, perpendicularare; erit summa momentorum singulorum punctorum gravium arcus QX respectu plani LK, aequalis summae

summae momentorum singulorum punctorum gravium arcus QZ respectu plani LK, proinde etiam momentum totius arcus QX aequabitur momento arcus QZ (147. §.). Planum KL erit ergo planum gravitatis arcus XQZ (164. §.): quare, cum etiam planum, in quo totus arcus XQZ jacet, sit unum planum gravitatis ejusdem arcus (166. §.); erit eo ipso axis QC diameter gravitatis hujus arcus (161. §.).

176. Problema.

Data aequatione ad curvam quamcunque XQZ inter abscissas  $z = Qa$  in curvae axe QC jacentes et ordinatas orthogonas  $y = pa$ ; invenire centrum gravitatis arcus pQq subtensi a chorda pq perpendiculari ad axem QC.

Solutio.

1. Centrum gravitatis arcus pQq debet coincidere cum uno puncto  $\gamma$  axeos QC (175. §.), quod idcirco determinabitur inventa ejus distantia Q $\gamma$  a curvae vertice Q.

2. Quamobrem sit arcus pQ =  $\phi$ , pQq = M =  $2\phi$ , et  $\mu$  momentum arcus M respectu plani MN perpendicularis in Q ad planum curvae XQZ axemque QC; erit

$$\epsilon M = 2\epsilon\phi = 2\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)} \text{ per (Vol. I. §. 469.);}$$

$$\epsilon\mu = z\epsilon M = 2z\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)} \text{ per (171. §.).}$$

3. Porro clarum est, tam massam M = pQq, quam ejus momentum  $\mu$  respectu plani MN debere aequari nihilo, si fiat  $z = Qa = 0$ : formulae ergo differentiales in (2) debebunt dare integralia M,  $\mu$  singula = 0 pro  $z = 0$ , unde constantium inventio pendet (Vol. I. §. 238.).

4. Quodsi autem integralia M,  $\mu$  perfecte fuerint determinata, determinabitur per illa etiam distantia Q $\gamma$  (1) centri gravitatis  $\gamma$  a puncto Q, nimirum  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$  (168. §.), cujus generalis expressio erit hoc casu

$$Q\gamma = \frac{\int z\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}}{\int \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}}.$$

177. Corollarium 1.

Sit pQq arcus circuli ex centro C radio CQ = r descripti; debet ejus centrum gravitatis  $\gamma$  jacere in radio CQ bissecante tam chordam pq = 2y, quam arcum pQq; illius autem distantia Q $\gamma$  a puncto Q in-

venietur hoc modo. Pro momento  $\mu$  arcus  $pQq = M$  respectu plani  $MN$ , et  $z = Qa$ , adeoque  $y^2 = 2rz - z^2$  fiet

$$\varepsilon y = \frac{(r-z)\varepsilon z}{y}; \quad \text{hinc } z\varepsilon z = r\varepsilon z - y\varepsilon y;$$

$$\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)} = \frac{r\varepsilon z}{y};$$

igitur erit per (176. §. 3. n.)

$$\varepsilon M = \frac{2r\varepsilon z}{y}; \quad \varepsilon \mu = \frac{2rz\varepsilon z}{y} = r\varepsilon M - 2r\varepsilon y;$$

hinc  $\mu = rM - 2ry$  pro  $M = pQq$ .

Per (176. §. 4. n.) habebimus

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = r - \frac{2ry}{M}.$$

### 178. Corollarium 2.

Distantiã centri gravitatis  $\gamma$  arcus circularis  $pQq$ , ab hujus centro magnitudinis  $C$  erit  $C\gamma = CQ - Q\gamma$ : igitur per (177. §.)  $C\gamma = \frac{2ry}{pQq}$ , hinc  $pQq : pq = CQ : C\gamma$ , id est: Distantiã centri gravitatis  $\gamma$  arcus circularis  $pQq$  est quarta geometrice proportionalis ad arcum, ejus chordam, et radium.

### 179. Corollarium 3.

Posita chorda  $zy = pq = XZ = zr$ , abibit arcus circularis  $pQq$  in semiperipheriam  $XQZ = r\pi$ , denotante  $1:\pi$  rationem radii ad semiperipheriam (Vol. I. §. 5. Schol.), quem significatum pro  $\pi$  ubique in sequentibus retinebimus: distantiã centri gravitatis  $\gamma$  semiperipheriæ circularis  $XQZ$  ab hujus centro magnitudinis  $C$  debet ergo aequari duplo quadrato radii diviso per ipsam semiperipheriam, seu radio ducto in numerum  $\frac{2}{\pi}$ , nimirum erit (178. §.)

$$C\gamma = \frac{2r^2}{XQZ} = \frac{2r}{\pi}.$$

Et pro integra peripheria  $M$  circuli, quo casu fit chorda  $zy = 0$ , erit in (177. §.)  $Q\gamma = r$ , id est: centrum gravitatis peripheriæ circularis coincidit cum ejus centro magnitudinis.

180. Corollarium 5.

Hac ratione poterit solutio praecedentis problematis ad alias quoque curvas adplicari. Sit pQq arcus parabolae, ad quam est aequatio  $y^2 = pz$  (Vol. I. §. 508); erit

$$2y \varepsilon y = p \varepsilon z; \varepsilon y = \frac{p \varepsilon z}{2y} = \frac{p^{\frac{1}{2}} \varepsilon z}{2z^{\frac{1}{2}}};$$

$$\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)} = \frac{\varepsilon z}{2z^{\frac{1}{2}}} \sqrt{(p + 4z)}.$$

Adeoque per (176. §. 2. n.) fiet

$$\varepsilon M = \frac{\varepsilon z}{2z^{\frac{1}{2}}} \sqrt{(p + 4z)}; \varepsilon \mu = \frac{z^{\frac{1}{2}} \varepsilon z}{2} \sqrt{(p + 4z)}.$$

Quamobrem, si capias integralia algebraico-logarithmica M,  $\mu$  per (Vol. I. §. 303. 289), quantitatesque constantes juxta (176. §. 3. n.) determines; obtinebis distantiam  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$  centri gravitatis  $\gamma$  arcus parabolici pQq ab ejus vertice Q.

181. Corollarium 6.

Sic quoque, si pQq sit arcus ellipseos vel hyperbolae, determinetur  $\varepsilon y$  ex aequatione  $y^2 = pz - \frac{p z^2}{a}$  vel  $y^2 = pz + \frac{p z^2}{a}$  (Vol. I. §. 540. 564.), tum, substituto eo valore loco  $\varepsilon y$  in (176. §. 2. n.), quaerantur integralia,  $\mu, M$  per (176. §. 3. n.): erit enim  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$  distantia centri gravitatis arcus pQq ellipseos vel hyperbolae ab ejusdem vertice Q (176. §. 4. n.).

182. Corollarium 7.

Pro arcu  $M = pQq$  (32. Fig.) cycloidis erit  $\varepsilon y = \varepsilon z \sqrt{\frac{2r - z}{z}}$  Fig. 32. (Vol. I. §. 609.): igitur fiet in (176. §. 2. n.)

$$\varepsilon M = 2\varepsilon z \sqrt{\frac{2r}{z}}; \quad \varepsilon \mu = 2z \varepsilon z \sqrt{\frac{2r}{z}}.$$

Quamobrem integrando per (176. §. 3. n.) inveniemus

$$M = 4\sqrt{2rz}; \quad \mu = \frac{4}{3}\sqrt{2rz^3}.$$

Distantia centri gravitatis  $\gamma$  arcus  $pQq$  cycloidis a vertice  $Q$  pro quavis abscissa  $z=Qa$  erit ergo ob (176. §. 4. n.)  $Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{1}{3}z$ ; unde pro  $z=Qc=2r$  reperietur distantia centri gravitatis  $\gamma$  totius cycloidis  $XQZ$ , nimirum  $Q\gamma = \frac{2}{3}r$ , seu aequalis duabus tertiis partibus radii  $r=Qc$  circuli genitoris.

## 183. Theorema.

Fig. 33. Si centra gravitatis  $e, \dots a, b, \dots x$  (33. Fig.) omnium in dato plano vel corpore gravi  $ApCqA$  cogitabilium et inter se parallelarum sectionum  $df, \dots pq, rs, \dots uv$  in una recta  $AC$  jaceant; jacebit quoque in eadem recta centrum gravitatis totius plani vel corporis  $ApCqA$ , adeoque  $AC$  erit illius diameter gravitatis (158. §.).

1. Sit  $mn$  unum planum, in quo jaceat recta  $AC$ : erit  $mn$  commune planum gravitatis singularum sectionum gravium  $df, \dots pq, rs, \dots uv$  inter se parallelarum, quae in dato plano vel corpore  $ApCqA$  possunt cogitari (158. §.); singulaeque sectiones dividuntur ab eodem plano in partes  $de$  et  $ef, \dots pa$  et  $aq, rb$  et  $bs, \dots ux$  et  $xv$ , quarum quaevis binae inter se habebunt aequalia momenta respectu plani  $mn$  (163. §.): igitur erit summa momentorum ex parte  $AqC$  plani  $mu$  aequalis summae momentorum ex parte opposita  $ApC$ , seu planum  $mn$  dirimet datum planum vel corpus  $ApCqA$  in duas partes, quarum momenta respectu ejusdem plani erunt inter se aequalia (147. §.).

2. Quotcunque igitur plana  $mn$ , quarum communis intersectio sit recta  $AC$ , cogitentur transire per datum planum vel corpus grave  $ApCq$ ; erit quodvis illorum unum planum gravitatis massae  $ApCqA$  ob (1) per (164. §.), eoque ipso est recta  $AC$  una diameter gravitatis ejusdem massae (161. §.).

## 184. Problema.

Fig. 34. Invenire centrum gravitatis dati cujuscunque trianguli rectilinei  $ABC$  (34. Fig.).

## Solutio.

Bissectis duobus lateribus  $AC, BC$  in  $b, a$ , ducantur ex verticibus  $B, A$  angulorum oppositorum rectae  $Bb, Aa$ ; debet recta  $Bb$  quamlibet cogitabilem sectionem trianguli  $ABC$  lateri  $AC$  parallelam, et  $Aa$  quamvis ejus sectionem parallelam lateri  $BC$  bissecare: rectae  $Bb, Aa$  erunt

erunt ergo duae diametri gravitatis trianguli ABC (183. §.), cujus centrum gravitatis debebit idcirco esse punctum intersectionis g rectarum Bb, Aa (160. §.).

Ducatur jam ex b parallela bβ ad Aa; erunt triangula CAa, Cbβ inter se similia; hinc, ob Cb = ½ CA, etiam bβ = ½ Aa, et Cβ = ½ Ca = ½ BC, Bβ = ¾ BC: quomobrem in triangulis similibus Bga, Bbβ habebimus Bβ:Ba = bβ:ga, seu ¾ BC:½ BC = ½ Aa:ga = ⅓ Aa.

## 185. Corollarium 1.

Centrum gravitatis cujuslibet trianguli rectilinei ABC jacet in puncto g rectae Aa ex vertice A cujuscunque anguli ad punctum medium a lateris oppositi BC ductae, ita ut ejus distantia ga a puncto a aequetur uni tertiae, distantia vero Ag a puncto A aequalis sit duabus tertiis totius rectae Aa, nimirum ga = ⅓ Aa, et gA = ⅔ Aa (184. §.).

## 186. Corollarium 2.

Hinc pendet inventio centri gravitatis cujuslibet quadrilateri ABCD Fig. 35. (35. Fig.). Si enim ducta diagonali AC, ductisque ad ejus medium punctum c rectis Bc, Dc, hae ipsae rectae dividantur in tres partes aequales, quo fiat Ba = ⅔ Bc et Db = ⅔ Dc; erunt puncta a, b centra gravitatis triangulorum ABC, ADC (185. §.): determinatis ergo eorundem areis, et ducta recta ab, inveniatur centrum gravitatis d quadrilateri ABCD, si recta ab ita fecetur in d, ut fit (167. 154. §.).

$$ad = \frac{ab \cdot ADC}{ABC + ADC}; \quad bd = \frac{ab \cdot ABC}{ABC + ADC}$$

Secus poterunt in hac determinatione puncti d areis ABC, ADC substitui perpendiculara Bq, Dp ad diagonalem AC demissa: cum enim sit ABC:ADC = Bq:Dp, hinc ABC =  $\frac{ADC \cdot Bq}{Dp}$ ; erit etiam

$$ad = \frac{ab \cdot ADC}{\frac{ADC \cdot Bq}{Dp} + ADC}; \quad bd = \frac{ab \cdot \frac{ADC \cdot Bq}{Dp}}{\frac{ADC \cdot Bq}{Dp} + ADC};$$

$$\text{seu } ad = \frac{ab \cdot Dp}{Bq + Dp}; \quad bd = \frac{ab \cdot Bq}{Bq + Dp}$$

## 187. Corollarium 3.

Geometrice determinabis centrum gravitatis quadrilateri ABCD, si, determinatis centris gravitatis a, b triangulorum ABC, ADC per (185. §.) ductaque recta ab, et ductis ad diagonalem AC perpendicularibus Bq, Dp, ducas rectam indefinitam bβ sub quocunque angulo abβ, tum in hac capias bn=Bq, mn=Dp: si enim ex m ducas ad a rectam ma, et huic ex n parallelam nd; debebit nd rectam ab secare in centro gravitatis quadrilateri ABCD, ob bm:bn=ab:bd, adeoque

$$bd = \frac{ab \cdot bn}{bm} = \frac{ab \cdot Bq}{Bq + Dp} \quad (186. \text{§.})$$

## 188. Corollarium 4.

In multis casibus habebit datum quadrilaterum ABCD duo latera parallela CB, AD, quae perpendicularibus Bq, Dp in (186. 187. §.) poterunt substitui. Cum enim in hac hypothesi sit Bq:Dp=BC:AD, hinc Bq + Dp:Bq=BC + AD:BC; poterit in (186. 187. §.) summi BC loco Bq, AD loco Dp, et BC + AD loco Bq + Dp.

## 189. Corollarium 5.

Quodsi vero quaevis bina latera opposita BC et AD, DC et AB, fuerint inter se parallela; jacebunt rectae Bc, Dc, ab in una recta BcD, et centrum gravitatis d coincidit cum puncto medio rectae BcD in (186. §.): centrum gravitatis cujuslibet parallelogrammi ABCD (36. Fig.) est itaque punctum c, in quo ejus diagonales AC, BD sese interfecant.

## 190. Corollarium 6.

Fig. 37. Si quaeras centrum gravitatis dati cujuscunque polygoni irregularis, ut ABCDEFA (37. Fig.), resolve illud in triangula per diagonales AE, AD, BD, tum, determinatis singulorum triangulorum centris gravitatis a, b, c, d per (185. §.), et areis, quaere per (167. 157. §.) commune centrum gravitatis omnium triangulorum.

## 191. Theorema.

*Centrum gravitatis cujuslibet polygoni regularis coincidit cum illius centro magnitudinis.*

Demon-

## Demonstratio.

Si cogitetur unum planum perpendicularare ad planum dati polygони regularis transire per illius centrum magnitudinis, et unum angulum perimetri ejusdem polygони bissecare; dividetur polygonum in duas partes inter se similes et aequales, proinde perfecte congruentes, eundemque respectu plani secantis situm habentes; centra idcirco gravitatis harum partium in iisdem jacebunt distantis a plano secante: producta ergo ex areis aequalibus earundem partium dati polygони in distantias centrorum gravitatis a plano secante, seu momenta partium polygони respectu plani secantis erunt inter se aequalia (150. §.), proinde erit planum secans unum planum gravitatis dati polygони regularis (163. §.). Quodsi vero omnia plana ad planum dati polygони regularis perpendicularia, et quoscunque angulos illius perimetri bissecantia sint plana gravitatis ipsius polygони, quia etiam planum in quo totum polygonum jacet, est illius planum gravitatis (166. §.); necesse est, ut omnes rectae quoscunque angulos perimetri bissecantes sint diametri gravitatis ejusdem polygони (161. §.), quae omnes, sicut in illius centro magnitudinis, ita quoque in ejusdem centro gravitatis sese debent interfecare (160. §.).

## 192. Problema.

Data aequatione ad curvam XQZ (31. Fig.) inter abscissas  $z = Qa$  Fig. 31. in ejus axe QC computatas, et ordinatas orthogonas  $y = pa$ , invenire centrum gravitatis spatii pQqap = M inter arcum pQq et chordam pq ad axem QC perpendiculararem comprehensi.

## Solutio.

1. Centrum gravitatis spatii pQqap erit certum punctum  $\gamma$  axeos QC (183. §.), cujus inventio pendet ab inventionione distantiae Q $\gamma$  a curvae vertice Q.

2. Cum jam M denotet massam segmenti pQqap, si praeterea vocetur  $\mu$  ejus momentum respectu plani MN in Q ad QC perpendicularis; debet esse (168. §.)  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ .

3. Porro pro  $S = Qpa$  est  $M = 2S$ , et  $\epsilon S = y \epsilon z$  (Vol. I. §. 488),  $\epsilon M = 2 \epsilon S$ : ob (171. §.) debet ergo poni

$$\epsilon M = 2 y \epsilon z; \quad \epsilon \mu = 2 y z \epsilon z.$$

4. Ab integratione horum exponentium differentialium pendet itaque inventio tam massæ  $M = p Q q a p$ , quam ejus momenti  $\mu$  respectu plani  $MN$ ; clarum vero est, pro abscissa  $z = Qa = 0$ , vel ordinata  $y = pa = 0$ , debere fieri tam  $M = 0$ , quam  $\mu = 0$ , unde sequitur, integralia eorundem exponentium sic esse determinanda, ut quodvis illorum aequetur nihilo, seu fiat  $z = 0$ , seu  $y = 0$ .

5. Inventis autem integralibus  $M$ ,  $\mu$ , inveniatur eo ipso etiam distantia  $Q\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  (1) per (2), cujus generalis expressio erit ob (3)

$$Q\gamma = \frac{\int 2y z \varepsilon z}{\int 2y \varepsilon z} = \frac{\int y z \varepsilon z}{\int y \varepsilon z}.$$

### 193. Problema.

Fig. 38. *Invenire centrum gravitatis segmenti p Q q a p (38. Fig.) circuli radio  $CQ = r$  descripti.*

### Solutio.

Centrum gravitatis segmenti  $M = p Q q a p$  coincidet cum puncto  $\gamma$  radii  $CQ = r$  perpendicularis ad chordam  $p q$ , et ejus distantia a puncto  $Q$  erit  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$  (192. §. 2. n.). Verum pro  $y = pa$ , et  $z = Qa$  est  $y^2 = 2rz - z^2$  aequatio ad circulum, ex qua obtinebimus

$$y = \sqrt{(2rz - z^2)}; \quad \varepsilon y = \frac{(r - z) \varepsilon z}{y};$$

et  $z \varepsilon z = r \varepsilon z - y \varepsilon y$ .

In (192. §. 3. n.) debeat ergo hoc casu poni

$$\varepsilon M = 2y \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = 2ry \varepsilon z - 2y^2 \varepsilon y;$$

adeoque integrando per (192. §. 4. n.) inveniemus

$$\mu = r \int 2y \varepsilon z - \frac{2}{3} y^3 = rM - \frac{2}{3} y^3.$$

Quare cum area segmenti  $p Q q a p$  sit

$$M = \frac{1}{2} r \cdot p Q q - y \sqrt{(r^2 - y^2)};$$

erit distantia centri gravitatis  $\gamma$  a puncto  $Q$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = r - \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{p Q q \cdot r - 2y \sqrt{(r^2 - y^2)}},$$

ubi  $p Q q$  est arcus segmenti  $p Q q a p$ .

## 194. Corollarium 1.

Distantia  $C\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  segmenti circularis  $pQq$  a  $p$  a centro  $C$  circuli, ob  $C\gamma = r - Q\gamma$ , erit per (193. §.)

$$C\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{y^3}{pQq \cdot r - 2y\sqrt{(r^2 - y^2)}}$$

## 195. Corollarium 2.

Pro chorda  $2y = 2r$  in (194. §.) obtinebitur distantia centri gravitatis  $\gamma$  semicirculi  $XQZCX$  (39. Fig.) radio  $CX = r$  descripti ab ejus centro  $C$  per semiperipheriam  $XQZ$ , nimirum Fig. 39.

$$C\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^2}{XQZ} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

## Scholion.

Si super radio  $XC = QC = r$  quadratrix dinonstratis cogitetur describi, origine in  $X$  sumta; debet illa terminari in centro gravitatis  $\gamma$  semiperipheriae  $XQZ$  circuli radio  $r$  descripti, per (179. §.) et (Vol. I. 602. §.). Proprietatem hanc quadratricis *Guidinus* in sua *Centro-Baryca*, Cap. VI. primus notavit: verum hanc ipsam proprietatem habet etiam cyclois vulgaris, quae super diametro  $XZ$  potest describi. Semibasis enim  $XC$  hujus cycloidis debet aequari semiperipheriae circuli genitoris (Vol. I. 607. §.): diameter circuli genitoris ejusdem cycloidis debet ergo esse  $= \frac{2 \cdot XC}{\pi}$ , adeoque aequalis distantiae  $C\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  semiperipheriae circularis  $XQZ$  ab ejusdem centro  $C$  (179. §.). Altera vero proprietas cycloidis super diametro  $XZ$  descriptae, et, ut vidimus, transeuntis per centrum gravitatis  $\gamma$  semiperipheriae circularis  $XQZ$ , in eo consistit, quod centrum gravitatis ejusdem cycloidis cum centro gravitatis areae semicircularis  $XQZCX$  coincidat: cum enim, ut ostendimus, sit  $\frac{2 \cdot XC}{\pi}$  diameter illius circuli genitoris; erit  $\frac{4}{3} \cdot \frac{XC}{\pi}$  distantia centri gravitatis ejusdem cycloidis a puncto  $C$  (182. §.), aequalis distantiae centri gravitatis areae semicirculi  $XQZ$  ab eodem puncto  $C$  (195. §.).

## 196. Corollarium 3.

Et pro  $z = 2r$ , hinc  $y = 0$  erit  $Q\gamma = r$  et  $C\gamma = 0$  (193. 194. §.), id est: centrum gravitatis integri circuli coincidit cum illius centro magnitudinis.

## 197. Corollarium 4.

Fig. 40. Datis chordis  $rs=2c$ ,  $pq=2C$  (40. Fig.) in circulo radii  $CX=r$  jacebit centrum gravitatis  $\alpha$  spatii  $rsqp$  inter chordas parallelas  $rs$ ,  $pq$  comprehensi in radio  $CQ$  eadem bissecante in  $b$ ,  $a$ ; distantia vero illius a centro  $C$  determinabitur hoc modo. Si  $\gamma$ ,  $\delta$  sint centra gravitatis segmentorum  $pQqap$ ,  $rQsbr$ ; debet esse per (155. §.)

$$C\alpha = \frac{C\gamma \cdot pQqap - C\delta \cdot rQsbr}{pqsr}$$

Quare, si per datas chordas  $2c$ ,  $2C$ , datumque radium  $r$  exprimantur tam areae segmentorum  $pQqap$ ,  $rQsbr$ ,  $pqsr = pQqap - rQsbr$ , quam distantiae  $C\gamma$ ,  $C\delta$  juxta (194 §.), prodibit, peracta substitutione et reductione, sequens expressio

$$C\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{C^3 - c^3}{r \cdot qs + c\sqrt{(r^2 - c^2)} - C\sqrt{(r^2 - C^2)}}$$

Si autem distantiam centri gravitatis  $\alpha$  areae  $pqsra$  a puncto  $a$  defideres; invenies illam subtractione distantiae  $Ca = \sqrt{(r^2 - C^2)}$  ab inventa distantia  $C\alpha$ .

## 198. Corollarium 5.

Fig. 41. Pro  $2C=2r$  in (197. §.) invenietur distantia  $C\alpha$  centri gravitatis  $\alpha$  spatii  $rsZX$  (41. Fig.) inter diametrum  $XZ$  circuli et chordam  $rs=2c$  ei parallelam comprehensi a centro  $C$  magnitudinis ejusdem circuli, nimirum

$$C\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{r^3 - c^3}{r \cdot sZ + c\sqrt{(r^2 - c^2)}}$$

## 199. Corollarium 6.

Fig. 42. Datis centris gravitatis  $\gamma$ ,  $\beta$  (42. Fig.) segmenti  $pQqap$  et trianguli  $Cpq$ , invenietur in radio  $CQ$  bissecante chordam  $pq=2y$  centrum gravitatis  $\alpha$  sectoris  $CpQqC$  circuli radio  $CQ=r$  descripti, determinata per (167. 154 §.) ejus distantia a centro  $C$ , nimirum

$$C\alpha = \frac{C\gamma \cdot pQqap + C\beta \cdot Cpq}{pQqap + Cpq}$$

Cum enim fit  $Ca = \sqrt{(r^2 - y^2)}$ , et  $C\beta = \frac{2}{3}Ca$  (185. §.), determinata area trianguli  $Cpq = y\sqrt{(r^2 - y^2)}$ , determinataque area segmenti  $pQqap$ ,

pQqap, et distantia Cy illius centri gravitatis  $\gamma$  a centro C per (194. §.);  
debebit esse

$$C\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{r\gamma}{pQq}.$$

denotante pQq arcum sectoris.

### 200. Corollarium 7.

Si  $\gamma$  effet centrum gravitatis arcus pQq, fieret  $C\gamma = \frac{2r\gamma}{pQq}$  (178. §.);  
hinc  $C\alpha = \frac{2}{3}C\gamma$  (199. §.), id est: distantia centri gravitatis  $\alpha$  cujuslibet  
sectoris CpQqC ab ejus centro magnitudinis C aequatur duabus tertiis  
distantiae centri gravitatis  $\gamma$  arcus pQq ab eodem centro C.

### 201. Corollarium 8.

Si desideretur centrum gravitatis v spatii abed (43. Fig.) inter arcus Fig. 43.  
concentricos ab, de radiis Cd=Ce=r, Ca=Cb=R descriptos com-  
prehensi; jacebit illud in puncto v radii Cm bissecantis arcus ab, de,  
ita, ut si x, u dicantur esse centra gravitatis sectorum Cab, Cde, illius  
distantia a centro C debeat esse per (167. 155. §.)

$$Cv = \frac{Cx \cdot aCb - Cu \cdot Cde}{aCb - Cde}.$$

Hinc, si  $2c, 2C$  sint chordae subtendentes arcus de, ab, obtine-  
bimus per (199. §.)

$$Cx = \frac{4RC}{3 \cdot ab}; \quad Cu = \frac{4rc}{3 \cdot de};$$

$$aCb = \frac{1}{2}R \cdot ab; \quad dCe = \frac{1}{2}r \cdot de;$$

$$Cv = \frac{4}{3} \cdot \frac{CR^2 - cr^2}{ab \cdot R - de \cdot r} = \frac{4C}{3 \cdot ab} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

### 202. Corollarium 9.

Centrum gravitatis v dimidii annuli AMBENDA (44 Fig.) radio- Fig. 44.  
rum CD=r, CA=R jacebit in radio Cm ipsum bissecante in distantia  
a centro C (201. §.).

$$Cv = \frac{4R}{3 \cdot AmB} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

## 203. Problema.

Fig. 31. *Invenire centrum gravitatis  $\gamma$  spatii pQq (31. Fig.) inter arcum pQq parabolae, et chordam pq illius axi QC perpendiculararem comprehensi.*

Solutio.

Sit  $M = pQqap$  area dati spatii pro  $z = Qa$ ,  $y = pa$ : cum debeat esse  $y = p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}}$  (Vol. I. §. 508); erit in (192. §. 3. n.)

$$\epsilon M = 2 p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}} \epsilon z; \quad \epsilon \mu = 2 p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}} \epsilon z.$$

Peracta igitur integratione per (192. §. 4. n.), inveniatur distantia centri gravitatis  $\gamma$  segmenti pQqap ab ejus vertice Q per (192. §. 2. n.)

$$Q \gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{2}{3} z = \frac{2}{3} Qa.$$

## 204. Problema.

*Invenire centrum gravitatis  $\gamma$  spatii pQqap inter arcum pQq ellipsos et chordam pq ejus axi transverso QC perpendiculararem comprehensi.*

Solutio.

Pro  $Qa = z$ ,  $pa = y$  est in ellipsi (Vol. I. 540. §.)  $y = \sqrt{(pz - \frac{pz^2}{a})}$ ; igitur debet poni in (192. §. 3. n.)

$$\epsilon M = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot z^{\frac{1}{2}} \epsilon z \sqrt{(a-z)};$$

$$\epsilon \mu = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot z^{\frac{3}{2}} \epsilon z \sqrt{(a-z)}.$$

Captis integralibus per (Vol. I. §. 289. 301.), et determinatis constantibus juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. §. 238), reperiemus

$$M = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{4} (2z-a) \sqrt{(az-z^2)} \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z-a}{a} + \frac{\pi a^2}{16} \right);$$

$$\mu = \frac{2p^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \left( -\frac{1}{3} \sqrt{(az - z^2)^3} + \frac{a(2z - a)}{8} \sqrt{(az - z^2)} \right. \\ \left. + \frac{a^3}{16} \text{Arc Sin } \frac{2z - a}{a} + \frac{\pi a^3}{32} \right).$$

Quamobrem, si  $\mu$  dividamus per  $M$ , obtinebimus hinc distantiam  $Q\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  spatii elliptici  $pQqap$  pro quavis abscissa  $z = Qa$  ob (192. §. 2. n.).

## 205. Corollarium 1.

Si abscissa  $z = Qa = \frac{1}{2}a$  aequetur femiaxi transverso ellipseos; erit  $pQqap$  dimidia area ellipseos, et distantia illius centri gravitatis  $\gamma$  a vertice  $Q$  erit  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$  posita abscissa  $z = \frac{1}{2}a$  in (204. §.); unde determinari potest etiam ejus distantia a centro  $a$  ellipseos, ob  $a\gamma = Qa - Q\gamma = \frac{1}{2}a - Q\gamma$ ; nimirum erit

$$Q\gamma = \frac{a(3\pi - 4)}{6\pi}; \quad a\gamma = \frac{2a}{3\pi}.$$

Centrum ergo gravitatis  $\gamma$  semiellipseos  $pQqap$  coincidit cum centro gravitatis semicirculi  $rQsar$ , qui super axe conjugato  $pq$  utrinque producto e centro ellipseos a radio  $aQ$  aequali femiaxi transverso potest describi (195. §.).

## 206. Corollarium 2.

Hoc modo licebit etiam quaerere distantiam  $Q\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  spatii  $pQqap$  inter arcum  $pQq$  hyperbolae, et chordam  $pq$  illius axi transverso  $QC$  perpendiculararem comprehensi. Cum enim, pro  $z = Qa$ ,  $y = pa$ , in hyperbola sit  $y = \sqrt{(pz + \frac{pz^2}{a})}$  ob (Vol. I. §. 564.); debet esse in (192. §. 3. n.)

$$\varepsilon M = \frac{2p^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{3}{2}} \varepsilon z \sqrt{(a+z)};$$

$$\varepsilon \mu = \frac{2p^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{3}{2}} \varepsilon z \sqrt{(a+z)};$$

quodsi ergo determines integralia algebraico-logarithmica  $M$ ,  $\mu$  juxta (192.

(192. §. 4. n.) per (Vol. I. 301. 238. §.), tum dividas  $\mu$  per  $M$ ; dabit quotiens distantiam  $Q\gamma$  per (192. §. 2. n.).

## 207. Problema.

Fig. 45. *Invenire centrum gravitatis  $\gamma$  spatii pQqap (45. Fig.) inter arcus pQ, qQ cissoidis et chordam pq illius axi QC perpendicularem comprehensi.*

## Solutio.

Pro abscissa  $z = Qa$ , ordinata  $y = pa$ , et axe cissoidis  $QC = a$  est  
 $y = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-z}}$  per (Vol. I. §. 584): in (192. §. 3. n.) debet ergo poni

$$\epsilon M = \frac{2z^{\frac{3}{2}} \epsilon z}{\sqrt{a-z}}; \quad \epsilon \mu = \frac{2z^{\frac{3}{2}} \epsilon z}{\sqrt{a-z}}.$$

Si jam hi exponentes differentiales juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. §. 302. 287.) integrentur, fiet

$$M = \frac{3a^2 \pi}{8} + \frac{3a^2}{4} \text{Arc Sin } \frac{2z-a}{a} \\ - \frac{1}{2}(2z+3a)\sqrt{(az-z^2)}; \\ \mu = \frac{5a^3 \pi}{16} + \frac{5a^3}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z-a}{a} \\ - \frac{1}{2}(8z^2+10az+15a^2)\sqrt{(az-z^2)}.$$

Consequenter, diviso momento  $\mu$  per massam  $M$ , invenietur distantia  $Q\gamma$  juxta (192. §. 2. n.) centri gravitatis  $\gamma$  spatii pQqap a cuspide Q cissoidis pro quavis abscissa  $z = Qa$ .

## 208. Corollarium.

Constat, rectam PR ad axem  $QC = a$  cissoidis perpendicularem esse asymptotum, cui rami QS, QT nusquam possunt occurrere, licet ii, quo magis producantur, eo propius ad PR debeant accedere (Vol. I. §. 583.): quodsi igitur supponas, ramos QS, QT asymptoto PR in punctis P, R, quorum distantiae a puncto C sint indefinite magnae, occurrere; obtinebitur pro  $z = QC = a$  distantia  $Q\gamma = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}QC$  centri gravitatis  $\gamma$  totius spatii inter ramos QS, QT et asymptotum PR comprehensi a cuspide Q cissoidis.

## 209. Problema.

Dato radio  $r$  circuli genitoris  $QbCdQ$  (32. Fig.) cycloidis  $XQZ$ , in Fig. 32. venire centrum gravitatis  $\gamma$  spatii  $pQqap$  inter arcum  $pQq$  et chordam  $pq$  axi  $QC$  perpendicularem comprehensi.

## Solutio.

1. Sumta pro  $z = Qa$ ,  $y = pa$  aequatione ad cycloidem (Vol. I. §. 606.), debeat esse in (192. §. 3. n.)

$$M = 2f\epsilon z \sqrt{(2rz - z^2)} + 2rf\epsilon z \text{ Arc Sin } v \frac{z}{r};$$

$$\mu = 2fz\epsilon z \sqrt{(2rz - z^2)} + 2rfz\epsilon z \text{ Arc Sin } v \frac{z}{r}.$$

2. Quodsi autem alteram partem utriusque integralis resolvas per (Vol. I. §. 257.); invenies in (1)

$$M = 2rz \text{ Arc Sin } v \frac{z}{r} + 2 \int z^{\frac{1}{2}} \epsilon z \sqrt{(2r - z)}$$

$$- 2r \int \frac{z^{\frac{1}{2}} \epsilon z}{\sqrt{(2r - z)}};$$

$$\mu = rz^2 \text{ Arc Sin } v \frac{z}{r} + 2 \int z^{\frac{3}{2}} \epsilon z \sqrt{(2r - z)}$$

$$- r \int \frac{z^{\frac{3}{2}} \epsilon z}{\sqrt{(2r - z)}}.$$

3. Si demum binas posteriores partes utriusque integralis in (2) juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. 289. 302. 301. §.) determines, obtinebis

$$M = (z + r) \sqrt{(2rz - z^2)} + r(2z - r) \text{ Arc Sin } v \frac{z}{r}.$$

$$\mu = \frac{17rz - 4z^2 + 3r^2}{6} \sqrt{(2rz - z^2)} + \frac{1}{2} r(2z^2 - r^2) \text{ Arc Sin } v \frac{z}{r}.$$

Hinc, si  $\mu$  dividatur per  $M$ , derivabitur distantia  $Q\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  spatii  $pQqap$  pro quavis abscissa  $z = Qa$  (192. §. 2. n.).

## 210. Corollarium.

Pro integra cycloide  $XQZ$  debet in (209. §.) poni  $z = QC = 2r$ , hinc  $M = 3r^2 \cdot \pi$ ,  $\mu = \frac{1}{2} r^3 \cdot \pi$ ; distantia centri gravitatis  $\gamma$  spatii  $XQZCX$  a vertice  $Q$  erit ergo

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{1}{6} r = \frac{1}{3} QC.$$

## 211. Theorema.

Fig. 46. Si ex centris gravitatis  $G, g$  (46. Fig.) duorum triangulorum similium  $ABC, abc$  ad puncta extrema  $B, C, b, c$ , laterum homologorum  $BC, bc$  ducantur rectae  $GB, GC, gb, gc$ ; erunt triangula  $GBC, gbc$  inter se similia.

## Demonstratio.

Si rectae  $BG, CG, bg, cg$  producantur, debebunt illae bifsecare latera  $AC, AB, ac, ab$  in  $E, D, e, d$ , (185. §.): erit ergo  $AC:ac = EC:ec$ , et  $AB:ab = AD:ad$ . Quare, cum in triangulis similibus  $Abc, abc$ , sit angulus  $A=a, C=c$ , et  $AC:ac = AB:ab, BC:bc = AC:ac$ ; debet etiam esse  $AC:ac = AD:ad$ , et  $BC:bc = EC:ec$ : sunt ergo etiam triangula  $ADC$  et  $adc, BEC$  et  $bec$  inter se similia; proinde est angulus  $ACD=acd$ , et  $EBC=ebc$ , et eo ipso etiam angulus  $GCB=gcb$ , et triangulum  $BGC$  est simile triangulo  $gbc$ .

## 212. Theorema.

Si rectae ex centris gravitatis quorumvis duorum polygonorum similium constantium  $n$  lateribus ad puncta extrema duorum laterum homologorum ductae comprehendant triangula inter se similia; necesse est, ut hac ipsa proprietate etiam polygona similia constantia uno pluribus lateribus gaudeant.

## Demonstratio.

Fig. 47. 1. Imaginemur nobis in (47. Fig.) duo polygona similia  $ABCDEFGA, abcdefga$ , quorum quodvis habeat latera numero  $n+1$ , et centra gravitatis eorundem polygonorum sint  $Q, q$ , duo vero quaecunque latera homologa  $DE, de$ : demonstrandum est, quod, si ducantur rectae  $QD, QE, qd, qe$ , triangula  $QDE, qde$  in assumpta hypothesi debeant esse inter se similia.

2. Ductis rectis  $DF, df$  nascentur duo polygona similia  $ABCDFFGA, abcdffga$  constantia ob (1) lateribus numero  $n$ , et triangula similia  $DFE, dfe$ .

3. Quamobrem, si  $P, p$  sint centra gravitatis polygonorum (2), et ducantur rectae  $PD, PF, pd, pf$ ; erunt per hypothese[m] triangula  $PDF, pdf$  inter se similia.

4. Por-

4. Porro sint  $R, r$  centra gravitatis triangulorum  $DFE, dfe$ ; erunt triangula  $DRE, dre$  per (211. §.) inter se similia.

5. Ductis autem inter centra gravitatis  $P, R, p, r$  (1) (4) rectis  $PR, pr$ , jacebunt centra gravitatis  $Q, q$  (1) in iisdem rectis, ita ut sit per (154. §.)

$$QR = \frac{PR \cdot ABCDFGA}{DFE}; \quad qr = \frac{pr \cdot abcdfga}{dfe}$$

igitur debet esse

$$QR:qr = PR:pr = ABCDFG:dfe = abcdfg:DFE.$$

6. Cum autem generatim areae polygonorum similium sint inter se ut quadrata quarumvis dimensionum homologarum; necesse est, ut ob (1) (2) (3) (4) sit  $ABCDG:abcdg = DFE:dfe = DE^2:de^2 = DR^2:dr^2$ , unde et ex (5) obtinebimus

$$QR:qr = PR:pr$$

7. Deinde ob similitudinem triangulorum in (2) (3) (4) erit angulus  $PDR = pdr$ , et  $PD:pd = DF:df = DE:de = DR:dr$ , unde necessario sequitur, etiam triangula  $PDR, pdr$  esse inter se similia, et ideo esse  $DR:dr = PR:pr = QR:qr$  per (6): igitur sunt etiam triangula  $DQR, dqr$ , inter se similia, anguli  $QDR$  et  $qdr$ ,  $DQR$  et  $dqr$ ,  $DRQ$  et  $drq$  sunt inter se aequales, et  $QR:qr = DR:dr = RE:re$  ob (4). Quamobrem, cum sit etiam angulus  $DRE = dre$  (4), hinc  $QRE = qre$ , debent quoque triangula  $QRE, qre$  esse similia.

8. Hinc demum, ob similitudinem triangulorum  $DRE, dre$ , et  $DQR, dqr$ , item  $QRE, qre$  in (4) (7), necessario sequitur similitudo triangulorum  $DQE, dqe$ , quae erat demonstranda (1).

### 213. Corollarium I.

Si rectae  $QD, QE, qd, qe$  ex punctis  $Q, q$ , intra perimetros datorum polygonorum similium assumtis, ductae ad puncta extrema  $D, E, d, e$  duorum laterum homologorum  $DE, de$  comprehendant triangula  $QDE, qde$ ; debent haec triangula esse inter se similia, si puncta  $Q, q$  sint centra gravitatis polygonorum. Cum enim hoc de figuris trium laterum in (211. §.) sit demonstratum, et, ut primum id in figuris quotecunque

laterum locum habet, eo ipso etiam in figuris uno plurium laterum subsistere debeat (212. §.); debet id necessario de quibuslibet cogitabilibus polygonis similibus verum esse (Vol. I. §. 31.).

214. Corollarium 2.

Si ex punctis  $Q, s$  duorum polygonorum similibus ad puncta extrema duorum laterum homologorum ducantur rectae  $QD, QE, sd, se$ , constetque, illas comprehendere triangula similia  $DQE, dse$ , et  $Q$  esse centrum gravitatis polygoni  $ABDFA$ ; erit eo ipso etiam punctum  $s$  centrum gravitatis polygoni  $abdfa$ . Secus jaceret illud in certo puncto  $q$ , essentque triangula  $qde, qse$  ob (213. §.) eidem tertio triangulo  $QDE$ , hinc etiam inter se similia, quod est impossibile.

215. Corollarium 3.

Dato itaque centro gravitatis  $Q$  certi polygoni  $ADF$ , invenies centrum gravitatis  $s$  polygoni  $adf$  priori similis, si, ductis ad extrema puncta  $D, E$  unius lateris  $DE$  rectis  $QD, QE$ , super latere homologo  $de$  construas triangulam  $sde$  simile triangulo  $QDE$  (214. §.).

## DISSERTATIO VII.

DE

## INVESTIGATIONE CENTRI GRAVITATIS IN CORPORIBUS, EORUMQUE SUPERFICIEBUS.

## 216. Theorema.

*Si* ABDC (48. Fig.) sit corpus quodcunque, in quo singulae sectiones mn Fig. 48. basibus AB, CD inter se parallelis et aequalibus pariter parallelae et aequales sua centra gravitatis habeant in recta PQ intercepta inter centra gravitatis P, Q basium AB, CD; erit punctum medium a rectae PQ centrum gravitatis corporis ABDC.

## Demonstratio.

Si per punctum medium a rectae PQ transeat planum MN perpendicularare ad PQ; erit momentum cujusvis sectionis mn respectu plani MN aequale producto ex ipsa sectione mn in distantiam ba puncti b rectae PQ, per quod transit sectio inn, a puncto medio a rectae PQ (150. §.)? cum ergo omnes ejusmodi sectiones sint inter se aequales, et pro qualibet sectione mn cadente ad unam partem plani MN detur una sectio mn jacens ad partem oppositam plani MN in pari distantia ba; necesse est, ut summa momentorum omnium sectionum ex una parte plani MN cogitabilium aequetur summae momentorum omnium sectionum cogitabilium ex parte opposita plani MN. Planum MN dividit itaque totum corpus ABDC in duas partes, quarum momenta respectu ejusdem plani sunt inter se aequalia (147. §.); et ideo est MN planum gravitatis corporis ABDC (163. §.): eapropter, quia PQ est diameter gravitatis ejusdem corporis (183. §.), debet punctum a esse illius centrum gravitatis (162. §.).

## 217. Corollarium I.

Recta PQ intercepta inter centra gravitatis P, Q basium ABCDE, Fig. 49. abcde dati cujuscunque prismatis Bd per (190. §) determinabilia transit per centra gravitatis omnium sectionum prismatis illius basibus parallela-

rum (214. §.): medium ejus punctum  $\alpha$  est ergo centrum gravitatis prismatis Bd (216. §.).

## 218. Corollarium 2.

Bases prismatis regularis sunt polygona regularia, inter quorum centra jacet axis ejusdem prismatis: centrum gravitatis prismatis regularis coincidit ergo cum puncto medio illius axeos (191. 217. §.).

## 219. Corollarium 3.

Fig. 50. Et ob (196. §.) per (216. §.) erit medium punctum  $\alpha$  axeos PQ dati cujuscunque cylindri ABCD (50. Fig.) centrum gravitatis ejusdem cylindri.

## 220. Corollarium 4.

Fig. 51. 52. Sic quoque, si datum corpus sit segmentum cylindricum ABCcab  
53. 54. (51. Fig.) abscissum plano ABba axi cylindri parallelo, vel frustum cylindricum ABCDdabc (52. Fig.) inter plana Ad, Bc axi cylindri parallela interceptum, aut sector cylindricus ABCDdabc (53. Fig.), vel dimidius annulus cylindricus (54. Fig.); coincidet ob (216. §.) centrum gravitatis ejusmodi corporis cum medio puncto  $\alpha$  rectae PQ interceptae inter centra gravitatis P, Q illius basium per (194. 195. 197. 198. 199. 202. §.) determinabilia.

## 221. Problema.

Fig. 55. 56. *Invenire centrum gravitatis datae pyramidis, datique conii ABD (55. 56. Fig.).*

## Solutio.

1. In cono ABD jacet centrum gravitatis cujuslibet sectionis pq parallelae illius basi BD in axe AC (196. §.): in pyramide autem (55. Fig.), si ex centro gravitatis C baseos BD ducatur recta AC ad verticem A, transibit haec recta per unum punctum c cujuslibet sectionis pq parallelae basi BD, quod, quia rectae pc, ce, BC, CE ductae ad puncta extrema laterum homologorum pe, BE comprehendunt triangula pce, BCE similia, debet esse centrum gravitatis sectionis pq (214. §.); adeoque etiam centrum gravitatis cujuslibet sectionis pq parallelae basi BD pyramidis jacet in recta AC inter ejus verticem A et centrum gravitatis C baseos intercepta. In cono et pyramide (56. 55. Fig.) debet ergo ejus centrum gravitatis jacere in recta AC (216. §.).

2. Quam-

2. Quamobrem sumpta parte indeterminata  $z = AC$  in recta  $AC = a$  cogitetur per punctum  $e$  transire sectio  $pq$  parallela basi  $BD$ , quae abscindat ex  $ABD$  partem  $Apq = m$ ; erit, si ponatur tota massa  $ABD = M$

$$m : M = z^3 : a^3, \text{ hinc } m = \frac{M}{a^3} z^3.$$

3. Sit jam  $MN$  planum perpendiculare ad  $AC$ , et  $\mu$  momentum massae  $m = pAq$  respectu ejusdem plani; erit per (171. §.)

$$\varepsilon \mu = z \varepsilon m; \text{ et in (2) } \varepsilon m = \frac{3M}{a^3} z^2 \varepsilon z;$$

$$\text{igitur } \varepsilon \mu = \frac{3M}{a^3} z^3 \varepsilon z, \text{ hinc } \mu = \frac{3Mz^4}{4a^3}.$$

4. Pro  $z = AC = a$  in (3) inveniatur ergo  $\mu = \frac{3}{4}Ma$  momentum totius pyramidis vel conii  $ABD$  respectu plani  $MN$ : cum igitur illius centrum gravitatis debeat coincidere cum uno puncto  $\gamma$  rectae  $AC$  ob (1); erit ejus distantia perpendicularis ab eodem plano ob (168. §.)

$$A\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{3}{4}Ma : M = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}AC.$$

#### 222. Corollarium 1.

Data quacunq; pyramide  $ABD$  (55. Fig.), cujus centrum gravitatis Fig. 55. desideretur, quaeratur centrum gravitatis  $C$  illius baseos  $BD$  (190. §.), et recta  $AC$  inter illud verticemque  $A$  intercepta dividatur in quatuor partes aequales, quo fiat  $A\gamma = \frac{3}{4}AC$ ; erit  $\gamma$  centrum gravitatis pyramidis (221. §.).

#### 223. Corollarium 2.

Cum basis pyramidis regularis sit polygonum regulare, inter cujus centrum et verticem pyramidis jacet axis pyramidis; patet, centrum gravitatis tam pyramidis regularis (55. Fig.) quam cujuslibet conii (56. Fig.) coincidere cum puncto  $\gamma$  illius axeos  $AC$ , cujus distantia  $A\gamma$  a vertice  $A$  aequatur tribus quartis totius axeos  $AC$  (191. 221. §.).

#### 224. Problema.

Invenire centrum gravitatis dati conii truncati (57. Fig.) vel datae Fig. 57. 58. pyramidis truncatae  $m$  dub  $BMDN$  (58. Fig.).

Solutio.

## Solutio.

1. Determinatis centris gravitatis  $C$ ,  $c$  basium  $BMDN$  per (191. 196. §.), ductaque recta  $Cc$ , jacebit in hac centrum gravitatis  $\gamma$  totius massae  $mdnbBMDN$ , quod idcirco perfecte determinabitur, si definia- tur illius distantia  $C\gamma$  vel  $c\gamma$  ab alterutro centro  $C$ ,  $c$ .

2. Quamobrem cogitetur compleri tam conus quam pyramis truncata, quo recta  $Cc$  producta occurrat vertici  $A$ , et sit in hac recta punctum  $a$  centrum gravitatis massae  $Abndm$ , et  $e$  centrum gravitatis massae  $ABNDM$ ; adeoque per (221. §.)

$$Aa = \frac{3}{4} Ac; \quad Ae = \frac{3}{4} AC.$$

3. Massa  $ABNDM$  composita est ex massis  $Abndm$ ,  $mdnbBNDM$ : ob (1) (2) per (155. §.) debet ergo esse

$$A\gamma = \frac{Ae \cdot ABNDM - Aa \cdot Abndm}{ABNDM - Abndm};$$

seu ob (2)

$$A\gamma = \frac{3}{4} \cdot \frac{AC \cdot ABNDM - Ac \cdot Abndm}{ABNDM - Abndm}.$$

4. Sed massae  $ABNDM$ ,  $Abndm$  sunt inter se ut cubi dimensio- num homologarum, adeoque

$$AC^3 : Ac^3 = ABNDM : abndm = \frac{ABNDM \cdot Ac^3}{AC^3};$$

quare fiet, facta substitutione et reductione in (3)

$$A\gamma = \frac{3}{4} \cdot \frac{AC^4 - Ac^4}{AC^3 - Ac^3}.$$

5. Ut autem formula complectatur dimensiones immediate in dato cono, vel data pyramide truncata determinabiles, ducantur ex centris gravitatis  $c$ ,  $C$  basium  $mbnd$ ,  $MBND$  ad puncta homologa  $d$ ,  $D$  rectae  $cd = r$ ,  $CD = R$  (in cono truncato radios basium exprimentes), et  $d\delta = cC = a$  sit parallela rectae  $AC$ : erit enim  $D\delta : DC = d\delta : AC$ , et  $D\delta : d\delta = d\delta : Ac$ . Quare habebimus

$$R - r : R = a : AC = \frac{aR}{R - r};$$

$$R - r : r = a : Ac = \frac{ar}{R - r}.$$

In (4) debeat itaque esse

$$Ay = \frac{1}{2} a \cdot \frac{R^4 - r^4}{(R^3 - r^3)(R - r)}$$

6. Hoc modo determinatur distantia centri gravitatis  $\gamma$  conii et pyramidis truncatae a vertice  $A$  conii et pyramidis integrae: cum autem non detur punctum  $A$ , et puncta  $C$ ,  $e$  semper debeant determinari (1); derivetur ex (5) distantia ejusdem centri  $\gamma$  ab alterutro puncto  $C$ ,  $c$ . Hinc, quia est  $C\gamma = AC - Ay$ , et  $c\gamma = Ay - Ac$ , sumtis pro  $AC$ ,  $Ac$ ,  $Ay$  valoribus ex (5), fiet

$$C\gamma = \frac{1}{2} a \cdot \frac{R^4 + 3r^4 - 4Rr^2}{(R^3 - r^3)(R - r)}$$

$$c\gamma = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^2}{(R^3 - r^3)(R - r)}$$

### 225. Theorema.

Si revolutione plani  $QXC$  (59. Fig.), ad  $C$  rectanguli inter duas Fig. 59. rectas  $QC$ ,  $XC$  et quancunque lineam curvam  $QX$  intercepti, circa rectam  $QC$  generetur corpus rotundum  $XQZ$ ; debebunt centra gravitatis cujuslibet segmenti  $pQq$  plano  $prqs$  ad  $QC$  perpendiculari abscissi, et cujuslibet frusti  $ABqp$  intercepti inter sectiones  $ADBE$ ,  $prqs$  ad  $QC$  perpendicularares jacere in axe  $QC$ .

### Demonstratio.

Omnes sectiones, ut e. gr.  $ADBE$ , ad  $QC$  perpendiculares, proinde basi  $XRZS$  corporis  $XQZ$  parallelae sunt totidem circuli, quorum centra jacent in axe rotationis  $QC$ , unde per (196. 216. §) necessario sequitur, quod debebat demonstrari.

### 226. Problema.

Data aequatione ad curvam  $QX$  inter coordinatas orthogonas  $z = Qa$ ,  $y = pa$ , investigare centra gravitatis partium  $pQq$ ,  $ABqp$  corporis  $XQZ$  revolutione plani  $QXC$  ad  $C$  rectanguli circa axem abscissarum  $QC$  geniti, pro sectionibus  $ADBE$ ,  $prqs$  basi  $XRZS$  parallelis et ad  $QC$  perpendicularibus.

### Solutio.

I. Centrum gravitatis partis  $pQq$  sit punctum  $\gamma$ , et centrum gravitatis partis  $ABqp$  sit punctum  $\alpha$  in axe rotationis  $QC$  (225. §):

ostendendum est, qua ratione distantias centrorum gravitatis  $\gamma$ ,  $\alpha$ , a puncto Q liceat investigare.

2. Sit MN planum ad QC perpendicularare, M massa pQq, et  $\mu$  ejus momentum respectu plani MN, adeoque  $\epsilon M = \pi y^2 \epsilon z$  (Vol. I. §. 490.): habebimus per (171. 168. §.)

$$\epsilon M = \pi y^2 \epsilon z; \quad \epsilon \mu = \pi y^2 z \epsilon z; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Quamobrem, ut data aequatione ad curvam QX inter coordinatas  $z = Qa$ ,  $y = pa$  inveniatur distantia Q $\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  massae pQq, integrari debent exponentes differentiales  $\epsilon M$ ,  $\epsilon \mu$ , sic ut illorum integralia pro  $z = 0$  pariter aequentur nihilo, cum evanescente  $z = Qa$  tam massa  $M = pQq$ , quam ejus momentum  $\mu$  respectu plani MN debeat aequari nihilo.

3. Porro, quia sectio ADBE in determinata distantia Qb a vertice Q dari supponitur, sectione altera prqs jacente in distantia variabili  $Qa = z$ ; habebit tam segmentum AQB quam illius momentum respectu plani MN valorem determinatum, pars vero ABqp segmenti pQq ejusdemque momentum respectu plani MN erit valoris variabilis: exponentes differentiales massae ABqp ejusque momenti aequabuntur ergo exponentibus differentialibus massae pQq = M, ejusque momenti  $\mu$  (Vol. I. §. 91.). Ob (2) potest ergo poni

$$\epsilon M = \pi y^2 \epsilon z; \quad \epsilon \mu = \pi y^2 z \epsilon z;$$

intelligendo per M massam ABqp, et per  $\mu$  illius momentum respectu plani MN. Verum, quia massa ABqp decrescente  $Qa = z$  decrescit, et pro  $z = Qb$  fit aequalis nihilo, ut ope harum formularum tam massa  $M = ABqp$ , quam ejus momentum  $\mu$  rite determinetur, sic erunt integrandi exponentes differentiales  $\epsilon M$ ,  $\epsilon \mu$ , ut illorum integralia pro  $z = Qb$  aequentur nihilo. Inventis vero completis valoribus pro M,  $\mu$ , innotescet eo ipso distantia centri gravitatis  $\alpha$  massae ABqp a puncto Q, nimirum

$$Q\alpha = \frac{\mu}{M} \text{ per (168. §.)}$$

### 227. Corollarium 1.

Aequatio ad curvam QX inter coordinatas  $z = Qa$ ,  $y = pa$  fit  $y^2 = Az + Bz^2$ , et  $e = Qb$  data distantia sectionis ADBE a puncto Q; habebimus pro centro gravitatis  $\alpha$  massae ABqp in (226. §. 3. n.)

$$sM = \pi(Az + Bz^2) \varepsilon z; \quad e\mu = \pi(Az^2 + Bz^3) \varepsilon z;$$

$$M = \pi\left(\frac{1}{2}Az^2 + \frac{1}{3}Bz^3\right) + C; \quad \mu = \pi\left(\frac{1}{3}Az^3 + \frac{1}{4}Bz^4\right) + C;$$

$$\pi\left(\frac{1}{2}Ae^2 + \frac{1}{3}Be^3\right) + C = 0; \quad C = -\pi\left(\frac{1}{2}Ae^2 + \frac{1}{3}Be^3\right);$$

$$\pi\left(\frac{1}{3}Ae^3 + \frac{1}{4}Be^4\right) + C = 0; \quad C = -\pi\left(\frac{1}{3}Ae^3 + \frac{1}{4}Be^4\right);$$

$$Q\alpha = \frac{\mu}{M} = \frac{4A(z^3 - e^3) + 3B(z^4 - e^4)}{6A(z^2 - e^2) + 4B(z^3 - e^3)}.$$

## 228. Corollarium 2.

Si fiat  $e = Qb = 0$ , abibit massa  $ABqp$  in segmentum  $pQq$ : quodfi ergo sit  $\gamma$  centrum gravitatis segmenti  $pQq$ , obtinebitur illius distantia  $Q\gamma$  a puncto  $Q$  pro  $e = 0$  ex (227. §.), nimirum

$$Q\gamma = \frac{4A + 3Bz}{6A + 4Bz} \cdot z.$$

## 229. Corollarium 3.

Si  $QXC$  sit quadrans circuli, cujus revolutione circa radium  $QC = r$  generetur dimidius globus  $XQZ$ , continebit aequatio generalis in (227. §.) valores  $A = 2r$ ,  $B = -1$ , pro quibus per (227. 228. §.) invenientur sequentes expressiones distantiae  $Q\alpha$  centri gravitatis  $\alpha$  frusti sphaerici  $ABqp$  intercepti inter sectiones  $ADBE$ ,  $pqs$  perpendiculares ad radium  $QC$ , et distantiae  $Q\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  segmenti sphaerici  $pQq$  a puncto  $Q$ .

$$Q\alpha = \frac{8r(z^3 - e^3) - 3(z^4 - e^4)}{12r(z^2 - e^2) - 4(z^3 - e^3)};$$

$$Q\gamma = \frac{8r - 3z}{12r - 4z} \cdot z.$$

## 230. Corollarium 4.

Erat  $z = Qa$ : si igitur ponas  $z = QC = r$  in (229. §.) obtinebis distantiam  $Q\alpha$  centri gravitatis  $\alpha$  frusti sphaerici inter basim  $XZ$  dimidii globi  $XQZ$  et sectionem  $AB$  ei parallelam intercepti a puncto  $Q$ , nimirum

$$Q\alpha = \frac{8r(r^3 - e^3) - 3(r^4 - e^4)}{12r(r^2 - e^2) - 4(r^3 - e^3)}.$$

## 231. Corollarium 5.

Quodsi autem in (230. §.) fiat  $e = Qb = 0$ , obtinebitur distantia  $Q\alpha$  centri gravitatis  $\alpha$  dimidii globi  $XQZ$  a puncto  $Q$ , atque ex hac reperietur ejus distantia  $C\alpha = QC - Q\alpha = r - Q\alpha$  a centro  $C$ , nimirum

$$Q\alpha = \frac{5}{8}r; \quad C\alpha = \frac{3}{8}r.$$

Verum pro  $z = 2r$  fiet in (229 §.)  $Q\gamma = r$ , id est: centrum gravitatis integri globi coincidit cum illius centro magnitudinis.

## 232. Corollarium 6.

Pari ratione applicari possunt praecedentes formulae (227. 228. §.) ad arcum  $QX$  parabolae, ellipseos, et hyperbolae, qui sua revolutione circa axem  $QC$  generet *paraboloidem*, *sphaeroidem ellipticum*, vel *conoidem hyperbolicum*  $XQZ$ : aequatio enim generalis  $y^2 = Az + Bz^2$  in (227. §.) complectetur  $A = p$  et  $B = 0$  pro parabola;  $A = p$  vero et  $B = \frac{p}{a}$  vel  $B = -\frac{p}{a}$  pro hyperbola vel ellipsi (Vol. I. §. 508. 540. 563.).

## 233. Corollarium 7.

In specie itaque distantia centri gravitatis  $\gamma$  cujuslibet segmenti  $pQq$  paraboloidis  $XQZ$  subtensi a sectione  $prqs$  perpendiculari ad axem  $QC$  a vertice  $Q$  erit per (232. 228. §.)  $Q\gamma = \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}Qa$ .

## 234. Corollarium 8.

Distantia autem centri gravitatis  $\gamma$  segmenti  $pQq$  conoidis hyperbolici, revolutione arcus hyperbolae  $Qp$  circa axem transversum  $QC$  geniti, ab ejus vertice  $Q$  erit pro  $z = Qa$  per (228. 232. §.).

$$Q\gamma = \frac{4az + 3z^2}{6a + 4z}$$

## 235. Corollarium 9.

Et distantia centri gravitatis  $\gamma$  segmenti  $pQq$  sphaeroidis elliptici, revolutione arcus ellipseos  $Qp$  circa axem transversum geniti, ab ipsius vertice  $Q$ , erit per (228. 232. §.)

$$Q\gamma = \frac{4az - 3z^2}{6a - 4z}$$

## 236. Corollarium 10.

Pro  $z = QC = \frac{1}{2}a$  erit  $Q\gamma = \frac{5}{8}a = \frac{5}{8}QC$  distantia centri gravitatis  $\gamma$  dimidii sphaeroidis elliptici  $XQZ$  ab ejus vertice  $Q$  (235. §.): et pro  $z = a$  fiet  $Q\gamma = \frac{1}{2}a$ , id est, centrum gravitatis integri sphaeroidis elliptici coincidit cum ejus centro magnitudinis.

## Scholion.

Paucas adhuc applicationes praecedentis problematis subjungam, prius quam ad investigationem centri gravitatis superficierum corporum rotundorum transeam: commendo autem tyronibus, ut ipsimet sibi plura his similia problemata proponant, eademque propria diligentia resolvere studeant, atque istud consilium, quoties opportuna occasio in aliis quoque disquisitionibus se obtulerit, sequantur: plurimum sane lucrabuntur, qui continua ejusmodi exercitatione usum calculi differentio-integralis in primo horum opusculorum volumine pertractati sibi familiarem reddiderint.

## 237. Problema.

Invenire tam massam quam centrum gravitatis corporis  $pQq$  geniti Fig. 60. revolutione arcus parabolae  $Qp$  (60. Fig.) circa tangentem  $QC$  in ejus vertice  $Q$ .

## Solutio.

1. Pro coordinatis orthogonis  $z = Qa$ ,  $y = pa$ , massa  $M = pQq$ , ejusque momento  $\mu$  respectu plani in  $Q$  ad  $QC$  perpendicularis, debet esse per (226. §.)

$$\epsilon M = \pi y^2 \epsilon z; \quad \epsilon \mu = \pi y^2 z \epsilon z.$$

2. Centrum vero gravitatis  $\gamma$  corporis  $pQq$  jacebit in axe rotationis  $QC$  (225. §.) in distantia  $Q\gamma = \frac{\mu}{M} a$  puncto  $Q$  (168. §.).

3. Sed, si  $QB$  fit axis parabolae  $Qp$ , ad quem tangens  $QC$  est perpendicularis (Vol. I. §. 513); erit  $u^2 = pv$  pro ordinata orthogona  $u = pb$ , et abscissa  $v = Qb$  (Vol. I. §. 508): igitur erit  $v^2 = \frac{u^4}{p^2}$ . Quamobrem, ob  $pb = Qa$ ,  $Qb = ap$ , habebimus etiam  $y^2 = \frac{z^4}{p^2}$ , et ob (1)(2).

$$\epsilon M = \frac{\pi}{p^2} z^4 \epsilon z; \quad \epsilon \mu = \frac{\pi}{p^2} z^7 \epsilon z;$$

$$M = \frac{\pi}{5p^2} z^5; \quad \mu = \frac{\pi}{6p^2} z^6; \quad Q\gamma = \frac{6}{5}z = \frac{6}{5}Qa.$$

## 238. Problema.

Fig. 45. *Invenire massam et centrum gravitatis corporis pQq (45. Fig.) revolutione plani pQa ad a reſtanguli circa axem QC ciffoidis QS geniti.*

Solutio.

Aequatio ad ciffoidem QS inter coordinatas  $y=pa, z=Qa$  est  $y^2 = \frac{z^3}{2r-z}$  (Vol. I. §. 582.) pro  $2r=QC$ ; centrum vero gravitatis  $\gamma$  corporis pQq revolutione plani pQa circa axem ciffoidis QC geniti jacet in ipſo axe QC (225. §.): quodſi ergo M fit maſſa, et  $\mu$  momentum ejusdem corporis reſpectu plani in Q ad QC perpendicularis, habebimus per (226. §)

$$\epsilon M = \frac{\pi z^3 \epsilon z}{2r-z}; \quad \epsilon \mu = \frac{\pi z^4 \epsilon z}{2r-z}; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Quamobrem erit

$$\epsilon M = -\pi z^2 \epsilon z - 2r\pi z \epsilon z - 4\pi r^2 \epsilon z + \frac{8\pi r^3 \epsilon z}{2r-z};$$

$$\epsilon \mu = -\pi z^3 \epsilon z - 2r\pi z^2 \epsilon z - 4r^2\pi z \epsilon z - 8r^3\pi \epsilon z + \frac{16\pi r^4 \epsilon z}{2r-z}.$$

Adeoſque integrando per (226. §. 2. n.) juxta (Vol. I. §. 242. 249. 252. §.) obtinebimus.

$$M = 8\pi r^3 \log \frac{2r}{2r-z} - \frac{\pi z^3}{3} - r\pi z^2 - 4\pi r^2 z;$$

$$\mu = 16\pi r^4 \log \frac{2r}{2r-z} - \frac{\pi z^4}{4} - \frac{2r\pi z^3}{3} - 2\pi r^2 z^2 - 8\pi r^3 z.$$

Hoc modo determinatur tam maſſa M corporis pQq, quam diſtancia  $Q\gamma$  illius centri gravitatis  $\gamma$  a vertice Q, pro qualibet abſciſſa  $z=Qa$ .

## 239. Problema.

Fig. 60. *Invenire maſſam et centrum gravitatis corporis pQq geniti revolutione arcus Qp (60. Fig.) ellipseos ad axem tranſverſum QB relatae circa tangentem QC in vertice Q.*

Solutio.

I. Centrum gravitatis  $\gamma$  debet jacere in axe rotationis QC, ita ut, pro  $pa=y, Qa=z, M=pQq$ , et momento  $\mu$  ejusdem maſſae

fae

fac respectu plani in Q ad QC perpendicularis debeat fieri (226. §. 1. 2. n.)

$$\epsilon M = \pi y^2 \epsilon z; \quad \epsilon \mu = \pi y^2 z \epsilon z; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

2. Cum vero  $z = Qa = pb$ , et  $y = ap = Qb$  sint coordinatae orthogonae ellipseos relatae ad axem transversum QB sumtum pro linea abscissarum; debet esse per (Vol. I. §. 525.)

$$z^2 = \frac{b^2 y}{a} - \frac{b^2 y^2}{a^2}; \quad \text{igitur debet esse}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 + \frac{a^2}{2b} \sqrt{(b^2 - 4z^2)}.$$

Hinc et ex (1) obtinebimus

$$\epsilon M = \frac{1}{2} \pi a^2 \epsilon z - \frac{\pi a^2}{b^2} z^2 \epsilon z + \frac{\pi a^2}{2b} \epsilon z \sqrt{(b^2 - 4z^2)};$$

$$\epsilon \mu = \frac{1}{2} \pi a^2 z \epsilon z - \frac{\pi a^2}{b^2} z^3 \epsilon z + \frac{\pi a^2}{2b} z \epsilon z \sqrt{(b^2 - 4z^2)}.$$

Quare integrando juxta (226. §. 2. n.) per (Vol. I. §. 242. 249. 248. 289. 238.) inveniemus

$$M = \frac{1}{2} \pi a^2 z - \frac{\pi a^2}{3b^2} z^3 + \frac{\pi a^2}{4b} z \sqrt{(b^2 - 4z^2)} \\ + \frac{\pi b a^2}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z}{b};$$

$$\mu = \frac{1}{4} \pi a^2 z^2 - \frac{\pi a^2}{4b^2} z^4 - \frac{\pi a^2}{24b} \sqrt{(b^2 - 4z^2)} + \frac{\pi a^2 b^2}{24}.$$

Hinc itaque determinabitur tam massa  $M = pQq$ , quam distantia  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$  illius centri gravitatis  $\gamma$  a vertice Q pro data quacunque abscissa  $z = Qa$ .

#### 240. Corollarium 1.

Si Qb sit semiaxis transversus  $= \frac{1}{2}a$ , hinc pb semiaxis conjugatus  $= \frac{1}{2}b$  ellipseos; exhibebit pQq corpus revolutione quadrantis elliptici Qp circa illius tangentem QC in vertice Q geniti, cujus et massa M, et distantia Q $\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  a vertice Q invenietur pro  $z = \frac{1}{2}b$  ex (239. §.), ut sequitur.

$$M = \frac{(10 + 3\pi)}{48} \pi a^2 b; \quad Q\gamma = \frac{17b}{4(10 + 3\pi)} = \frac{17}{2(10 + 3\pi)} \cdot Qa.$$

241. Co.

## 241. Corollarium 2.

Ellipsis abit in circulum, si ejus axes  $a$ ,  $b$  fiant aequales: si ergo in (239. §.) ponas  $a=b$ , obtinebis sequentes expressiones pro massa  $M$  corporis  $pQq$  revolutione arcus circularis  $Qp$  circa illius tangentem  $QC$  geniti, ejus momento  $\mu$  respectu plani in  $Q$  ad  $QC$  perpendicularis, et distantia ipsius centri gravitatis  $\gamma$  a puncto contactus  $Q$ , pro diametro  $=a$  circuli, et quavis abscissa  $z=Qa$ .

$$M = \frac{1}{2} \pi a^2 z - \frac{1}{3} \pi z^3 + \frac{\pi a}{4} z \sqrt{(a^2 - 4z^2)} + \frac{\pi a^3}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z}{a};$$

$$\mu = \frac{1}{3} \pi a^2 z^2 - \frac{\pi z^3}{4} - \frac{\pi a}{24} \sqrt{(a^2 - 4z^2)^3} + \frac{\pi a^3}{24};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

## 242. Corollarium 3.

Massa vero  $M$  corporis  $pQq$  revolutione quadrantis  $Qp$  circuli circa tangentem  $QC$  geniti, et distantia illius centri gravitatis  $\gamma$  a puncto contactus  $Q$ , erit pro semidiametro  $z=Qa=\frac{1}{2}a$  (241. §.)

$$M = \frac{(10+3\pi)}{48} \pi a^3; \quad Q\gamma = \frac{17a}{4(10+3\pi)} = \frac{17}{2(10+3\pi)} \cdot Qa.$$

## 243. Corollarium 4.

Si ob (Vol. I. §. 550.) loco aequationis ad ellipsim  $z^2 = \frac{b^2 y}{a} - \frac{b^2 y^2}{a^2}$  sumas aequationem  $z^2 = \frac{b^2 y}{a} + \frac{b^2 y^2}{a^2}$  ad hyperbolam in (239. §. 1. 2. n.); obtinebis sequentes formulas pro massa  $M$  corporis  $pQq$  revolutione arcus  $pQ$  hyperbolae circa tangentem  $QC$  ad ejus verticem  $Q$  geniti, illius momento  $\mu$  respectu plani in  $Q$  ad  $QC$  perpendicularis, et distantia  $Q\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  a vertice  $Q$ .

$$M = \frac{1}{2} \pi a^2 \varepsilon z + \frac{\pi a^2}{b^2} z^2 \varepsilon z - \frac{\pi a^2}{2b} \varepsilon z \sqrt{(b^2 + 4z^2)};$$

$$\mu = \frac{1}{3} \pi a^2 z \varepsilon z + \frac{\pi a^2}{b^2} z^3 \varepsilon z - \frac{\pi a^2}{2b} z \varepsilon z \sqrt{(b^2 + 4z^2)};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Integrando autem exponentes differentiales  $\epsilon M$ ,  $\epsilon \mu$  juxta (226. §. 2. n.) per (Vol. I. §. 242. 249. 248. 289. 238. §.) inveniimus

$$M = \frac{1}{2} \pi a^2 z + \frac{\pi a^2}{3 b^2} z^3 - \frac{\pi a^2}{4 b} z \sqrt{(b^2 + 4z^2)} \\ + \frac{\pi a^2 b}{8} \log \frac{b}{2z + \sqrt{(b^2 + 4z^2)}}; \\ \mu = \frac{1}{4} \pi a^2 z^2 + \frac{\pi a^2}{4 b^2} z^4 - \frac{\pi a^2}{24 b} \sqrt{(b^2 + 4z^2)} + \frac{\pi a^2 b^2}{24}.$$

## 244. Problema.

Data aequatione ad lineam QX (59. Fig.) inter coordinatas orthogonas  $z = Qa$ ,  $y = pa$ , investigare centrum gravitatis superficiei rotundae pQq revolutione lineae Qp circa axem abscissarum QC genitae. Fig. 59.

## Solutio.

1. Cum centrum gravitatis superficiei rotundae pQq in axe rotationis QC debeat jacere (179. 183. §.); sit illud in  $\gamma$ , et quaeratur ipsius distantia  $Q\gamma$  a vertice Q: erit denotante M massam, et  $\mu$  momentum superficiei pQq respectu plani MN in Q ad QC perpendicularis, per (168. §.)

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

2. Cum porro debeat esse  $\epsilon \mu = z \epsilon M$  (171. §.), si valor pro  $\epsilon M$  determinetur per (Vol. I. §. 491.), habebimus

$$\epsilon M = 2 \pi y \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}; \quad \epsilon \mu = 2 \pi z y \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}.$$

3. Quare, data aequatione ad lineam QX inter coordinatas  $z = Qa$ ,  $y = pa$ , quaerantur ope calculi integralis massa M et momentum  $\mu$  ex (2), tum definiatur distantia  $Q\gamma$  per (1), quae generatim hoc modo exprimi poterit

$$Q\gamma = \frac{\int y z \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}}{\int y \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}}.$$

4. De reliquo, quia evanescente abscissa  $z = Qa$ , et ordinata  $y = pa$ , tam superficiei M = pQq, quam illius momentum  $\mu$  respectu plani MN debet evanescere, perspicuum est, integralia M,  $\mu$  in (2) (3) nihilo de-

bere aequari, tam pro  $z=0$ , quam  $y=0$ , unde constantium determinatio pendet (Vol. I. §. 238.).

## 245. Corollarium 1.

Sit QX linea recta, adeoque XQZ superficies conica, ejus axis  $QC=a$ , et radius bascos  $XC=r$ ; erit  $pa=y=\frac{r}{a}z$ : quare erit in (244. §. 2. n.)

$$\epsilon y = \frac{r}{a} \epsilon z; \quad \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)} = \frac{\epsilon z}{a} \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

$$\epsilon M = \frac{2\pi r}{a^2} z \epsilon z \sqrt{(a^2 + r^2)}; \quad \epsilon \mu = \frac{2\pi r}{a^2} z^2 \epsilon z \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

$$M = \frac{\pi r}{a^2} z^2 \sqrt{(a^2 + r^2)}; \quad \mu = \frac{2\pi r}{3a^2} z^3 \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}Qa.$$

Nimirum distantia centri gravitatis  $\gamma$  superficiei conicae pQq pro quavis abscissa  $z = Qa$  ab ejus vertice Q aequatur duabus tertiis ejusdem abscissae: et sic distantia centri gravitatis  $\gamma$  superficiei convexae cujuslibet coni XQZ ab illius vertice QC aequalis est duabus tertiis axeos QC.

## 246. Corollarium 2.

Sit Qp arcus circuli  $r=QC=XC$  descripti; erit aequatio ad QX

$$y^2 = 2rz - z^2: \quad \text{igitur } \epsilon y = \frac{(r-z)\epsilon z}{\sqrt{(2rz - z^2)}}.$$

Pro massa M superficiei convexae pQq segmenti sphaerici, ejus momento  $\mu$  respectu plani MN, et distantia Q $\gamma$  ipsius centri gravitatis  $\gamma$  a vertice Q habebimus itaque juxta (244 §.)

$$\epsilon M = 2r\pi\epsilon z; \quad \epsilon \mu = 2r\pi z \epsilon z;$$

$$M = 2r\pi z; \quad \mu = r\pi z^2; \quad Q\gamma = \frac{1}{2}z.$$

Medium ergo punctum altitudinis Qa segmenti sphaerici pQq est centrum gravitatis illius superficiei convexae; et ideo etiam medium punctum

punctum radii QC perpendicularis ad basim XRZS dimidiae sphaerae est centrum gravitatis illius superficiesi convexae.

## 247. Corollarium 3.

Si Qp sit arcus parabolae, proinde M=pQq superficies convexa segmenti conoidis XQZ parabolici revolutione parabolae QX circa illius axem QC geniti, et  $\gamma$  centrum gravitatis ejusdem superficiesi; erit per (Vol. I. §. 508.) et (244. §.)

$$y^2 = pz; \quad \varepsilon y = \frac{p \varepsilon z}{2y};$$

$$\varepsilon M = \pi \varepsilon z \sqrt{(p^2 + 4pz)}; \quad \varepsilon \mu = \pi z \varepsilon z \sqrt{(p^2 + 4pz)};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Integralia vero M,  $\mu$  determinabis per (Vol. I. §. 248. 282. 238.), sic ut singula pro  $z=0$  aequentur nihilo.

## 248. Corollarium 4.

Quodsi autem Qp sit arcus ellipseos, et QC ejus semiaxis transversus, hinc M=pQq superficies convexa segmenti sphaeroidis elliptici revolutione ellipseos circa axem transversum geniti,  $\gamma$  vero centrum gravitatis ejusdem superficiesi; erit per (Vol. I. §. 540.) et (244. §.)

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(az - z^2)}; \quad \varepsilon y = \frac{b}{2a} \cdot \frac{(a - 2z)\varepsilon z}{\sqrt{(az - z^2)}};$$

$$\varepsilon M = \frac{\pi bc}{a^2} \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az - z^2\right)}; \\ \varepsilon \mu = \frac{\pi bc}{a^2} z \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az - z^2\right)}; \quad \text{pro } c = 2\sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Quamobrem, cum exponentes hi differentiales per (Vol. I. §. 288. 294.) facile integrentur, si singula integralia per (Vol. I. §. 238.) ita definiantur, ut ea pro  $z=0$  aequentur nihilo; determinabitur eo ipso distantia centri gravitatis  $\gamma$  a vertice Q, nimirum  $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ , pro qualibet altitudine  $z=Qa$  segmenti pQq: et si fiat  $z = \frac{1}{2}b = QC$ , reperietur distantia centri gravitatis superficiesi convexae dimidii sphaeroidis elliptici XQZ ab ejus vertice Q.

## 249. Corollarium 5.

Et si  $Qp$  sit arcus hyperbolae, cujus revolutione circa axem transversum  $QC$  generetur superficies convexa  $pQq$  conoidis hyperbolici; habebimus ob (Vol. I. §. 563.) per (244. §.) sequentes expressiones pro massa  $M$  superficiei  $pQq$ , ejus momento  $\mu$ , et centro gravitatis  $\gamma$ : cum igitur exponentes differentiales  $\varepsilon M$ ,  $\varepsilon \mu$  per (Vol. I. §. 288. 294.) sint perfecte integrabiles, si illorum integralia per (Vol. I. §. 238.) sic determinentur, ut singula pro  $z=0$  aequentur nihilo, inveniatur eo ipso distantia  $Q\gamma$  centri gravitatis  $\gamma$  a vertice  $Q$ .

$$y = \frac{b}{2a} \sqrt{(az + z^2)}; \quad \varepsilon y = \frac{b}{2a} \cdot \frac{(a + 2z) \varepsilon z}{\sqrt{(az + z^2)}}$$

$$\varepsilon M = \frac{\pi bc}{a^2} \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az + z^2\right)}; \quad \text{pro } c = 2\sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

$$\varepsilon \mu = \frac{\pi bc}{a^2} z \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az + z^2\right)}$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

DISSERTATIONES  
AD  
MECHANICAM CORPORUM SOLIDORUM  
PERTINENTES.

DISSERTATIONS

AND

MECHANICAL CORPORATION SOLUTIONS  
PERTINENT

## DISSERTATIO VIII.

DE

MOTU PUNCTORUM AEQUABILI UNIFORMITERQUE  
ACCELERATO ET RETARDATO.

## 250. DEFINITIO.

Quotiescunque aliquod corpus movetur, singula ejus puncta describunt totidem lineas, jam rectas, jam curvas (38. §.): quodvis ergo punctum corporis moti potest in motu constitutum cogitari, atque hic motus erit *rectilineus* vel *curvilineus*, prout punctum eodem motu lineam rectam vel curvam descripserit.

## 251. Corollarium 1.

Directio motus rectilinei manet perpetuo eadem per lineam rectam determinata, quam punctum mobile eodem motu describit: in motu autem curvilineo directio singulis momentis mutatur (250. §.).

## 252. Corollarium 2.

*Spatium*, quod datum punctum suo motu intra certum tempus percurrat, determinabitur per longitudinem lineae, rectae vel curvae, quam illud eodem tempore percurrerit (250. §.).

## 253. Corollarium 3.

Crescente ergo tempore, quo motus dati puncti daret, crescet quoque spatium intra idem tempus percursum (252. §.).

## 254. DEFINITIO.

Uterque motus, *rectilineus* et *curvilineus* (250. §.), erit *aequabilis* seu *uniformis*, si spatia, quae punctum mobile intra quaecunque tempuscula aequalia conficiat, fuerint inter se aequalia.

## 255. Corollarium 1.

Quodcunque spatium percurrat punctum motu aequabili progrediens intra determinatum tempusculum, debet illud *2plo*, *3plo*, *mplo* tempore conficere spatium pariter *2plum*, *3plum*, *mplum* (254. §.).

256. Co.

## 256. Corollarium 2.

Si ergo datum punctum progrediens motu aequabili tempore quocunque  $v$  conficiat spatium  $V$ ; debet illud tempore  $u = v \frac{r}{n}$  *rplu* unius<sup>s</sup> *ntae* partis temporis  $v$  conficere spatium  $U = V \frac{r}{n}$  pariter *rplum* unius *ntae* partis spatii  $V$ . Si enim  $x$  sit spatiolum tempusculo  $= v \frac{1}{n}$  percursum, quia tempus  $v$  est *nplum* et tempus  $u$  *rplum* tempusculi  $v \frac{1}{n}$ ; debet esse  $V = xn$  et  $U = xr$  (255. §), hinc  $x = V \frac{r}{n}$  et  $U = V \frac{r}{n}$ .

## 257. DEFINITIO.

Omne punctum  $P$  in motu constitutum (250. §.) censetur quovis momento habere certam *Celeritatem* seu *Velocitatem*, quam recte desines, quod sit intensio motus punctum  $P$  ad spatium eo majus vel minus, quo ipsa est major vel minor, quovis tempore percurrendum determinans.

## 258. Corollarium 1.

Punctum incedens motu aequabili eadem perpetuo celeritate movebitur: et vicissim motus puncti eadem constanter celeritate incedentis erit aequabilis (257. 254. §.).

## 259. Corollarium 2.

Celeritas dati puncti et spatium ab illo intra quodcunque tempus confectum erunt duo quanta heterogenea (257. 252. §.): proprie igitur nulla celeritas poterit aequari alicui spatio.

## 260. Theorema.

*Spatia*  $S, s$ , quae a duobus punctis mobilibus  $P, p$  motu aequabili progredientibus intra datum quodcunque tempus percurrantur, erunt inter se ut celeritates  $C, c$  eorundem punctorum, seu erit  $S:s = C:c$ .

## Demonstratio.

Cum mobile  $P$  perpetuo celeritate  $C$ , et  $p$  celeritate  $c$  incedat (258 §.), necesse est, ut quae ratio intercedit inter celeritates  $C, c$ , eadem intercedat etiam inter spatia  $S, s$ , quae a punctis  $P, p$  intra idem tempus percurruntur (257. §.), adeoque sit  $S:s = C:c$ .

## 261. Theorema.

*Spatia* vero  $S, s$ , vel ab uno puncto motu aequabili incedente, vel a duobus punctis motu aequabili parique celeritate progredientibus intra tempora

tempora inaequalia  $T, t$  confecta, erunt inter se ut tempora, seu erit  
 $S:s=T:t$ .

Demonstratio.

Duo puncta  $P, p$  eadem celeritate motu aequabili incedentia percurrent intra idem tempus  $t$  spatia aequalia  $s, s$  (260. §.): quamobrem, si punctum  $P$  alio aliquo tempore  $T$  conficiat spatium  $S$ , demonstrandum est, futurum  $S:s=T:t$ , quod sequenti ratiocinio potest evinci.

1. Tempora  $T, t$  sunt commensurabilia aut incommensurabilia (3. §.). Primo casu dabitur aliquis numerus integer  $m$  vel fractus  $\frac{m}{n}$ , pro quo fiat  $T=tm$  vel  $T=t\frac{m}{n}$  (6. §.); adeoque etiam  $S=sm$  vel  $S=s\frac{m}{n}$  (255. 256. §.): utroque casu erit itaque  $S:s=T:t$ .

2. Si autem tempora  $T, t$  sint incommensurabilia, dabitur pro quovis utcumque magno numero integro  $n$  alter numerus integer  $m$ , pro quo fit (12. §.)

$$T > t \frac{m}{n} \text{ et simul } T < t \frac{m+1}{n}.$$

3. Sint  $s', S'$  spatia, quorum primum tempore  $=t\frac{m}{n}$ , et secundum tempore  $=t\frac{m+1}{n}$  percurrat punctum  $P$ : quia per hypothesein idem punctum conficit spatium  $s$  tempore  $t$ , et  $S$  tempore  $T$ ; debet esse

$$s' = s \frac{m}{n} \text{ et } S' = s \frac{m+1}{n} \text{ per (256. §.);}$$

$$S > s' \text{ et } S < S' \text{ ob (2) per (253. §.):}$$

$$\text{igitur } S > s \frac{m}{n} \text{ et simul } S > s \frac{m+1}{n}.$$

Hinc et ex (2) per (22. §.) obtinetur  $S:s=T:t$ .

262. Problema.

*Spatia, Celeritates, et Tempora ad certas mensuras revocare, et per congruos numeros exprimere.*

Solutio.

1. In constituendis mensuris datorum quantum id perpetuo est observandum, ut quaevis mensura et quantum, pro quo illa desideratur, sint inter se duo quanta homogenea (14. §.).

2. Pro temporum ergo mensura tempusculum aliquod debet accipi (1): in sequentibus erit nobis *minutum secundum* communis omnium temporum mensura.

3. Mensuram spatiorum indeterminatam relinquimus: ob (1) et (252 §) aequabitur illa generatim certae lineolae  $l$ , puta uni pedi, vel pluribus pedibus.

4. Quia demum mensura celeritatum determinata quaequam celeritas debet esse (1); sumemus pro mensura celeritatis in quovis motu illam determinatam celeritatem  $\Phi$ , qua mobile motu aequabili incedens quovis minuto secundo percurreret spatium  $l$  pro spatii mensura acceptum (3).

E. gr. Si spatium a puncto  $P$  percursum aequetur aliquot pedibus; erit unus pes mensura ejusdem spatii: pro mensura ergo celeritatis, qua punctum  $P$  progreditur, accipiemus illam determinatam celeritatem  $\Phi$ , qua punctum  $P$ , aut aliud quodcumque punctum, motu aequabili incedens unum pedem quovis minuto secundo deberet conficere.

5. Stabilitis hoc modo mensuris spatiorum, celeritatum et temporum, investigentur exponentes rationum geometricarum eorundem quantorum ad assumtas mensuras: si enim hos exponentes ad easdem mensuras pro totidem unitatibus acceptas referas; obtinebis eo ipso numeros denominatos, qui data spatia, datasque celeritates, et data tempora expriment (15. 16. 17. 18. §.).

#### 263. Corollarium 1.

Deinceps ergo ubique solos exponentes rationum geometricarum spatiorum, celeritatum, et temporum ad mensuras eorundem (262. §. 2. 3. 4. n.) investigabimus, quibus inventis ipsa spatia, celeritates, et tempora per (262. §. 5. n.) licebit determinare: atque hi exponentes ubique in sequentibus formulis prae oculis habeantur, ubi spatia, celeritates, et tempora certis literis, puta  $C$ ,  $S$ ,  $T$ , designata fuerint.

#### 264. Corollarium 2.

Si punctum  $P$  progrediens motu aequabili celeritate  $C$  percurrat spatium  $s$  intra unum minutum secundum; aliud vero punctum pariter motu aequabili incedens celeritate  $\Phi$  conficiat intra minutum secundum spatium  $l$  pro mensura spatii  $s$  assumtum; erit  $C:\Phi = s:l$  (260. §.), hinc

$$\frac{C}{\Phi} = \frac{s}{l}$$

Perpicuum ergo est, in omni motu aequabili exponentem

rationis

rationis celeritatis ad ejus mensuram  $\Phi$  aequari exponenti rationis spatii intra unum minutum secundum percursi ad ejusdem mensuram  $l$  (262. §. 3. 4. n.): quare, literis  $C$ ,  $s$  hos exponentes deinceps indicantibus, erit  $C = s$  (263. §.). Hoc, nulloque alio sensu dicitur *celeritas mobilis motu aequabili progredientis aequari spatiolo, quod idem mobile quovis minuto secundo conficit.*

## Scholion.

Si e. gr. dicatur celeritas  $C$  puncti  $P$  motu aequabili incedentis esse octo pedum, et ideo scribatur  $C = 8$  pedibus; expressio haec haud indicabit, celeritatem puncti  $P$  re ipsa aequari spatiolo octo pedum, quod utique absurdum est (259. §.): celeritatem enim puncti  $P$  octo pedum esse tantundem significat, ac eam esse puncti  $P$  celeritatem, qua illud quovis minuto secundo spatiolum  $s = 8$  pedibus debet conficere; ita ut proprie nequeat poni  $C = 8$ , nisi per 8 intelligatur numerus abstractus aequalis exponenti rationis geometricae celeritatis ad ipsius mensuram  $\Phi$ , nimirum ad celeritatem  $\Phi$ , qua motu aequabili unus pes quovis minuto secundo deberet confici (262. §. 4. n.); vel numerus denominatus relatus ad unitatem celeritati  $\Phi$  aequalem, quo casu exprimeret  $C = 8$  tantundem ac  $C = 8\Phi$ , nimirum celeritatem *8plam* celeritatis  $\Phi$ , sicut spatium  $s$  erat *8plum* unius pedis.

## 265. Corollarium 3.

Si punctum  $P$  incedens celeritate  $C$  motu aequabili conficiat uno minuto secundo spatiolum  $s$ , et tempore  $T$  spatium  $S$ ; erit  $S : s = T : 1''$  (261. §.): igitur, sumta lineola  $l$  pro mensura spatiorum, erit etiam  $\frac{S}{l} : \frac{s}{l} = T : 1''$ , hinc  $\frac{S}{l} = \frac{s}{l} \cdot \frac{T}{1}$ , seu  $\frac{S}{l} = \frac{C}{\Phi} \cdot \frac{T}{1}$  (264. §.). Exponens itaque rationis spatii quovis tempore confecti ad ejus mensuram  $l$  aequatur producto ex exponente rationis celeritatis ad ipsius mensuram  $\Phi$  in exponentem rationis temporis ad ejusdem mensuram  $1''$  (262. §. 3. 4. 2. n.): expropter, si iidem exponentes designentur literis  $S$ ,  $C$ ,  $T$ , poni poterit  $S = CT$ , quae aequatio improprie indicabit, *spatium motu aequabili data celeritate quovis tempore percursum aequale esse producto ex celeritate in tempus.*

## 266. Corollarium 4.

Habebimus ergo  $\frac{S}{C} = T$  (265 §), id est: exponens rationis spatii motu aequabili quacunque celeritate et quocunque tempore percurfi ad ipsius mensuram divisus per exponentem rationis celeritatis ad ejus mensuram dabit pro quoto exponentem rationis temporis ad ejusdem mensuram (262. §. 2. 3. 4. n.); improprie vero dicitur *spatium divisum per celeritatem acquiri tempori, quo illud percurritur.*

## 267. Corollarium 5.

Erit porro  $\frac{S}{T} = C$  (265. §), id est: si exponens rationis spatii, motu aequabili quacunque celeritate intra certum tempus percurfi, ad ejus mensuram dividatur per exponentem rationis temporis ad ipsius mensuram; erit quotus aequalis exponenti rationis celeritatis ad ejusdem mensuram (262. §. 2. 3. 4. n.); improprie autem dicitur *spatium divisum per tempus dare celeritatem pro quoto.*

## Scholion.

Per haec pauca principia omnis motus aequabilis potest determinari, seu datis celeritate et tempore quaeratur spatium; seu datis celeritate et spatio desideretur tempus; seu datis spatio et tempore petatur celeritas.

Ponamus e. gr. punctum P incedere motu aequabili celeritate 8 pedum (264. §.), petique spatium S, quod illud intra 12 minuta secunda conficiat; erit per (265. 263. §.)

$$S = 8 \cdot 12 = 96 \text{ pedibus.}$$

Si autem constet, datum punctum progredi motu aequabili celeritate 6 pedum, et quaeratur tempus T, quo spatium 120 pedum possit ab illo confici; erit per (266. 263. §.)

$$T = \frac{120}{6} = 20 \text{ minutis secundis.}$$

Si denique dicas, punctum P progrediens motu aequabili spatium 104 pedum intra 13 minuta secunda percurrere, et quaeras ejus celeritatem; invenies per (267. 264. §.)

$$C = \frac{104}{13} = 8 \text{ pedibus.}$$

## 268. DEFINITIO.

Motum, in quo celeritas continuo mutatur, crescit videlicet vel decrescit, vocant *inaequabilem* seu *diformem*, et quidem *acceleratum* casu primo, *retardatum* vero casu altero.

## 269. Corollarium 1.

Omnis motus dati puncti erit necessario vel aequabilis vel inaequabilis (258. 268. §.).

## 270. Corollarium 2.

Species autem motuum inaequabilium, tam acceleratorum, quam retardatorum, sunt numero infinitae possibiles, pendentes a totidem legibus, quibus celeritates possunt crescere et decrescere (268. §.).

## 271. Corollarium 3.

Celeritas puncti P motu inaequabili incedentis continuo mutatur; si ejus motus duret quocunque tempore T, habebit illud in fine temporis T determinatam aliquam celeritatem C, ita tamen, ut et aliam habuerit proxime praecedente momento, et aliam sit habiturum proxime sequente momento (268. §.). Hoc sensu vocabitur C *celeritas debita tempori T*, poteritque ea aestimari ex spatio, quod punctum mobile hac ipsa celeritate motu aequabili progrediens intra unum minutum secundum conficeret, juxta (264. §.).

Si e. gr. celeritas, quam punctum P motu inaequabili progrediens in fine 12 minutorum secundorum ab initio ejusdem motus effluxorum habeat, dicatur esse 8 pedum; indicabit id talem esse puncti P celeritatem C, qua, si illud hac ipsa celeritate motu aequabili incederet, quovis minuto secundo spatium octo pedum deberet conficere.

## 272. Corollarium 4.

Si punctum P motu accelerato percurrat tempusculo t spatium x, celeritas vero ejus initio tempusculi t sit c, et in fine tempusculi t sit c'; necesse est, ut spatium x majus sit spatiolo ct et simul minus spatiolo c't, quorum primum celeritate c, et secundum celeritate c' motu aequabili intra tempusculum t potest confici (265. 268. 257. §.).

## 273. Corollarium 5.

Si autem motus puncti P sit retardatus, punctumque P conficiat hoc motu spatium x intra tempusculum t, ejus vero celeritas initio tempusculi t sit c, et in fine tempusculi t sit c'; debet spatium x minus esse spatio c t, et simul majus spatio c' t, quorum primum vel secundum a puncto P tempusculo t deberet confici, si illud celeritate c vel c' motu aequabili incederet (265. 268 257. §.).

## 274. DEFINITIO.

Inter omnes motus inaequabiles (270. §.) maxime memorabilis est motus *uniformiter acceleratus et retardatus*: in primo sunt incrementa, et in secundo decrementsa celeritatis duobus quibuscunque temporibus ab initio ejusdem motus genita inter se in ratione directa temporum. Potest autem motus uniformiter acceleratus vel de quiete, adeoque nulla celeritate, vel determinata quapiam celeritate  $\gamma$  inchoari: illum vocabimus *purum*, et hunc *affectum*.

## 275. Corollarium 1.

Quare, si punctum P progrediens motu uniformiter accelerato vel retardato temporibus T, t ab initio ejusdem motus computatis capiat incrementa, vel patiatur decrementsa celeritatis C, c; erit  $C : c = T : t$  (274. §.).

## 276. Corollarium 2.

Si ergo in specie K denotet incrementum vel decrementum celeritatis puncti P motu uniformiter accelerato progredientis debitum uni minuto secundo; erit  $C : K = T : 1''$ , hinc  $C = K T$  (263. §.) incrementum vel decrementum celeritatis debitum tempori T: punctum ergo P habebit in fine temporis T celeritatem  $C = K T$ , si ejus motus uniformiter acceleratus purus sit; celeritatem vero  $\gamma + K T$  vel  $\gamma - K T$ , si illud celeritate  $\gamma$  motum uniformiter acceleratum affectum; vel uniformiter retardatum inchoet (274. §.).

## 277. Problema.

Punctum P progreditur motu uniformiter accelerato, vel uniformiter retardato; incrementum vel decrementum celeritatis primo minuto secundo genitum est K: invenire spatium S, quod illud dato quocunque tempore T ab initio ejusdem motus computato debet percurrere.

Solutio.

## Solutio.

1. Si  $M, N$  sint duo quanta determinatae magnitudinis, pro quibus et tertio quanto  $S$  semper sit  $S > M - N \frac{1}{m}$  et simul  $S < M + N \frac{1}{m}$ , quantumcunque magnum numerum integrum denotet  $m$ ; cum semper sit possibilis ejusmodi numerus integer  $m$ , pro quo pars *mta*  $N \frac{1}{m}$  quanti  $N$  minor fieret quovis dato utcunque parvo quanto homogeneo (II. §.): erit necessario  $S = M$  (Vol. I. §. 129.).

2. Totum jam tempus  $T$ , quo motus puncti  $P$  uniformiter acceleratus vel retardatus durare supponitur, cogitetur divisum in numero  $m$  tempuscula aequalia  $t, t, t, \dots, t$ , quorum quodvis sit  $t = \frac{T}{m}$  pars *mta* temporis  $T$ .

3. Debebit punctum  $P$  singulis tempusculis  $t, t, t, \dots, t$  ordine naturali sibi succedentibus certa spatiola percurrere, quae omnia simul constituent spatium  $S$  toto tempore  $T$  ex iisdem tempusculis composito percursum.

4. Spatium  $S$  in (3) per (272. 273. §.) erit ergo, prout motus puncti  $P$  fuerit acceleratus vel retardatus, majus vel minus, quam summa spatiolorum, quae a puncto  $P$  singulis tempusculis  $t, t, t, \dots, t$  (2) deberent confici, si illud quovis tempusculo illa determinata celeritate, quam habet initio ejusdem tempusculi, motu aequabili incederet.

5. Idem porro spatium  $S$  in (3) per (272. 273. §.), prout motus puncti  $P$  fuerit acceleratus vel retardatus, debebit esse minus vel majus quam summa spatiolorum, quae a puncto  $P$  singulis tempusculis  $t, t, t, \dots, t$  (2) deberent percurri, si illud quovis tempusculo motu aequabili illa determinata celeritate progredereetur, quam habet in fine ejusdem tempusculi.

6. Celeritas, quam punctum  $P$  in fine cujuscunque temporis  $T$  debet habere, est generatim  $\gamma \pm K T$ , signo  $+$  adhibito pro motu accelerato, et  $-$  pro retardato, ita ut sit  $\gamma = 0$  pro motu uniformiter accelerato puro, vel  $\gamma$  celeritas initialis, qua punctum  $P$  motum uniformiter acceleratum affectum, aut uniformiter retardatum inchoet (276. §.): quod si ergo in hac expressione loco  $T$  terminos seriei  $t, 2t, 3t, 4t, \dots, (m-1)t, m t$  successive substituas, obtinebis sequentes expressiones celeritatum,  
 quas

quas punctum P in fine singulorum in tempusculorum t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali sibi succedentium (2) debet habere.

$$\begin{aligned} & \gamma \pm Kt; \gamma \pm K.2t; \gamma \pm K.3t; - - - - - \\ & - - - - \gamma \pm K(m-1)t; \gamma \pm K.mt. \end{aligned}$$

7. Quare, cum punctum P suum motum acceleratum vel retardatum celeritate  $\gamma$  inchoare supponatur, adeoque hanc ipsam celeritatem initio primi tempusculi t (2) habeat; cumque illud tantum celeritatem initio cujusvis subsequa tempusculi, quantum habet in fine proxime praecedentis tempusculi, debeat habere: habebit punctum P initio singulorum in tempusculorum t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali sibi succedentium (2) sequentes celeritates, ob (6).

$$\gamma; \gamma \pm Kt; \gamma \pm K.2t; \gamma \pm K.3t; - - - - \gamma \pm K(m-1)t.$$

8. Singulae celeritates in (6) ductae in t dabunt ergo per (265. §.) sequentem seriem spatiorum, quae punctum P singulis tempusculis t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali sibi succedentibus percurreret, si id quovis tempusculo illa determinata celeritate, quam habet in fine ejusdem tempusculi, motu aequabili incederet.

$$\begin{aligned} & \gamma t \pm Kt^2; \gamma t \pm K.2t^2; \gamma t \pm K.3t^2; - - - - - \\ & - - - - \gamma t \pm K(m-1)t^2; \gamma t \pm K.mt^2. \end{aligned}$$

9. Singulae vero celeritates in (7) ductae in t dabunt per (265. §.) sequentem seriem spatiorum, quae a puncto P singulis tempusculis t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali sibi succedentibus deberent confici, si illud quovis tempusculo ea celeritate, quam habet initio ejusdem tempusculi, motu aequabili progrediretur.

$$\begin{aligned} & \gamma t; \gamma t \pm Kt^2; \gamma t \pm K.2t^2; \gamma t \pm K.3t^2; \\ & - - - - - \gamma t \pm K(m-1)t^2. \end{aligned}$$

10. Quamobrem obtinebimus, ob (4) (5) per (8) (9) sequentes expressiones.

Pro motu accelerato:

$$S > \left( \begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + \gamma + - - - + \gamma) t \\ + K(1 + 2 + 3 + - - - + (m-1)) t^2; \end{array} \right)$$

$$S < \left( \begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + - - - + \gamma) t \\ + K(1 + 2 + 3 + - - - + m) t^2. \end{array} \right)$$

Pro

Pro motu retardato.

$$S < \left( \begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + \gamma + \dots + \gamma) t \\ -K(1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)) t^2 \end{array} \right);$$

$$S > \left( \begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + \dots + \gamma) t \\ -K(1 + 2 + 3 + \dots + m) t^2 \end{array} \right).$$

Cumque sit  $1 + 2 + 3 + \dots + (m-1) = \frac{1}{2}(m^2 - m)$ ;  $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{1}{2}(m^2 + m)$ ; et per hypothesim in (2)  $t = \frac{T}{m}$ : habebimus etiam

pro motu accelerato

$$S > \gamma T + \frac{1}{2} K T^2 - \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{1}{m};$$

$$S < \gamma T + \frac{1}{2} K T^2 + \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{1}{m};$$

et pro motu retardato

$$S < \gamma T - \frac{1}{2} K T^2 + \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{1}{m};$$

$$S > \gamma T - \frac{1}{2} K T^2 - \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{1}{m}.$$

Ex his autem expressionibus, cum illae pro quovis possibili numero integro  $m$  in (2) debeant subsistere, fuit per (1) sequens expressio generalis quaesiti spatii  $S$ , in qua signum  $+$  vel  $-$  debet adhiberi, prout motus puncti acceleratur vel retardatur.

$$S = \gamma T \pm \frac{1}{2} K T^2.$$

278. Corollarium 1.

Punctum  $P$  progrediens motu uniformiter accelerato puro (274. §.), si id primo minuto secundo acquirat celeritatem  $K$ , percurrat quovis tempore  $T$  ab initio motus computato per (277. §.) spatium  $S = \frac{1}{2} K T^2$ .

279. Corollarium 2.

Si punctum  $P$  incedens motu uniformiter accelerato puro intra tempus  $T$  acquirat celeritatem  $C = K T$  (276. §.), quo fit  $K = \frac{C}{T}$ ; debebit illud tempore  $T$  per (278. §.) conficere spatium  $S = \frac{1}{2} C T$ .

## 280. Corollarium 3.

Punctum P progrediens motu uniformiter accelerato puro per spatium S tempore T tantam habebit in fine ejusdem temporis celeritatem C, ut, si illud hac ipsa celeritate motu aequabili incederet, intra idem tempus T spatium duplum  $2S = CT$  deberet percurrere (279. 265. §.).

## 281. Corollarium 4.

Spatia S, s motu uniformiter accelerato puro temporibus inaequalibus T, t ab initio ejusdem motus computatis percurfa erunt inter se ut quadrata temporum: erit enim per (278. §.)

$$S = \frac{1}{2} K T^2; \quad s = \frac{1}{2} K t^2:$$

$$\text{igitur } S : s = T^2 : t^2.$$

## 282. Corollarium 5.

Eadem spatia S, s motu uniformiter accelerato puro temporibus T, t ab initio motus computatis confecta erunt inter se ut quadrata celeritatum C, c iisdem temporibus genitarum: cum enim sit per (281. §.)

$$S : s = T^2 : t^2; \text{ et per (275. §.)}$$

$$T : t = C : c : \text{ erit } S : s = C^2 : c^2.$$

## 283. Corollarium 6.

Totum tempus T, quo motus uniformiter acceleratus purus puncti P duret, cogitetur dividi in quaecunque tempuscula aequalia t, t, t, t, --- t; intra numero m tempuscula tempus  $= tm$  constituentia sit percursum spatium S, et s sit spatium confectum intra numero  $m - 1$  tempuscula constituentia tempus  $= t(m - 1)$ : erit  $S - s$  spatiolum solo  $m$ to tempusculo percursum, et per (278. §.) habebimus

$$S = \frac{1}{2} K \cdot m^2 t^2; \quad s = \frac{1}{2} K (m - 1)^2 t^2:$$

$$S - s = \frac{1}{2} K (2m - 1) t^2.$$

## 284. Corollarium 7.

Pro  $m = 1, m = 2, m = 3, m = 4,$  et sic porro, obtinebuntur ex  $2m - 1$  numeri impares 1, 3, 5, 7, etc. ordine naturali crescentes: spatiola ergo, quae datum punctum P motu uniformiter accelerato puro progrediens singulis tempusculis aequalibus t, t, t, --- t ab initio motus ordine naturali sibi succedentibus conficiat, erunt inter se ut numeri im-

pares

pares 1, 3, 5, 7, etc. ordine naturali crescentes, seu ut termini seriel  $\frac{1}{2}Kt^2$ . 1,  $\frac{1}{2}Kt^2$ . 3,  $\frac{1}{2}Kt^2$ . 5;  $\frac{1}{2}Kt^2$ . 7, etc. (283. §.).

## 285. Corollarium 8.

Quodlibet punctum P progrediens motu uniformiter accelerato affecto, data celeritate  $\gamma$  inchoato, capiet intra primum minutum secundum certum incrementum K celeritatis  $\gamma$ , et percurrent quovis tempore T ab initio ejusdem motus computato spatium  $S = \gamma T + \frac{1}{2}K T^2$  (274. 277. §.) aequale summae spatiorum, quorum unum  $\gamma T$  motu aequabili celeritate initiali  $\gamma$ , et alterum  $\frac{1}{2}K T^2$  motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus T deberet confici (265. 278. §.).

## 286. Corollarium 9.

Pro celeritate initiali  $\gamma$  motus uniformiter retardati, et decremento K, quod illa primo minuto secundo patiat, percurrent quovis tempore T ab initio ejusdem motus computato spatium  $S = \gamma T - \frac{1}{2}K T^2$  (277. §.) aequale differentiae spatiorum, quorum unum  $\gamma T$  motu aequabili celeritate initiali  $\gamma$ , et alterum  $\frac{1}{2}K T^2$  motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus T deberet confici (265. 278. §.), si in hoc iisdem gradibus cresceret celeritas, quibus gradibus illa in motu retardato decrescit, quo decrementum K genitum primo minuto secundo in motu retardato aequetur celeritati, quam punctum mobile motu accelerato intra primum minutum secundum acquirat.

## 287. Corollarium 10.

Celeritas, quam punctum mobile P progrediens motu uniformiter retardato, celeritateque  $\gamma$  inchoato, intra tempus T ab initio ejusdem motus computatum acquirat, si K sit decrementum celeritatis primo minuto secundo genitum, erit  $C = \gamma - K T$  (276. §.): quare pro  $T = \frac{\gamma}{K}$  evanescet celeritas C. Tempus ergo, quo motus uniformiter retardatus puncti P potest durare, est  $T = \frac{\gamma}{K}$ , quo in (286. §.) substituto obtinebitur spatium, quod punctum P intra totum tempus, quo ejus motus uniformiter retardatus duraverit, conficiet, nimirum

$$S = \gamma \frac{\gamma}{K} - \frac{1}{2} K \cdot \frac{\gamma^2}{K^2} = \frac{\gamma^2}{2K}.$$

## 288. Corollarium II.

Per (278. §.) fit  $S = \frac{\gamma^2}{2K}$  spatium, quod punctum mobile P motu uniformiter accelerato puro intra tempus  $T = \frac{\gamma}{K}$  conficeret; spatium ergo, quod punctum P progrediens motu uniformiter retardato celeritateque  $\gamma$  inchoato intra totum tempus, quo idem motus duraverit, conficiet (287. §.), aequatur spatio, quod motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus potest confici, si in hoc iisdem gradibus crescat celeritas, quibus illa in motu retardato decrevit.

## 289. DEFINITIO.

Punctum mobile, quod aut quiescit, aut eadem perpetuo celeritate et directione movetur, *in eodem statu quietis vel motus perseverare* dicitur: quodsi autem datum punctum de quiete ad motum concitetur, vel actu in motu constitutum certam mutationem in directione vel celeritate subeat; dicitur id *suum statum mutare*. Ubi autem de corpore mobili fermo fuerit, dicitur illud *in eodem statu perseverare*, vel *suum statum mutare*, prout vel omnia ejus puncta (250. §.) in eodem statu perseveraverint, vel omnia aut aliqua suum statum mutaverint.

## 290. Corollarium.

Mutationes status cujuslibet mobilis, puncti et corporis, sunt numero infinitae possibiles (289. 270. §.); nihil vero reperitur in ipsis mobilibus, quod videatur exigere, ut, dum illa suum statum mutant, hanc potius quam aliam quamcunque mutationem subeant: ne igitur sine omni fundamento mobilibus, punctis, vel corporibus, aliquid, quod iis non competat, adtribuamus; quotiescunque certum mobile suum statum mutaverit, causam hujus mutationis extra ipsum quaeremus, ac si illud se ipsum ad mutationem sui status nulla ratione posset determinare.

## Scholion.

Argumentis quidem evidentibus destituimur, quibus evincere liceat, omnia mobilia sic esse comparata, ut illa nunquam possint se ipsa ad mutationem sui status determinare, causas proinde omnium mutationum, quas status mobilium subeant, extra illa necessario esse quaerendas. Non est tamen, cur metuamus, ne, si huic sententiae univ[er]sa motus theoria superstruatur, eadem theoria naturae corporum adversetur, cum omnia  
con-

confectaria indidem legitime fluentia cum perpetuis observationibus, quas circa naturam corporum adhuc facere licuit, quam optime consentiant, ita sane ut hoc ipso consensu ea sententia extra omnē dubium poni videatur.

## 291. DEFINITIO.

*Inertia* mobilis, puncti et corporis, est ejus impotentia se ipsum determinandi ad mutationem sui status: mobile inertia praeditum, vocatur *iners*.

## 292. Corollarium 1.

*Inertia* est communis omnium mobilium proprietas, vi cujus illa in eodem perpetuo statu, in quem semel fuerint reposita, debent perseverare, nisi is ab externis causis turbetur (290. 291. §.).

## 293. Corollarium 2.

Quodlibet punctum mobile, si id quiescat, perpetuo quiescet, nisi ipsum externa aliqua causa ad motum determinet: si autem datum punctum mobile actu moveatur, debet illud secundum eandem directionem eademque celeritate motu aequabili progredi, nisi hanc vel illam, aut utramque externae causae mutant (292. 289. 258. §.).

## 294. DEFINITIO.

Causae externae omnis motus sunt vires motrices (38. §.), aliae *absolutae* seu *invariantes*, et *respectivae* aliae seu *variabiles*. *Vis absoluta* vocatur, quae eadem constanter efficacia datum mobile ad motum urget, seu illud quiescat, seu moveatur: *vis autem variabilis* est, quae quovis momento, durante motu, alia efficacia agit in mobile.

## 295. Corollarium.

Sicut vires agentes in puncta quiescentia per totidem pondera possunt exprimi; sic quoque quaelibet vis agens in datum punctum in motu constitutum poterit uni ponderi aequari, quod aut idem perpetuo maneat, aut durante motu continuo mutetur, prout vis agens fuerit *invariantis* vel *variabilis* (294. 62. §.).

## 296. DEFINITIO.

*Effectus* genuinus cujuslibet vis motricis datum mobile ad motum continuo sollicitantis intra certum tempus productus est spatium, per quod

mobile hoc tempore ob solam vis illud urgentis actionem eodem tempore exertam propellitur.

## 297. Corollarium 1.

Si vis  $V$  punctum  $P$  ad motum continuo sollicitans certo momento cesset agere in punctum  $P$ ; punctum hoc haud quiescet, sed motum, ad quem id determinatum fuerit, vi suae inertiae continuabit, celeritatem, quam eo momento habuerit, perpetuo conservaturum, nisi ejus motui aliqua causa adversetur (292. 293. §.): dum ergo punctum  $P$  a vi  $V$  tempusculis  $a, b, c, \dots p, q, r, \dots z$  ad motum continuo sollicitatur; debet id quovis tempusculo  $q$  et a vi  $V$  per certum spatium propelli, et ob celeritatem intra tempuscula  $a, b, c, \dots p$  acquisitam, quam illud vi suae inertiae toto tempusculo  $q$  conservare cogitur, certum spatium conficere. Quare si punctum  $P$  a vi  $V$  ad motum continuo sollicitatum tempore quocunque  $T$  ex tempusculis  $a, b, c, \dots z$  composito spatium  $S$  dicatur percurrere; necesse est, ut istud sit in duas partes resolvable, quarum una ob inertiam puncti  $P$ , altera vero ob solam actionem vis  $V$  eodem tempore exertam percursa sit, ita ut genuinus effectus vis  $V$  hoc tempore productus unam duntaxat partem totius spatii  $S$  exaequet (296. §.).

## 298. Corollarium 2.

Hinc evidenter elucet, qui possit fieri, ut utcumque cognito spatio  $S$ , quod datum punctum  $P$  a data vi  $V$  ad motum continuo sollicitatum intra certum tempus  $T$  conficiat, effectus genuinus vis  $V$  eodem tempore productus penitus ignoretur (297. §.).

## 299. Corollarium 3.

Quia vero omnis puncti  $P$ , in motu constituti celeritas, independens ab ejus inertia (292. 293. §.), necessario ab aliqua vi debet generari; perspicuum est, nullos effectus genuinos a datis viribus totidem puncta ad motum continuo sollicitantibus intra determinatum tempus  $T$  posse produci, quin illae hac ipsa productione certas celeritates ab iisdem effectibus, quidquid ii sint (298. §.), ita dependentes generent, ut aequalibus effectibus celeritates pariter aequales, majoribus vero minoribusque effectibus celeritates quoque majores minoresque respondeant (296. 257. §.).

## 300. Corollarium 4.

Quamobrem, si quocumque puncta inobilia a totidem viribus invariabilibus et inter se aequalibus, vel variabilibus, quae tamen, utcumque crescentes vel decrecentes, quovis momento durante motu inter se aequales maneant, ad motum secundum datas directiones continuo sollicitentur; debent omnia puncta pari efficacia quovis momento ad motum urgeri (294. §.), singulae idcirco vires producent intra quodvis determinatum tempus et effectus aequales (296. §.), et celeritates aequales (299. §.).

## 301. Corollarium 5.

Quodsi vero duo puncta  $P, p$  a duabus viribus invariabilibus et inaequalibus  $U, u$  ad motum continuo sollicitentur; necesse est, ut efficacia, qua punctum  $P$  a vi majori  $U$  ad motum quovis momento urgetur, major sit quam efficacia, qua punctum  $p$  a vi minori  $u$  ad motum quovis momento impellitur (294 §.): vis major  $U$  producet ergo quovis tempore  $T$  et effectum et celeritatem majorem, quam vis minor  $u$  (296. 299. §.).

## 302. Theorema.

*Si punctum  $P$  celeritate quacunq;  $\gamma$  aliunde ad motum determinatum  $q$  data vi  $V$  tempore  $T$  ad motum continuo sollicitetur; debet vis  $V$  hoc tempore certam celeritatem  $c$  producere, punctumque  $P$  habebit in fine temporis  $T$  celeritatem aequalem summae vel differentiae celeritatum  $\gamma, c$ , prout directio, secundum quam vis  $V$  agit in punctum  $P$ , eadem est cum directione, secundum quam punctum  $P$  celeritate  $\gamma$  ad motum aliunde est determinatum, vel illi opposita.*

## Demonstratio.

Punctum  $P$  cogitur vi suae inertiae quamvis celeritatem, ad quam illud a certa vi determinatur, et recipere, et perpetuo conservare (292. 293. §.): quaelibet autem vis, nisi ipsius actio penitus impediatur, debet singulis tempusculis constituentibus tempus  $T$ , quo punctum  $P$  ab illa ad motum continuo sollicitatur, et effectus aliquos, et certas celeritates producere (296. 299. §.); quae simul sumtae constituent celeritatem  $c$  toto tempore  $T$  productam. Eapropter, si punctum  $P$  initio temporis  $T$  habeat jam celeritatem aliquam  $\gamma$ , debet haec cum celeritate  $c$  ita componi, ut punctum  $P$  in fine temporis  $T$  habeat celeritatem vel summae celeri-

celeritatum  $\gamma$ ,  $c$ , vel differentiae earundem aequalem, prout nimirum directio, secundum quam punctum  $P$  celeritate  $\gamma$  aliunde est ad motum determinatum, eadem est cum directione vis  $V$ , vel ei opposita.

## 303. Corollarium 1.

Quaevis vis invariabilis, datum punctum mobile  $P$  ad motum continuo sollicitans, eundem intra idem tempus producet effectum, eandemque celeritatem, seu punctum  $P$  initio ejusdem temporis quiescat, seu aliunde sit ad motum determinatum (294. 295. 299. §.): punctum ergo  $P$ , celeritate  $\gamma$  aliunde ad motum determinatum, et a data vi invariabili  $V$  ad motum secundum eandem vel oppositam directionem tempore  $T$  continuo sollicitatum, habebit in fine temporis  $T$  celeritatem aequalem summae, casu primo, vel differentiae, casu secundo, celeritatum  $\gamma$ ,  $c$ , quarum posteriorem  $c$  vis  $V$  intra tempus  $T$  produceret, si illa punctum  $P$  de quiete ad motum determinaret, temporeque  $T$  ad motum continuo urgeret (302. §.). Et generatim crescente tempore  $T$ , quo punctum  $P$  urgetur a vi invariabili  $V$ , crescet necessario etiam celeritas puncti  $P$ , si secundum eandem directionem punctum  $P$  et determinatum sit jam ad motum, et ad motum a vi  $V$  impellatur.

## 304. Corollarium 2.

Vis invariabilis  $V$  datum punctum  $P$  de quiete ad motum determinans, et ad motum numero  $m$  tempusculis aequalibus  $t$ ,  $t$ ,  $t$ , - - -  $t$  tempus  $T$  constituentibus continuo secundum determinatam directionem sollicitans, producet singulis tempusculis  $t$  aequales effectus (294. 296. §.), et aequales celeritates, puta  $g$ ,  $g$ ,  $g$ , - - -  $g$  (299. §.), quae celeritatem  $\equiv gm$  toto tempore  $T$  productam constituent: punctum ergo  $P$  habebit in fine primi tempusculi  $t$  celeritatem  $\equiv g$ , et in fine  $m$ pl*i* temporis  $T \equiv tm$  celeritatem  $\equiv gm$  pariter  $m$ pl*am*: si autem punctum  $P$  initio temporis  $T$  ad motum celeritate  $\gamma$  secundum eandem directionem, aut oppositam, aliunde fuerit determinatum; erit ejus celeritas in fine temporis  $T$  aequalis summae casu primo, vel differentiae celeritatum  $\gamma$ ,  $gm$  casu secundo (303. §.).

## 305. Corollarium 3.

Quare si punctum  $P$  a vi invariabili  $V$  ad motum secundum determinatam directionem continuo sollicitatum capiat intra quodcunque tempus  $x$  incrementum vel decrementum celeritatis  $y$ ; debet illud intra tempus

$$X =$$

$X = x \frac{r}{n}$  *rplum* unius *ntae* partis temporis  $x$  capere incrementum vel decrementum celeritatis  $Y = y \frac{r}{n}$  pariter *rplum* unius *ntae* partis incrementi vel decrementi  $y$ . Si enim  $v$  denotet incrementum vel decrementum genitum tempusculo  $= x \frac{r}{n}$ ; erit  $y = vn$  et  $Y = vr$  (304. §.); hinc  $v = y \frac{r}{n}$  et  $Y = y \frac{r}{n}$ .

## 306. Corollarium 4.

Ast si punctum  $P$  vel quiescat initio temporis  $T$ , vel celeritate  $\gamma$  aliunde sit ad motum determinatum, et a vi variabili  $V$  ad motum secundum eandem vel oppositam directionem tempore  $T$  continuo sollicitetur; necesse est, ut vis  $V$  singulis tempusculis aequalibus  $t, t, t, \dots t$  tempus *mplum*  $T = tm$  constituentibus inaequales effectus (294. 296. §.), et inaequales celeritates  $\alpha, \beta, \dots \mu$  producat (299. §.), quae celeritatem  $c$  toto tempore  $T$  productam constituent: punctum  $P$  habebit ergo in fine tempusculi primi  $t$  celeritatem aequalem summae vel differentiae celeritatum  $\gamma, \alpha$ , et in fine temporis  $T$  celeritatem aequalem summae vel differentiae celeritatum  $\gamma, c$  (302. §.), quin ideo incrementum aut decrementum  $c$  celeritatis initialis sit *mplum* incrementi vel decrementi  $\alpha$ , sicut est tempus  $T$  *mplum* tempusculi  $t$ .

## 307. Theorema.

*Omnis vis, quae datum punctum  $P$  secundum determinatam directionem ad motum continuo sollicitans motum ejusdem puncti uniformiter accelerat vel retardat, debet esse invariabilis: et vicissim vis invariabilis motum puncti  $P$  uniformiter accelerabit vel retardabit, prout nimirum punctum  $P$  eo momento, quo vis illa in id agere incipit, quiescit, aut certa celeritate  $\gamma$  ad motum secundum eandem vel oppositam directionem aliunde est determinatum.*

## Demonstratio.

Pars prima theorematis per se ex (306. §.) sequitur; in motu enim uniformiter accelerato vel retardato debet esse incrementum vel decrementum celeritatis tempore *mplo*  $T = tm$  genitum pariter *mplum* incrementi vel decrementi quocunque *simplo* tempusculo  $t$  producti (274. §.), quod, si is motus a vi variabili pendeat, erit impossibile. Pars vero altera potest hoc modo evinci.

1. Vis invariabilis punctum P ad motum continuo sollicitans producet quibuslibet duobus temporibus  $t, T$  ab illo momento, quo ea agere incipit, computatis, incrementa vel decrementsa celeritatis  $g, G$  ipsis temporibus directe proportionalia; adeoque erit motus puncti P ab illa dependens uniformiter acceleratus vel retardatus (274. §.). Erunt enim tempora  $t, T$  commensurabilia vel incommensurabilia (3. §.). Primo casu extabit aliquis numerus integer  $m$  vel fractus  $\frac{m}{n}$ , pro quo fit  $T = tm$  vel  $T = t \frac{m}{n}$  (6. §.): igitur etiam  $G = gm$  vel  $G = g \frac{m}{n}$  (304. 305. §.); proinde semper  $G : g = T : t$ .

2. Quodsi autem tempora  $T, t$  sint incommensurabilia; extabit, sumto quantumcunque magno numero integro  $n$ , alter numerus integer  $m$ , pro quo fiet per (12. §.)

$$T > t \frac{m}{n} \quad \text{et simul} \quad T < t \frac{m+1}{n}.$$

3. Eadem vis producat tempore  $= t \frac{m}{n}$  incrementum vel decrementum celeritatis  $e$ , et tempore  $= t \frac{m+1}{n}$  incrementum vel decrementum  $E$ : cum temporibus  $T, t$  producantur, per hypothefim, incrementa vel decrementsa  $G, g$ ; erit

$$E = g \frac{m+1}{n}, \quad e = g \frac{m}{n} \quad \text{per (305. §.);}$$

$$G > e, \quad G < E \quad \text{ob (2) per (303. §.);}$$

$$\text{igitur} \quad G > g \frac{m}{n} \quad \text{et simul} \quad G < g \frac{m+1}{n}.$$

4. Ob (2) (3) erit itaque etiam nunc  $G : g = T : t$  per (22. §.).

### 308. Theorema.

*Si punctum P a numero m viribus aequalibus et invariabilibus secundum datam directionem ad motum eodem momento determinetur, et tempore T continuo sollicitetur; acquirat punctum P intra tempus T celeritatem implam celeritatis, quam quaevis illarum virium, absentibus reliquis, seorsim eodem tempore generaret.*

Demon-

## Demonstratio.

Cum vis invariabilis punctum P ad motum continuo sollicitans eadem prorsus efficacia quovis momento agat, seu quiescat punctum P, seu moveatur, aut ob suam inertiam (292. 293. §.), aut ob actionem cujuscunque alterius vis actu in illud exertam; ipsum vero punctum P omnem celeritatem, ad quam id a certa vi determinatur, et recipere cogatur, et perpetuo conservare (293. §.): clarum est, quod, si punctum P a numero m viribus aequalibus et invariabilibus ad motum secundum determinatam directionem tempore T continuo sollicitetur, singulae vires eadem celeritates aequales tempore T debeant generare, quas eae seorsim in totidem puncta agentes producerent (300. §.); adeoque punctum P intra tempus T debeat acquirere celeritatem *implam* celeritatis, quam una ejusmodi vis, absentibus omnibus reliquis viribus, eodem tempore produceret.

## 309. Corollarium 1.

Perpicuum est, punctum P eadem prorsus efficacia quovis momento ad motum secundum determinatam directionem sollicitatum iri, seu illud a numero m viribus aequalibus et invariabilibus v, v, v, - - - v, seu ab unica vi  $U = vm$  *impla* vis v, ad motum et determinetur et continuo urgeatur (294. §.): vis *impla*  $U = vm$  producet ergo quovis tempore T celeritatem  $G = gm$  *implam* celeritatis g, quam vis *simpla* g intra idem tempus potest generare (308. §.).

## 310. Corollarium 2.

Vis ergo invariabilis  $X = x \frac{r}{n}$  *rpla* unius *ntae* partis vis x, datum punctum P ad motum determinans et continuo sollicitans, producet quovis tempore T celeritatem  $K = k \frac{r}{n}$  *rplam* unius *ntae* partis celeritatis k, quam vis x intra idem tempus generaret. Si enim vis  $= x \frac{1}{n}$  tempore T generet celeritatem z; erit  $k = zn$  et  $K = zr$  (309. §.): igitur  $z = k \frac{1}{n}$  et  $K = k \frac{r}{n}$ .

## 311. Theorema.

Celeritates G, g, quas duae vires invariables V, v, puncta P, p, ad motum eodem momento determinantes, et continuo sollicitantes, intra idem

tempus  $T$  ab initio motus computatum produxerint, erunt inter se in ratione directa earundem virium, seu erit  $C:c=V:v$ .

Demonstratio.

1. Si vires  $V, v$  sint commensurabiles (3. §.); dabitur certus numerus integer  $m$  vel fractus  $\frac{m}{n}$ , pro quo debet esse  $V=vm$  vel  $V=v\frac{m}{n}$  (6. §.): igitur etiam  $C=cm$  vel  $C=c\frac{m}{n}$  (309. 310. §.); adeoque utroque casu  $C:c=V:v$ .

2. Sint jam vires  $V, v$  incommensurabiles; necesse est, ut accepto quantumvis magno numero integro  $n$  alter numerus integer  $m$  sit possibilis, pro quo per (12. §.) fiat

$$V > v \frac{m}{n} \quad \text{et simul} \quad V < v \frac{m+1}{n}.$$

3. Vis invariabilis  $=v\frac{m}{n}$  producat tempore  $T$  celeritatem  $x$ , et vis  $=v\frac{m+1}{n}$  celeritatem  $X$ : cum, per hypothesim, vires  $V, v$  eodem tempore celeritates  $C, c$  producant; erit

$$x=c\frac{m}{n}, \quad X=c\frac{m+1}{n} \quad \text{per (310. §.);}$$

$$C > x, \quad C < X \quad \text{ob (2) per (301. §.):}$$

$$\text{igitur} \quad C > c\frac{m}{n} \quad \text{et simul} \quad C < c\frac{m+1}{n}.$$

4. Quamobrem, ob (2) (3) per (22. §.), debet etiam nunc esse  $C:c=V:v$ .

312. Corollarium.

Motus punctorum  $P, p$  a viribus invariabilibus  $V, v$  ad illum et determinatorum, et continuo sollicitatorum debet esse uniformiter acceleratus purus (307. 274. §.): spatia ergo  $S, s$ , quae puncta  $P, p$  intra idem tempus  $T$  percurserint, erunt in ratione directa virium  $V, v$ . Si enim tempore  $T$  generentur celeritates  $C, c$ , debet esse

$$S=\frac{1}{2}CT; \quad s=\frac{1}{2}cT; \quad \text{per (279. §.):}$$

$$\text{igitur} \quad S:s=C:c=V:v \quad \text{per (311. §.).}$$

## DISSERTATIO IX.

DE

DETERMINATIONE MOTUS PROGRESSIVI DATARUM  
MASSARUM PER DATAS VIRES.

## 313. DEFINITIO.

*Motus progressivus* dati corporis, vel cujuscunque systematis plurium corporum aut punctorum, vocatur is determinatus motus, quo singula puncta corporis vel systematis secundum directiones inter se parallelas et celeritatibus quovis momento aequalibus promoventur.

## 314. Corollarium 1.

Omne corpus determinatae figurae exhibet unum systema plurium punctorum, quibus minimae particulae materiales, in quas illud est resolvable, possunt substitui (118. §.): quaecunque ergo de motu progressivo systematis plurium punctorum in genere fuerint dicta, ea etiam ad motum progressivum corporum pertinebunt (313. §.).

## 315. Corollarium 2.

Spatia, quae a singulis punctis dati systematis plurium punctorum motu progressivo incedentis intra eadem tempuscula percurruntur, debent esse inter se aequalia: et vicissim motus dati systematis erit progressivus, si singula ejus puncta secundum directiones parallelas moveantur, et quovis cogitabili tempusculo spatia aequalia conficiant (315. 257. §.).

## 316. Corollarium 3.

Determinato motu unici puncti cujuscunque systematis plurium punctorum motu progressivo incedentis, noscetur eo ipso motus totius systematis: singula enim ejus puncta eandem quovis momento celeritatem constantem aut variabilem habebunt, atque hanc ipsam celeritatem totum systema eodem momento habere censebitur; singula porro puncta per idem quovis tempusculo spatium promovebuntur, quod pro spatio a toto systemate intra idem tempusculum confecto habebitur (313. 315. §.).

## 317. Corollarium 4.

Quocunque motu progressivo feratur datum systema plurium punctorum, eadem manebunt distantiae mutuae duorum quorumvis punctorum ejusdem systematis, rectaque inter quaeque duo puncta intercepta perpetuo sibi manebit parallela (313. 315. §.).

## 318. Corollarium 5.

Si singula puncta alicujus systematis secundum directiones inter se parallelas in eandem plagam tendentes ab ejusmodi viribus ad motum continuo sollicitentur, quae sint invariables et inter se aequales, vel variables quovis tamen momento inter se aequales; erit motus totius systematis progressivus, modo singula puncta eo momento, quo illa a datis viribus urgeri incipiunt, vel omni celeritate destituta quiescant, vel omnia secundum directiones datarum virium, aut directiones illis oppositas pari celeritate  $\gamma$  ad motum jam sint determinata (313. 300. 302. §.).

## 319. Corollarium 6.

Eo determinato casu, quo singula puncta dati alicujus systematis, quiescentia vel ad motum secundum directiones inter se parallelas celeritate  $\gamma$  jam determinata, a totidem viribus quovis momento inter se aequalibus secundum easdem celeritatis  $\gamma$ , vel oppositas, directiones ad motum continuo sollicitata fuerint, constiteritque, motum progressivum indidem pendentem (318 §.) uniformiter accelerari vel retardari; debent illae vires esse invariables (313. 307. §.).

## 320. Corollarium 7.

Et vicissim, si singula puncta dati systematis, quiescentia vel ad motum celeritate  $\gamma$  secundum directiones inter se parallelas jam determinata, a totidem viribus aequalibus et invariabilibus secundum easdem celeritatis  $\gamma$ , vel oppositas, directiones ad motum continuo sollicitentur; debet motus progressivus totius systematis indidem pendens (318. §.) uniformiter accelerari vel retardari (313. 307. §.).

## 321. Corollarium 8.

Minimas omnium corporum gravium particulas in quavis altitudine ab aequalibus viribus secundum directiones inter se ad sensum parallelas deorsum sollicitari, ideo in (41. §.) supposuimus, quia id cum omnibus observationibus

tionibus experimentisque peculiari diligentia institutis quam optime consentit : cum ergo ob similes rationes motus corporum gravium libere labentium pro uniformiter accelerato possit haberi ; licebit motum cujuslibet corporis gravis libere ex quacunque altitudine labentis instar motus progressivi (318. §.) uniformiter accelerati spectare, qui a viribus gravitatis aequalibus et invariabilibus minimas ejus particulas secundum directiones inter se parallelas deorsum ad motum continuo urgentibus dependeat (319. §.).

### 322. Corollarium 9.

Quapropter, ubi motus corporum gravium libere labentium determinari debuerit, licebit illa instar totidem punctorum secundum directiones verticales inter se parallelas motu uniformiter accelerato descendendum considerare, quae a viribus aequalibus et invariabilibus secundum easdem directiones deorsum ad motum continuo urgeantur, ideoque quovis tempore ab initio lapsus computato et per aequales altitudines decendant, et aequales celeritates acquirant (321. 316. 311. 312. §.).

### Scholion.

Verum haec omnia de lapsu libero corporum gravium in spatio ab omni aere vacuo debent intelligi. Aer enim resistit descensui corporum gravium, evertitque principia, quibus universa doctrina de libero ipsorum lapsu solet superstrui. Sic e. gr. duo corpuscula, quae in libero aere diversis temporibus ab initio lapsus computatis per aequales altitudines decidunt, contra (322. §.), in spatio ab aere vacuo aequales altitudines eodem tempore, teste experientia, conficiunt. Quaecunque ergo in sequentibus de lapsu corporum gravium fuerint demonstrata, ad descensum ipsorum in spatio ab aere vacuo debebunt restringi.

### 323. Hypothesis.

*Sumto pede Rhenano pro mensura altitudinum, per quas corpora gravia libere labentia descendant; exprimet  $g = 15 \frac{2}{3} = 15, 625$ . ped. altitudinem, per quam quodlibet corpus grave de quiete libere labens primo minuto secundo sui lapsus decidet (322. §.).*

### Scholion.

Qua optima ratione altitudinem hanc investigare licuit, inferius in dissertatione de pendulis videbimus. Interea notent sibi tyrones, numerum 15625 aequari perfecto quadrato numeri 125, adeoque radicem ejus quadraticam

draticam esse hunc ipsum numerum, unde non parum commodi in calculos redundabit.

## 324. Corollarium 1.

Quia motus corporum gravium de quiete libere labentium est uniformiter acceleratus purus (322. 274. §.); necesse est, ut omne corpus grave de quiete libere labens tantam celeritatem  $k$  in fine primi minuti secundi sui lapsus habeat, quanta id motu aequabili per duplam altitudinem  $2g$  decideret (323. 280. §.): omne corpus grave de quiete libere labens acquirat ergo intra primum minutum secundum sui lapsus celeritatem  $k = 2g = 31 \frac{1}{4} = 31, 25$  ped. rhen. per (323. 271. §.).

## 325. Corollarium 2.

Ob (322. 275. 281. 282. §.) erunt celeritates  $C, c$ , quas corpus grave de quiete libere labens intra duo quaecunque tempora  $T, t$  ab initio lapsus computata acquisiverit, inter se in ratione directa temporum; altitudines vero  $A, a$ , per quas illud temporibus  $T, t$  descenderit, erunt inter se ut quadrata temporum  $T, t$ , et ut quadrata celeritatum  $C, c$ . Dato vero tempore  $T$  in minutis secundis (262. 263. §.), quo motus corporis gravis de quiete libere labentis duret, poterit ob (324. 322. §.) per (278. 276. §.) tam altitudo  $A$  lapsus intra tempus  $T$ , quam celeritas eodem lapsu genita, ut sequitur, perfecte determinari.

$$A = gT^2; C = 2gT.$$

E. gr. Ponamus globulum plumbeum tempore  $T = 5$  minutis secundis de quiete libere labi; descendet is hoc tempore per altitudinem

$$S = gT^2 = 15, 625 \cdot 25 = 390, 625 \text{ ped.}$$

Celeritas vero, quam is eodem tempore acquirat, debet esse

$$C = 2gT = 31, 25 \cdot 5 = 156, 25 \text{ ped.}$$

adeoque tanta, quanta is motu aequabili progrediens quovis minuto secundo spatium 156,25 pedum rhenanorum deberet conficere (271. §.).

## 326. Corollarium 3.

Cognita vero altitudine  $A$ , per quam corpus grave certo tempore  $T$  de quiete libere labens decingat, vel celeritate  $C$ , quam illud intra idem tempus acquirat; poterit inveniri ipsum tempus  $T$  in minutis secundis per (325 §.), nimirum

$$T = \sqrt{\frac{A}{g}}; \quad T = \frac{C}{2g}.$$

## 327. Corollarium 4.

Cum debeat esse  $g = \frac{A}{T^2}$  (325. §.), patet, qua methodo altitudinem  $g$  (323. §.) investigare liceret, si tempus  $T$  liberi lapsus alicujus corporis gravis per notam quampiam altitudinem  $A$  in minutis secundis posset determinari. At, quia descensus iste in vacuo deberet fieri (322. §. Schol.), in vacuo autem spatio, quale e. gr. in vitreo recipiente ope antliae pneumaticae obtinetur, tanta altitudo  $A$ , quanta ad accuratam temporis  $T$  observationem esset necessaria, non potest haberi; manifestum est, hanc methodum ad investigationem altitudinis  $g$  non esse idoneam.

## 328. Corollarium 5.

Si  $T = \frac{C}{2g}$  substituas in  $A = gT^2$  (325. §.); obtinebis binas sequentes formulas, quarum una dat altitudinem  $A$ , per quam corpus grave de quiete libere descendens debet labi, ut datam aliquam celeritatem  $C$  acquirat; altera vero celeritatem dat, quam corpus ejusmodi libero lapsu per determinatam altitudinem  $A$  deberet acquirere.

$$A = \frac{C^2}{4g}; \quad C = 2\sqrt{gA}.$$

## 329. Corollarium 6.

Data igitur quacunq; celeritate  $C$  semper poterit assignari altitudo  $A$ , per quam corpus grave de quiete libere labens eandem acquirat celeritatem (328. §.): altitudo ejusmodi  $A$  vocatur *altitudo debita celeritati C*, estque semper  $A = \frac{C^2}{4g}$ , et  $C = 2\sqrt{gA}$  ipsa celeritas *debita altitudini A*.

E. gr. Celeritatem constantem  $C$  puncti  $P$  motu aequabili incedentis (258. §.), aut celeritatem  $C$  puncti  $P$  motu quocunq; inaequabili progradientis acquisitam tempore determinato (271. §.), aequari celeritati, quae altitudini  $A$  1000 pedum rhenanorum sit debita, tantundem significabit, ac celeritatem  $C$  puncti  $P$  illi derterminatae celeritati esse aequalem, quam corpus grave per altitudinem 1000 pedum descendens acquireret, ita ut illa sit

$$C = 2\sqrt{g \cdot 1000} = 2\sqrt{15,625 \cdot 1000} = 250 \text{ ped.}$$

## 330. Corollarium 7.

Si corpus grave de quiete libere labens moveatur quocumque tempusculis aequalibus  $t, t, - - - t$  ab initio lapsus ordine naturali sibi succedentibus; debet illud quolibet mto tempusculo  $t$  ob (322. 324. 283 §.) percurrere altitudinem  $= g(cm - 1)t^2$ .

Quovis igitur mto minuto secundo descendet id per altitudinem  $= g(2m - 1)$ .

Quamobrem spatia singulis minutis secundis ab initio lapsus ordine naturali sibi succedentibus percurfa constituent seriem

$g, 3g, 5g, 7g, 9g, 11g, \text{etc.}$

## 331. Theorema.

Fig. 61. Si corpus PQR (61. Fig.) vel quiescens, vel ad motum progressivum secundum directionem  $gG$  per ejus centrum gravitatis  $g$  transeuntem, aut directionem  $gv$  ei oppositam, celeritate  $\gamma$  jam determinatum, vis quaecunque  $V$  secundum directionem  $gG$  ad motum sollicitare incipiat, et tempore  $T$  continuo sollicitet; erit nunc quoque motus totius corporis progressivus, per vim  $V$  ita determinatus, ac si, illa absente, singulae minimae particulae ejusdem corporis a viribus aequalibus, quarum quaevis sit  $= V \frac{m}{M}$ , secundum directiones directioni  $gG$  parallelas ad motum continuo impellerentur, existente massa totius corporis  $= M$ , et massula cujusvis minimae ejus particulae  $= m$ .

## Demonstratio.

Si quovis momento, quo centrum gravitatis  $g$  corporis PQR a vi  $V$  secundum directionem  $gG$  ad motum sollicitatur, in minimas quasque ejus particulas, ut  $a, b, c, d, \text{etc.}$  cogitentur agere totidem vires aequales  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ , quarum quaevis sit  $= V \frac{m}{M}$ , secundum directiones oppositas  $a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta, \text{etc.}$  parallelas directioni  $gG$ ; erit centrum gravitatis  $g$  corporis PQR idem cum centro aequilibril omnium virium  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$  (152. §.), summaque harum virium aequabitur vi  $V$ , sicut summa massularum  $m, m, m, m, \text{etc.}$  minimarum particularum  $a, b, c, d, \text{etc.}$ , in quas illae agunt, aequatur massae  $M$  totius corporis; consequenter erunt omnes vires  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$  cum vi  $V$  in aequilibrio (128. §.): perspicuum est ergo, vim  $V$  minimas particulas  $a, b, c, d, \text{etc.}$  corporis PQR eadem profus

prorsus efficacia ad motum secundum directiones aA, bB, cC, dD, etc. directioni gG parallelas quovis momento sollicitaturam, qua illae, absente vi V, eodem momento a viribus aequalibus A, B, C, D, etc., quarum quaelibet fit  $= V \frac{m}{M}$ , sollicitarentur, si hae in illas immediate agerent, unde necessario sequitur, quod erat demonstrandum (300. 302. 313. §.).

## 332. Corollarium 1.

Cum datum corpus PQR, vel quiescens, vel celeritate  $\gamma$  ad motum progressivum secundum directionem gG per ejus centrum gravitatis g transeuntem, aut directionem gv illi oppositam jam determinatum, a vi quacunque V ad motum secundum directionem gG continuo sollicitatum fuerit; motus progressivus totius corporis perfecte determinabitur, si unica ejus particula, quam ob parvitatem instar puncti considerare liceat, a vi  $= V \frac{m}{M}$  per massulam m ejusdem particulae, massam M totius corporis, et ipsam vim V determinata, ad motum secundum directionem directioni gG parallelam continuo sollicitari, eoque momento, quo vis  $V \frac{m}{M}$  in illam incipit agere, vel quiescere, vel celeritate  $\gamma$  ad motum secundum eandem, vel oppositam directionem aliunde determinata esse supponatur, tum quaeratur et spatium, quod illa intra datum tempus T debeat percurrere, et celeritas, quam intra idem tempus debeat acquirere (331. 316. §.).

## 333. Corollarium 2.

Vis invariabilis V, datum corpus PQR ad motum secundum directionem gG per ejus centrum gravitatis g transeuntem tempore T continuo impellens, producet motum uniformiter acceleratum vel uniformiter retardatum, si corpus PQR initio temporis T quiescat, aut ad motum progressivum celeritate  $\gamma$  secundum directionem gG vel directionem oppositam gv jam sit determinatum (332. 307. §.).

## 334. Corollarium 3.

Et vicissim, si vis V, datum corpus PQR ad motum secundum directionem gG per illius centrum gravitatis transeuntem tempore T continuo sollicitans, producat motum uniformiter acceleratum vel retardatum, prout corpus PQR initio temporis T quiescit, aut ad motum progressivum

celeritate  $\gamma$  secundum directionem  $gG$ , vel illi oppositam  $gv$  aliunde est determinatum; erit vis  $V$  invariabilis (332. 307. §.).

## 335. Theorema.

*Si duo corpora A, B massarum aequalium  $M, m$  a duabus viribus invariabilibus et inaequalibus  $V, v$  ad motum secundum directiones per illorum centra gravitatis transeuntes determinentur, determinataque continuo sollicitentur; erunt spatia  $S, s$  ab illis intra quodlibet tempus ab initio motus computatum percursa, et celeritates  $C, c$  intra idem tempus acquisitae, inter se in ratione directa earundem virium, seu erit  $S:s=C:c=V:v$ .*

## Demonstratio.

Si  $m$  massula cujusvis minimae particulae utriusque corporis A, B; erit per (333. 332. 311. 312. §.)

$$C:c=V \frac{m}{M} : v \frac{m}{M} \text{ et } S:s=V \frac{m}{M} : v \frac{m}{M} :$$

igitur  $C:c=S:s=V:v$ .

## 336. Theorema.

*Si autem duo corpora A, B massas inaequales  $M, \mu$  habentia a viribus aequalibus et invariabilibus  $V, V$  ad motum secundum directiones per illorum centra gravitatis transeuntes determinentur, et determinata continuo sollicitentur; erunt tam spatia  $S, s$  ab illis intra quodcumque tempus  $T$  percursa, quam celeritates  $C, c$  intra idem tempus acquisitae, inter se in ratione inversa massarum, seu erit  $C:c=S:s=\mu:M$ .*

## Demonstratio.

Si  $m$  denotet massulam cujusvis minimae particulae corporis tam A quam B; debet esse per (333. 332. 311. 312. §.)

$$C:c=V \frac{m}{M} : V \frac{m}{\mu} \text{ et } S:s=V \frac{m}{M} : V \frac{m}{\mu} :$$

igitur  $C:c=S:s=\frac{m}{M} : \frac{m}{\mu} = \mu:M$ .

## 337. Theorema.

*Si duo corpora massarum inaequalium  $M, m$  a viribus inaequalibus et invariabilibus  $V, v$  ad motum secundum directiones per illorum centra gravitatis*

*vitatis transeuntes determinentur, determinataque continuo sollicitentur; erunt tam spatia S, s ab illis quovis tempore T confecta, quam celeritates C, c intra idem tempus acquisitae, inter se ut vires divisiae per massas.*

## Demonstratio.

Tertium aliquod corpus habens massam M, a vi invariabili v ad motum secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem determinatum, continuoque sollicitatum conficiat tempore T spatium s', et acquirat celeritatem c'; debeat esse per (335, 336. §.)

$$C:c' = V:v \text{ et } S:s' = V:v;$$

$$c':c = m:M \text{ et } s':s = m:M;$$

igitur debet esse

$$Cc':c'c = Vm:vM \text{ et } Ss':s's = Vm:vM;$$

$$\text{hinc } C:c = \frac{V}{M} : \frac{v}{m} \text{ et } S:s = \frac{V}{M} : \frac{v}{m}.$$

## 338. Problema.

*Data massa M corporis Z quod a data vi invariabili V secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem de quiete ad motum determinetur, et dato tempore T continuo sollicitetur; invenire spatium S, quod idem corpus intra tempus T percurret, et celeritatem C, quam eodem tempore acquirat.*

## Solutio.

1. Si corpus Z cogitetur ob solam suam gravitatem de quiete libere labi; descendet illud motu progressivo tempore T per altitudinem  $= gT^2$ , et acquirat hoc tempore celeritatem  $= 2gT$  (325. §.): motus vero hic potest censerī ab una vi invariabili ponderi ejusdem corporis aequali productus, quae corpus Z omni gravitate destitutum secundum directionem verticalem per ejus centrum gravitatis transeuntem deorsum continuo urgeat (332. 321. 46. §.).

2. Cum igitur corpus Z a vi invariabili V ad motum secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem continuo sollicitatum spatium S tempore T percurret, et celeritatem C acquirat; necesse est, ut sit S ad  $gT^2$ , et C ad  $2gT$ , sicut vis V ad vim aequalem ponderi corporis Z, ob (1) per (335. §.).

3. Denotante ergo P pondus corporis Z; habebimus per (2) sequentes proportionones:

$$S : gT^2 = V : P \quad \text{et} \quad C : 2gT = V : P.$$

Cum porro omnis vis V uni ponderi aequetur (295. §.); erunt V, P quanta homogenea, pro quorum communi mensura (14. §.) certum pondusculum p debet accipi, eritque

$$S : gT^2 = \frac{V}{p} : \frac{P}{p} \quad \text{et} \quad C : 2gT = \frac{V}{p} : \frac{P}{p}.$$

4. Pro mensura massae M corporis Z fumi debet in hac hypothefi massula m, ejus pondus aequetur pondusculo p pro mensura ponderum V, P sumto, quo fiat  $\frac{M}{m} = \frac{P}{p}$  (52. §.): igitur erit etiam

$$S : gT^2 = \frac{V}{p} : \frac{M}{m} \quad \text{et} \quad C : 2gT = \frac{V}{p} : \frac{M}{m}.$$

Quamobrem, quia  $\frac{V}{p}$ ,  $\frac{M}{m}$  sunt exponentes rationum geometricarum vis V ad illius mensuram p, et massae M ad ejusdem mensuram m, si deinceps literae V, M eosdem exponentes expriment, sicut similes numeri per S, C, T debent intelligi (263. §.); habebimus

$$S : gT^2 = V : M \quad \text{et} \quad C : 2gT = V : M;$$

$$\text{hinc } S = g \frac{V}{M} T^2; \quad C = 2g \frac{V}{M} T.$$

### 339. Corollarium 1.

Cognita igitur altitudine g (323. §.), per quam quodvis corpus grave de quiete libere labens primo minuto secundo sui lapsus debet decidere, facile per (338. §.) determinabitur tam spatium S, quod datum corpus, a data vi V invariabili secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem de quiete ad motum determinatum et continuo sollicitatum, dato quocunque tempore T percurreret, quam celeritas C, quam illud eodem tempore acquireret.

### 340. Corollarium 2.

Ex (338. §.) fluunt binae sequentes formulae, quarum prior dabit spatium, quod corpus datae massae M, a data vi invariabili V ad motum

secun-

secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem continuo sollicitatum, debet conficere, ut id datam celeritatem  $C$  acquirat; altera vero dabit ipsam celeritatem  $C$ , quam illud eo tempore, quo datum spatium  $S$  percurritur, debet acquirere.

$$S = \frac{MC^2}{4gV}; \quad C = 2\sqrt{\frac{gVS}{M}}$$

## 341. Corollarium 3.

Quodsi autem quaeratur tempus  $T$ , quo corpus datae massae  $M$ , a data vi invariabili  $V$  ad motum secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem continuo debet sollicitari, ut illud datum spatium  $S$  percurrat, vel determinatam celeritatem  $C$  acquirat; erit per (338. §.)

$$T = \sqrt{\frac{MS}{gV}}; \quad T = \frac{MC}{2gV}$$

## 342. Corollarium 4.

Quoties datum corpus motu progressivo ita debuerit incedere, ut illud quovis dato tempore  $T$  determinatum spatium  $S$  conficiat, determinatamque celeritatem  $C$  acquirat; toties poterit determinari vis una invariabilis  $V$ , a qua datum corpus eo fine secundum directionem per illius centrum gravitatis transeuntem ad motum continuo debebit sollicitari: erit enim per (338. 340. §.)

$$V = \frac{MS}{gT^2}; \quad V = \frac{MC}{2gT}; \quad V = \frac{MC^2}{4gS}$$

## 343. Problema.

*Data vi invariabili  $V$ , quae corpus  $Z$  massae  $M$ , ad motum progressivum celeritate  $v$  secundum directionem per illius centrum gravitatis transeuntem aliunde determinatum, ad motum secundum eandem vel oppositam directionem tempore  $T$  continuo sollicitet: invenire tam spatium  $S$ , quod a corpore  $Z$  intra tempus  $T$  debebit confici, quam celeritatem  $C$ , quam illud in fine temporis  $T$  debebit habere.*

## Solutio.

1. Ob (332. 333. §.) quaerendum est spatium  $S$ , quod quaevis minima corporis  $Z$  particula, ob vim invariabilem  $= V \frac{m}{M}$  illam ad motum continuo

continuo follicitantem motu uniformiter accelerato vel retardato celeritateque  $\gamma$  inchoato progrediens, intra tempus  $T$  percurreret, una cum celeritate  $C$ , quam illa in fine temporis  $T$  deberet habere.

2. Si corpus  $Z$  a vi invariabili  $V$  de quiete ad motum determinaretur, continuoque tempore  $T$  follicitaretur; deberet quaevis minima ejus particula motu uniformiter accelerato puro incedens (333. 338. 316. §.) spatium  $=g \frac{V}{M} T^2$  conficere, et celeritatem  $=2g \frac{V}{M} T$  acquirere.

3. Absente vero omni vi  $V$  percurreret quaevis particula corporis  $Z$  motu aequabili celeritate initiali  $\gamma$  spatium  $=\gamma T$  intra tempus  $T$  (316. 265. §.).

4. Quare, si directio vis  $V$  corpus  $Z$  ad motum continuo follicitantis, eadem sit cum directione celeritatis initialis  $\gamma$ , quo casu motus progressivus corporis  $Z$  debet uniformiter accelerari (333. §.); percurreret ob (1) corpus  $Z$  tempore  $T$  sequens spatium  $S$  per (285. §.) summae spatiorum (2) (3) aequale, et habebit in fine ejusdem temporis sequentem celeritatem  $C$  per (302. §.) aequalem summae celeritatis initialis  $\gamma$ , celeritatisque (2).

$$S = \gamma T + g \frac{V}{M} T^2; \quad C = \gamma + 2g \frac{V}{M} T.$$

5. Si autem directio vis invariabilis  $V$  corpus  $Z$  ad motum continuo follicitantis opposita sit directioni celeritatis  $\gamma$ , adeoque motus progressivus corporis  $Z$  uniformiter retardetur (333. §.); debet ob (1) corpus  $Z$  tempore  $T$  percurrere sequens spatium  $S$  per (286. §.) aequale differentiae spatiorum (2) (3), et sequentem celeritatem  $C$  in fine temporis  $T$  habere, utpote aequalem differentiae celeritatis initialis  $\gamma$ , celeritatisque (2) per (302. §.).

$$S = \gamma T - g \frac{V}{M} T^2; \quad C = \gamma - 2g \frac{V}{M} T.$$

#### 344. Corollarium 1.

Cum pro  $T < \frac{M\gamma}{2gV}$  valor celeritatis  $C$  sit positivus, pro  $T = \frac{M\gamma}{2gV}$  vero fiat celeritas  $C = 0$ , et pro  $T > \frac{M\gamma}{2gV}$  induat  $C$  valorem negativum (343. §.); perspicuum est, motum corporis  $Z$  secundum directionem celerita-

celeritatis initialis  $\gamma$  uniformiter retardatum iri, quamdiu fuerit tempus, quo is duret,  $T < \frac{M\gamma}{2gV}$ ; durabit porro hic motus retardatus tempore  $T = \frac{M\gamma}{2gV}$ , intra quod corpus Z percurreret spatium  $S = \frac{M\gamma^2}{4gV}$  (343. §.); crescente vero tempore ultra  $T = \frac{M\gamma}{2gV}$  progredietur corpus Z ob solam vim  $V$  secundum directionem hujus vis oppositam directioni celeritatis initialis  $\gamma$  motu jam uniformiter accelerato (333. §.).

## 345. Corollarium 2.

Si corpori gravi Z imprimatur determinata celeritas  $\gamma$  secundum directionem verticalem versus terrae superficiem, cum hoc casu vis  $V$ , ipsum ad motum secundum eandem directionem deorsum continuo sollicitatura debeat aequari ponderi ejusdem corporis; erit  $V = M$  (338. §. 4. n.): altitudo ergo  $A$ , per quam corpus grave Z hoc casu intra datum tempus  $T$  labetur, et celeritas  $C$ , quam in fine ejusdem temporis habebit, erit per (343. §.)

$$A = \gamma T + gT^2; \quad C = \gamma + 2gT.$$

## 346. Corollarium 3.

Si vero corpori gravi Z imprimatur determinata celeritas  $\gamma$  secundum directionem verticalem oppositam directioni gravitatis (42. §.); erit nunc quoque  $V = M$  (345. §.), corpusque Z ascendet quovis tempore  $T$  per altitudinem  $A = \gamma T - gT^2$ , et habebit in fine ejusdem temporis  $T$  celeritatem  $C = \gamma - 2gT$  (343. §.), quae pro  $T = \frac{\gamma}{2g}$  fiet aequalis nihilo, quo ipso per  $T = \frac{\gamma}{2g}$  determinatur totum tempus ascensus per altitudinem  $A = \frac{\gamma^2}{4g}$ : per hanc ergo altitudinem ascendet corpus Z motu uniformiter retardato (274. §.), tum labetur deorsum ob solam vim gravitatis motu uniformiter accelerato puro (321. 274. §.).

## 347. Problema.

*Data massa  $M$  corporis  $Q$ , quod a data vi variabili secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem ad motum continuo urgeatur, eoque momento, quo eadem vis in illud agere incipit, quiescat, aut ad motum progressivum determinata celeritate secundum directionem vis impellentis, vel directionem ei oppositam jam sit determinatum; investigare celeritatem, quam corpus  $Q$  intra datum quodcunque tempus debebit acquirere.*

## Solutio.

1. Quidquid fit vis variabilis corpus Q ad motum continuo follicitans; producet ea motum progrellivum vel acceleratum, vel retardatum (331. 332. 302. 268. §.): quodsi ergo ab eo momento, quo illa in corpus Q agere incipiat, effluat tempus T, et celeritas corporis Q in fine hujus temporis sit C; necesse est, ut, si tempus T crescat quocunque tempusculo  $\Delta T$ , celeritas C intra hoc tempusculum vel certum incrementum  $\Delta C$  capiat, vel decrementum aliquod  $\Delta C$  patiat.

2. Quacunque porro lege vis variabilis corpus Q impellens ad motum durante motu mutetur, quomocunque ea ergo tempore T crescat vel decrescat, supponatur illa esse  $= V$  in fine temporis T, crescenteque tempore T tempusculo  $\Delta T$ , hoc ipso tempusculo incrementum aliquod  $\Delta V$  capere, vel decrementum  $\Delta V$  pati: quare erit V vis, quae initio tempusculi  $\Delta T$  aget in corpus Q; ea deinde toto hoc tempusculo crescet vel decrescet, eritque  $= V + \Delta V$  vel  $= V - \Delta V$  in fine ejusdem tempusculi.

3. Si corpus Q toto tempusculo  $\Delta T$  a vi invariabili V vel  $V + \Delta V$  aut  $V - \Delta V$  ad motum continuo follicitaretur; incrementum vel decrementum celeritatis, quod illa hoc tempusculo produceret, esset aequale celeritati, quam eadem vis corpus Q de quiete ad motum determinans et tempusculo  $\Delta T$  continuo follicitans intra hoc tempusculum generaret (332. 303. §.): idem ergo incrementum vel decrementum esset per (338. §.)  $2g \frac{V}{M} \Delta T$ , vel  $2g \frac{V + \Delta V}{M} \Delta T$ ; aut  $2g \frac{V - \Delta V}{M} \Delta T$ .

4. Quodsi jam vis corpus Q tempusculo  $\Delta T$  ad motum continuo impellens continuo crescat; erit illa quovis momento durante motu tempusculo  $\Delta T$  major quam V et minor quam  $V + \Delta V$  per (2): incrementum ergo vel decrementum celeritatis  $\Delta C$ , quod illa tempusculo  $\Delta T$  producit (1), debet esse majus incremento vel decremento, quod vis invariabilis  $= V$ , et simul minus incremento vel decremento, quod vis invariabilis  $= V + \Delta V$  eodem tempusculo produceret. Quamobrem habebimus hoc casu per (3)

$$\Delta C > \frac{2gV}{M} \Delta T \text{ et simul } \Delta C < \frac{2g(V + \Delta V)}{M} \Delta T.$$

5. Si autem vis corpus Q tempusculo  $\Delta T$  continuo urgens continuo decreseat; debet illa quovis momento durante motu tempusculo  $\Delta T$  minor esse quam  $V$ , et major quam  $V - \Delta V$  per (2): incrementum itaque vel decrementum celeritatis  $\Delta C$ , quod illa intra tempusculum  $\Delta T$  generat, erit minus incremento vel decremento, quod vis invariabilis  $= V$ , et majus incremento vel decremento, quod vis invariabilis  $= V - \Delta V$  eodem tempusculo produceret. Quare ob (3) habebimus

$$\Delta C < \frac{2gV}{M} \Delta T \text{ et simul } \Delta C > \frac{2g(V - \Delta V)}{M} \Delta T.$$

6. Leges, quibus vires variabiles possunt crescere durante motu et decrescere, sunt numero infinitae possibiles (294. §.): est autem impossibile motum corporis Q ab ejusmodi vi pendentem perfecte determinare, nisi noscatur lex, qua illa durante motu mutatur. Cogimur ergo supponere, legem, qua vis variabilis  $V$  corpus Q ad motum continuo impellens, crescit vel decrescit crescente tempore  $T$ , quo motus ab illa dependens durat, eoque ipso etiam functionem temporis  $T$  eidem vi aequalem esse assignabilem, quo pro certis coefficientibus  $l, m, n$ , etc. independentibus a tempusculo  $\Delta T$  differentia  $\Delta V$  certae seriei  $l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \dots$  aequetur (Vol. I. §. 84.).

7. Hinc (4) (5) (6) fiet pro quovis cogitabili quantumlibet parvo tempusculo  $\Delta T$

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} \text{ et simul } \frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} + \frac{2g}{M} (l\Delta T + m\Delta T^2 + \text{etc.});$$

vel

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} \text{ et simul } \frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} - \frac{2g}{M} (l\Delta T + m\Delta T^2 + \text{etc.});$$

8. Ex his denique expressionibus obtinebimus per (Vol. I. §. 131.) sequentem expressionem exponentis rationis differentialis celeritatis  $C$  consideratae instar unius functionis temporis variabilis  $T$ , qui, si crescente tempore decreseat celeritas, cum signis contrariis sumetur (Vol. I. §. 132.)

$$\epsilon C = \frac{2g}{M} V \epsilon T.$$

9. Ab hujus exponentis differentialis integration dependebit jam inventio celeritatis  $C$  debitae tempori  $T$ , quam facile perficies, si antea

vim  $V$  per certam functionem vel temporis  $T$ , vel ipsius celeritatis  $C$  exprimas: utroque enim casu obtinebitur in (8) aequatio differentialis intra binas tantum variables, nimirum  $C$  et  $T$ . Ut vero pars constans quaesiti integralis per (Vol. I. §. 238.) rite determinetur, attendendum est ad initium motus datae massae: ubi enim ista de quiete ad motum a data vi fuerit determinata; debet esse  $C=0$  pro  $T=0$ : si vero ea eo momento, quo a data vi urgeri incipit, aliunde fit ad motum celeritate  $\gamma$  determinata; erit  $C=\gamma$  pro  $T=0$ .

### 348. Problema.

*Data functione exprimente celeritatem  $C$ , quam corpus motu progressivo inaequabili incedens intra determinatum tempus  $T$  acquirat; invenire spatium  $S$ , quod illud hoc tempore conficiet.*

### Solutio.

1. Si tempus  $T$ , quo motus duret, crescat quocunque tempusculo  $\Delta T$ ; debet etiam spatium  $S$  eo tempore percursum crescere aliquo spatiolo  $\Delta S$ .

2. Celeritas vero  $C$  debita tempori  $T$  capiet tempusculo  $\Delta T$  incrementum aliquod  $\Delta C$  vel patietur decrementum  $\Delta C$ , quo fiat, ut celeritas corporis initio tempusculi  $\Delta T$  sit  $C$ , eaque toto tempusculo  $\Delta C$  crescens vel decrescens in fine ejusdem tempusculi in  $C + \Delta C$  vel  $C - \Delta C$  abeat.

3. Quare, si datum corpus incedat celeritate continuo crescente; erit spatiolum  $\Delta S$ , quod illud tempusculo  $\Delta T$  conficit (1), majus spatiolo  $C \Delta T$ , quod celeritate invariabili  $= C$ , et simul minus spatiolo  $(C + \Delta C) \Delta T$ , quod celeritate invariabili  $= C + \Delta C$  tempusculo  $\Delta T$  percurreretur (265. §.), per (2) ob (257. §.), id est: erit semper

$$\Delta S > C \Delta T \text{ et simul } \Delta S < (C + \Delta C) \Delta T.$$

4. Si autem datum corpus progrediatur celeritate continuo decrecente; necesse est, ut spatiolum  $\Delta S$ , quod illud tempusculo  $\Delta T$  percurrit (1), sit minus spatiolo  $C \Delta T$ , quod celeritate invariabili  $C$ , et majus spatiolo  $(C - \Delta C) \Delta T$ , quod celeritate invariabili  $= C - \Delta C$  intra tempusculum  $\Delta T$  conficeretur (265. §.), ob (2) per (257. §.), id est: erit semper

$$\Delta S < C \Delta T \text{ et simul } \Delta S > (C - \Delta C) \Delta T.$$

5. Sed,

5. Sed, quia celeritas  $C$  aequatur certae functioni ipsius temporis  $T$ , dari debent coefficientes  $l, m, n$ , etc. independentes a  $\Delta T$ , pro quibus sit  $\Delta C = l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}$  (Vol. I. §. 84.); habebimus ergo in (3) (4)

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} > C \quad \text{et} \quad \frac{\Delta S}{\Delta T} < C + l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.};$$

vel

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} < C \quad \text{et} \quad \frac{\Delta S}{\Delta T} > C - l\Delta T - m\Delta T^2 - n\Delta T^3 - \text{etc.}$$

6. Utroque casu debeat itaque per (Vol. I. §. 131.) exponens ratio-  
nis differentialis spatii  $S$  spectati instar unius functionis temporis  $T$  esse

$$\epsilon S = C \epsilon T.$$

7. Expressa ergo celeritate  $C$  debita tempori  $T$  per certam functionem temporis  $T$ , aut spatii  $S$ , vel expresso tempore per unam functionem celeritatis  $C$ , aut spatii  $S$ , complectetur aequatio differentialis  $\epsilon S = C \epsilon T$  duas tantum variables, ejusque integratio dabit spatium  $S$  per celeritatem  $C$  vel tempus  $T$ .

### 349. Corollarium 1.

In omni motu inaequabili progressivo, quo intra tempus  $T$  conficiatur spatium  $S$  et generetur celeritas  $C$ , accepto tempore  $T$  pro variabili absoluta (Vol. I. §. 4.), quo fiat  $\epsilon T = 1$  (Vol. I. §. 124.), habebimus per (348. §.)

$$\frac{\epsilon S}{\epsilon T} = \dot{C}; \quad \epsilon \frac{\epsilon S}{\epsilon T} = \frac{\epsilon^2 S}{\epsilon T} = \epsilon C.$$

### 350. Corollarium 2.

In (348. §.) est  $\epsilon T = \frac{\epsilon S}{C}$ : pro hoc valore in (347. §.) substituto inveniemus sequentes formulas, quarum ope subsidio calculi integralis relatio inter spatium  $S$  motu inaequabili dependente a vi variabili  $V$  intra quodcumque tempus confectum et celeritatem  $C$ , quam mobile in fine ejusdem temporis debet habere, poterit determinari, modo ipsa vis variabilis  $V$  per certam functionem celeritatis  $C$  vel spatii  $S$  possit exprimi.

$$C \epsilon C = \frac{2g}{M} V \epsilon S.$$

## 351. Corollarium 3.

Et considerato tempore  $T$ , quo vis variabilis  $V$  datam massam  $M$  secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem ad motum continuo sollicitet, instar variabilis absolutae (Vol. I. §. 4.), per cujus functiones spatium  $S$ , celeritas  $C$ , et ipsa vis  $V$  debeant determinari; obtinebimus ex (347. 349. §.) sequentem aequationem differentialem, ex qua, si antea vis variabilis  $V$  per congruam functionem temporis  $T$  exprimatur, ope primae integrationis quotiens  $\frac{\epsilon S}{\epsilon T}$  seu exponens  $\epsilon S$ , et ope secundae integrationis ipsum spatium  $S$  poterit derivari.

$$\epsilon \left( \frac{\epsilon S}{\epsilon T} \right) = \frac{\epsilon^2 S}{\epsilon T} = \frac{2g}{M} V \epsilon T;$$

$$\text{vel } \epsilon^2 S = \frac{2g}{M} V \epsilon T^2.$$

## 352. Theorema.

Fig. 62. Datum quodcunque systema plurium massarum  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$  (62. Fig.) incedet eodem motu progressivo, seu singulae massae  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$  a totidem viribus  $A, B, C, \dots P$ , iisdem massis proportionalibus ad motum secundum directiones  $aA, bB, cC, \dots pP$  inter se parallelas et per illarum centra gravitatis transeuntes continuo sollicitentur, seu, illis absentibus, totum systema ab unica  $V$  aequali summae virium  $A, B, C, \dots P$  secundum directionem  $GV$  per centrum gravitatis systematis transeuntem et parallelam directionibus virium  $A, B, C, \dots P$  ad motum continuo urgeatur.

## Demonstratio.

1. Possibile est, ut eo momento, quo datum systema a datis viribus urgeri incipit, totum systema vel quiescat, vel ad motum progressivum certa celeritate  $v$  secundum earundem virium directiones vel directiones illis oppositas jam sit determinatum (313. §.).

2. Quodsi ergo singulae massae  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$  a totidem viribus  $A, B, C, \dots P$  ad motum continuo sollicitentur; debebunt hae ejusmodi motus progressivos in massis  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$  producere, quales producerentur, si, denotante  $m$  massulam cujuslibet minimae particulae cujusvis massae  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$ , quaevis minima particula massae  $A^1$  a

vi  $A \frac{m}{A}$ , quaevis massae  $B^1$  a vi  $B \frac{m}{B^1}$ , quaevis massae  $C^1$  a v  $C \frac{m}{C^1}$ ,  
 - - - quaevis massae  $P^1$  a vi  $P \frac{m}{P^1}$ , ad motum continuo sollicitaretur  
 (331. §.): cum igitur per hypothesim fit  $A:B = A^1:B^1$ ,  $A:C = A^1:C^1$ ,  
 - - -  $A:P = A^1:P^1$ , adeoque  $B = A \frac{B^1}{A^1}$ ,  $C = A \frac{C^1}{A^1}$ , - - -  $P = A \frac{P^1}{A^1}$ ;  
 perspicuum est, vires  $A, B, C, - - - P$  ejusmodi motus in massis  $A^1, B^1,$   
 $C^1 - - - P^1$  producturas, quales producerentur, si quaevis minima particula  
 cujuslibet massae a vi  $= A \frac{m}{A^1}$  ad motum continuo urgeretur. Hinc et  
 ex (1) evidenter jam sequitur, motum totius systematis futurum progres-  
 sivum, qualem vires aequales  $A \frac{m}{A^1}$ ,  $A \frac{m}{A^1}$ ,  $A \frac{m}{A^1}$ , etc. producerent, si  
 ab his, absentibus viribus  $A, B, C, - - - P$ , singulae minimae particulae  
 singularum massarum  $A^1, B^1, C^1, - - - P^1$  secundum directiones parallelas  
 directionibus a  $A, bB, cC, - - - pP$ , ad motum continuo urgerentur  
 (318. §.).

3. Si vero totum systema ab unica vi  $V = A + B + C + - - - + P$   
 ad motum secundum directionem  $GV$  per centrum gravitatis ejusdem sy-  
 stematis transeuntem impellatur, quia totum systema instar unius corporis  
 rigidi determinatae figurae, cujus massa aequetur summae  $A^1 + B^1 + C^1 +$   
 $- - - + P^1$  massarum illud constituentium, potest considerari (118. §.);  
 producet vis  $V$  motum progressivum, qualem, absente illa, producerent  
 vires aequales minimas quasque particulas massarum  $A^1, B^1, C^1, - - - P^1$   
 ad motum secundum directiones parallelas directioni  $GV$  continuo solli-  
 citantes, si, denotante  $m$  massulam cujusvis particulae, quaevis earundem  
 virium aequalium esset  $= V \frac{m}{A^1 + B^1 + C^1 + - - - + P^1}$  (331. §.), vel  

$$= \frac{m(A + B + C + - - - + P)}{A^1 + B^1 + C^1 + - - - + P^1} = m \frac{\left( A + A \frac{B^1}{A^1} + A \frac{C^1}{A^1} + - - - + A \frac{P^1}{A^1} \right)}{A^1 + B^1 + C^1 + - - - + P^1} = A \frac{m}{A^1},$$

ob  $B = A \frac{B^1}{A^1}$ ,  $C = A \frac{C^1}{A^1}$ , - - -  $P = A \frac{P^1}{A^1}$ , ut in (2).

4. Utroque ergo casu (2) (3), incedet totum systema tali motu pro-  
 gressivo, qualis locum haberet, si singulae minimae particulae singularum  
 massarum  $A^1, B^1, C^1, - - - P^1$  idem systema constituentium a viribus aequa-  
 libus,

libus, quarum quaevis sit  $= A \frac{m}{A'}$ , secundum directiones parallelas ad motum continuo urgerentur, eoque momento, quo vires ejusmodi agere inciperent, illae particulae vel quiescerent, vel celeritate  $\gamma$  ad motum secundum easdem vel oppositas directiones ob (1) jam essent determinatae.

## 353. Corollarium.

Omne corpus, si illud in quascunque partes, quarum massae sint  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$ , mente resolvatur, potest considerari instar unius systematis plurium massarum (118. §.): quodsi ergo datum corpus, vel quiescens, vel ad motum progressivum celeritate  $\gamma$  jam determinatum, ad motum aut ab unica vi  $V$  aequali summae virium  $A, B, C, \dots P$  secundum directionem parallelam directioni celeritatis  $\gamma$  et per centrum gravitatis totius corporis transeuntem, vel a pluribus viribus  $A, B, C, \dots P$  continuo urgeatur, quae totidem corporis partes  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$  secundum directiones per illarum centra gravitatis transeuntes et directioni celeritatis  $\gamma$  parallelas ad motum continuo impellant, atque inter se sint ut massae  $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$ ; debeat totum corpus utroque casu eodem motu progressivo incedere (352. §.).

## Scholion.

Inter omnes possibiles massarum motus simplicissimus est motus progressivus, cujus palmares proprietates in praecedentibus exposuimus: verum, quia ad illius principia determinatio omnium aliorum motuum potest revocari, plurimum interest, et vim illorum, et usum quam distinctissime habere perspectum. Eapropter subjungam exempla aliquot, usum praecedentis theoriae illustratura, quo melius tyrones ad adplicationes, quales per decursum horum opusculorum explanabuntur, possint praeparari.

## 354. Problema.

Fig. 63. *Data massa M (63. Fig.) determinatur de quiete ad motum a vi variabili V secundum directionem GA per ejus centrum gravitatis G transeuntem, ab eademque tempore T continuo urgetur; cognita functione celeritatis C tempore T debitae, per quam vim V exprimere liceat; determinare motum massae M.*

Solutio.

## Solutio.

1. Clarum est, massam  $M$  motu progressivo secundum directionem  $GA$  incessuram (331. §.), cujus determinatio exigit, ut et celeritas  $C$ , quam illa intra datum quodcumque tempus  $T$  acquirat, et spatium  $S$  definiatur, quod intra idem tempus debeat conficere.

2. Vis massam  $M$  ad motum continuo sollicitans crescit continuo vel decrescit, ita ut in fine temporis  $T$  determinatae sit magnitudinis, quam, per hypothesim, determinata functio  $V$  celeritatis  $C$  intra idem tempus genitae debeat exprimere. Quodsi ergo hanc functionem loco  $V$  in (347. §.) substituas, complectetur aequatio differentialis  $\epsilon C = \frac{2gV}{M} \epsilon T$  binas tantum variables  $C$  et  $T$ , quae separatae dabunt  $\frac{\epsilon C}{V} = \frac{2g}{M} \epsilon T$ : igitur integrando invenies aequationem  $\int \frac{\epsilon C}{V} = \frac{2g}{M} T$ , per quam relatio inter celeritatem  $C$  et tempus  $T$  perfecte determinabitur.

3. Per (2) poterit investigari celeritas  $C$  tempori  $T$  debita: si illa determinetur per quamcunque functionem temporis  $T$ , substituta hac functione loco  $C$  in (348. §.), obtinebitur nova aequatio differentialis  $\epsilon S = C \epsilon T$  inter variables  $S$  et  $T$  separatas, cujus integratio dabit spatium  $S = \int C \epsilon T$  intra tempus  $T$  percurrendum.

4. Et si spatium  $S$  per celeritatem  $C$  determinare cupias, independenter a tempore  $T$ ; functio  $V$  vim impellentem per  $C$  exprimens substituat in (350. §.): invenietur enim aequatio differentialis  $\frac{C \epsilon C}{V} = \frac{2g}{M} \epsilon S$  inter duas tantum variables  $C$ ,  $S$ , cujus proinde integratio dabit  $S$  per  $C$ .

5. Dum vis impellens massam  $M$  secundum directionem  $GA$  continuo crescit, motus progressivus massae  $M$  continuo acceleratur: ast, si vis illa continuo decrescat, fieri potest, ut ea aliquando penitus evanescat, quo casu motus massae  $M$  initio accelerabitur, tum convertetur in aequabilem, illa determinata celeritate  $C$ , quam massa  $M$  eo momento habuerit, quo vis impellens evanuerit (293. §.). Motus aequabilis massae  $M$ , cognita celeritate  $C$ , qua is perficiatur, per (265. 266. §.) facillime poterit determinari: quamobrem, quia per hypothesim datur functio celeritatis  $C$  vim impellentem  $V$  exprimens, ponatur haec functio aequalis nihilo,

et ex aequatione  $V=0$  quaeratur valor pro  $C$ ; hac enim ratione definitur celeritas constans  $C$ , qua data massa  $M$  post certum tempus aequabiliter progredietur. Si vero et tempus hoc, et spatium intra illud percursum nosse cupias; quaerantur aequationes indeterminatae inter  $C$  et  $T$ ,  $S$  et  $T$  per (2) (3): si enim in prima aequatione loco  $C$  substituas celeritatem constantem derivatam ex aequatione  $V=0$ ; obtinebis tempus  $T$ , intra quod illa generatur; et si hoc ipsum tempus substituas in secunda aequatione inter  $S$  et  $T$ ; inuenies spatium  $S$  eodem tempore percursum.

### Exemplum.

*Massa  $M=1000$  ℔ determinatur de quiete ad motum a vi variabili  $u=100$  ℔, quae continuo decrescens eodem tempore et celeritatem  $\gamma=6$  pedibus producat, et decrementum  $d=10$  ℔ patiatur; decrementa vero, quae ipsa intra quaevis duo tempora ab initio motus computata patiatur, fiat inter se in ratione directa celeritatum iisdem temporibus genitarum.*

I. Sit  $C$  celeritas quocunque tempore  $T$  producta, et  $D$  decremetum, quod vis initialis  $u$  intra hoc tempus patiatur; erit per hypothesein

$$\gamma:C=d:D, \text{ hinc } D=\frac{dC}{\gamma}.$$

Quamobrem vis, qua massa  $M$  in fine temporis  $T$  ad motum secundum directionem  $GA$  urgebitur, erit aequalis vi initiali  $u$  imminutae decremento  $D$ , nimirum

$$V=u-\frac{dC}{\gamma}=100-\frac{5C}{3} \text{ ℔.}$$

II. Hoc jam valore substituto in (347. §.) obtinebimus aequationem differentialem hanc:

$$\varepsilon C = \frac{2g}{M} \left( u - \frac{dC}{\gamma} \right) \varepsilon T; \text{ seu } \frac{\varepsilon C}{u\gamma - dC} = \frac{2g}{\gamma M} \varepsilon T.$$

Integrando ergo per (Vol. I. 252. §.) inueniemus

$$\text{Const} - \frac{1}{d} \log(u\gamma - dC) = \frac{2g}{\gamma M} T,$$

Cum autem massa  $M$  de quiete ad motum determinata sit, adeoque pro  $T=0$  etiam  $C=0$  esse debeat; debeat constans per (Vol. I. §. 238.) ex aequa-

aequatione  $\text{Const} - \frac{1}{d} \log u \gamma = 0$  determinari, nimirum  $\text{Const} = \frac{1}{d} \log u \gamma$ : consequenter erit

$$\frac{1}{d} \log u \gamma - \frac{1}{d} \log (u \gamma - dC) = \frac{2g}{\gamma M} T;$$

$$\text{adeoque } \frac{\gamma M}{2gd} \log \frac{u \gamma}{u \gamma - dC} = T.$$

Porro fiet

$$\log \frac{u \gamma}{u \gamma - dC} = \frac{2gdT}{\gamma M} :$$

Igitur pro basi e logarithmorum naturalium obtinebimus

$$\frac{u \gamma}{u \gamma - dC} = e^{\frac{2gdT}{\gamma M}} ;$$

et hinc fit

$$C = \frac{u \gamma}{d e^{\frac{2gdT}{\gamma M}} - 1}.$$

Si vero  $M, \gamma, d$  per numeros datos exprimas, et loco  $g$  numerum juxta (323. §.) substituas, habebis

$$T = \frac{12}{0,625} \log \frac{60}{60 - C} ;$$

$$C = \frac{60}{e^{\frac{0,625}{12} T} - 1}.$$

Nimirum data celeritate  $C$  inveniatur tempus  $T$ , quo illa fit producta, et dato tempore  $T$  definiatur celeritas  $C$ , sumto pro  $e$  valore juxta (Vol. I. §. 42.).

III. Pro eadem functione celeritatis  $C$  vim  $V$  in (1) exprimente obtinebimus per (350. §.)

$$C \varepsilon C = \frac{2g}{M} \left( u - \frac{dC}{\gamma} \right) \varepsilon S; \text{ ergo erit}$$

$$\varepsilon S = \frac{M \gamma}{2g} \frac{C \varepsilon C}{u \gamma - dC}.$$

T 2

Integra-

Integratio autem dabit

$$S = \frac{M\gamma}{2gd^2} \left( -dC - u\gamma \log(u\gamma - dC) \right) + \text{Const.}$$

Cum vero initio motus pro  $C=0$  debeat esse etiam  $S=0$ ; invenietur valor constantis per (Vol. I. §. 238.), nimirum

$$0 = -\frac{M\gamma}{2gd^2} \cdot u\gamma \log u\gamma + \text{Const};$$

$$\text{et Const} = \frac{M\gamma}{2gd^2} \cdot u\gamma \log u\gamma.$$

Quamobrem debet esse.

$$S = \frac{M\gamma}{2gd^2} \left( u\gamma \log \frac{u\gamma}{u\gamma - dC} - dC \right).$$

Et si pro  $M, \gamma, g, d$ , ut in (II) substituuntur numeri, invenietur pro  $S$  sequens expressio:

$$S = \frac{12}{0,625} \left( 60 \log \frac{60}{60 - C} - C \right).$$

IV. Verum vis variabilis  $V = u - \frac{dC}{\gamma}$  fiet pro  $C = \frac{u\gamma}{d} = 60$  ped. aequalis nihilo in (I); massa  $M$  incedet ergo motu accelerato, quamdiu fuerit  $\frac{dC}{\gamma} < u$ , hinc  $C < \frac{u\gamma}{d}$  seu  $C < 60$  ped.; pro quavis ejusmodi celeritate invenietur et tempus  $T$ , quo illa fit genita, per (II), et spatium  $S$  intra idem tempus percursum per (III). Ut primum autem massa  $M$  celeritatem  $C = 60$  ped. acquisiverit; progredietur illa hac celeritate motu perpetuo aequabili, quovis tempore  $t$  confectura spatium  $Ct = 60t$  ped. Si tempus  $T$  quaeras, intra quod celeritas haec constans  $C = 60$  ped. acquiritur, et spatium  $S$ , quod intra idem tempus percurritur, cum pro hac celeritate fiat

$$\log \frac{60}{60 - C} = \log 60 - \log (60 - C) = \log 60;$$

debebit esse per (II) (III)

$$T = \frac{12}{0,625} \log 60; \quad S = \frac{144}{0,125} (\log 60 - 1).$$

• Et pro  $\log \text{nat } 60 = 4,094344$  etc. fiet

$$T = 78,6^{12}; \quad S = 3564,6 \text{ ped.};$$

Quam.

Quamobrem, si petatur spatium  $S^2$ , quod massa  $M$  intra quodcunque tempus  $T^2$  ab initio motus computatum debeat percurrere, existente  $T^2 > 78,6^{11}$ , puta  $T^2 = 78,6^{11} + t$ ; debeat poni

$$S^2 = 3564,6 + 60t \text{ ped.}$$

355. Problema.

*Data massa  $M$  (63. Fig.) quiescens a vi variabili  $V$  secundum directionem  $GA$  per ejus centrum gravitatis  $G$  transeuntem et determinatur ad motum, et continuo sollicitatur; est autem vis  $V$  ejusmodi, ut illa per certam functionem temporis, quo motus durat, perfecte possit exprimi: determinare motum massae  $M$ .* Fig. 63.

Solutio.

1. Massa  $M$  incedet nunc quoque motu progressivo secundum directionem  $GA$  (331. §.), ad cujus completam determinationem sufficiet et celeritatem  $C$ , quam data massa  $M$  intra datum tempus  $T$  acquirat, et spatium  $S$  investigare, quod illa eodem tempore percurrat.

2. Cum jam vis  $V$ , qua massa  $M$  in fine dati cujuscunque temporis  $T$  ad motum urgetur, per certam functionem hujus temporis possit exprimi; substituatur haec functio loco  $V$  in (347. §.); complectetur aequatio differentialis  $\epsilon C = \frac{2g}{M} V \epsilon T$  binas tantum variables  $C$  et  $T$  separatas, eoque ipso poterit ope calculi integralis determinari celeritas  $C$  intra tempus  $T$  producenda.

3. Si porro functionem temporis  $T$  exprimentem celeritatem  $C$  eodem tempore productam, quam juxta (2) determinare licuerit, in (348. §.) substituas; obtinebis novam aequationem differentialem  $\epsilon S = C \epsilon T$  inter duas variables  $S$ ,  $T$ , ex qua ope calculi integralis invenietur spatium  $S$  tempore  $T$  percurrendum.

4. Si constet, vim massam  $M$  ad motum urgentem crescente tempore  $T$  continuo decrescere; ponatur functio  $V$  temporis  $T$  vim, qua massa  $M$  in fine ejusdem temporis urgetur, per hypothesim exprimens aequalis nihilo, et ex aequatione  $V = 0$  eruatur valor temporis  $T$ : valor enim iste determinabit tempus  $T$ , quo elapso vis massam  $M$  ad motum sollicitans penitus evanescet; consequenter progredietur post hoc tempus massa  $M$  motu perpetuo aequabili illa determinata celeritate  $C$ , quae intra idem

tempus fuerit genita, atque hanc constantem celeritatem derivabis ex aequatione integrali inter  $C$  et  $T$  in (2) inventa, si valorem ex aequatione  $V=0$  erutum loco  $T$  in illa substituas; eodem autem valore loco  $T$  substituto in aequatione integrali inter  $S$  et  $T$  in (3) inventa, definietur spatium  $S$ , quod durante motu accelerato eodem tempore massa  $M$  debet conficere.

### Exemplum.

Massa  $M=1000$  lb impellatur ad motum a vi  $u=100$  lb continuo decrefcente, ita ut illa primo minuto secundo patiatur decrementum  $d=20$  lb, et decrementa intra duo quaecunque tempora ab initio motus computata sint inter se ut radices quadratae temporum.

1. Pro decremento  $D$ , quod vis  $u$  intra tempus  $T$  patiatur, erit  $\sqrt{1''} : \sqrt{T} = d : D = d T^{\frac{1}{2}}$ : vis, qua massa  $M$  in fine temporis  $T$  urgebitur, erit ergo

$$V = u - d T^{\frac{1}{2}} = 100 - 20 T^{\frac{1}{2}} \text{ lb.}$$

2. Hinc (1) per (347. §.) obtinebimus celeritatem  $C$ , quam massa  $M$  intra datum quodcunque tempus  $T$  acquirat, ut sequitur.

$$C = \frac{2g}{M} \left( u - d T^{\frac{1}{2}} \right) T;$$

$$C = \frac{2g}{M} \left( u T - \frac{2}{3} d T^{\frac{3}{2}} \right) = 0,3125 \left( 10 T - \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}} \right).$$

3. Et pro hac celeritatis expressione inueniemus per (348. §.) spatium  $S$ , quod intra tempus  $T$  debet confici, nimirum hoc modo.

$$S = \frac{2g}{M} \left( u T - \frac{2}{3} d T^{\frac{3}{2}} \right) T;$$

$$S = \frac{2g}{M} \left( \frac{1}{2} u T^2 - \frac{4d}{15} T^{\frac{5}{2}} \right) = 0,0625 \left( 25 T^2 - \frac{4}{3} T^{\frac{5}{2}} \right).$$

4. Pro  $V=0$  in (1) fit  $T = \frac{u^2}{d^2}$ : massa  $M$  debet ergo progredi motu perpetuo aequabili, utprimum ab initio motus effluxerit tempus

$$T = \frac{u^2}{d^2} = 25''.$$

Celeritas, quam intra hoc tempus acquireret, et spatium, quod eodem tempore percurreret, fiet ergo ob (2) (3)

$$C = 0,3125 \left( 10 \cdot 25 - \frac{4}{3} \cdot 25^{\frac{3}{2}} \right) = 26,042 \text{ ped.}$$

$$S = 0,0625 \left( 25 \cdot 25^2 - \frac{8}{3} 25^{\frac{5}{2}} \right) = 4557,292 \text{ ped.}$$

5. Massa M incipiet itaque progredi secundum directionem GA motu accelerato, intra quodvis tempus T celeritatem C per (2) acquisitura, et spatium S per (3) determinabile percursura: verum motus hic non nisi 25 minutis secundis durabit, post quae erit motus massae M perpetuo aequalis, celeritate  $C = 26,042$  ped. perficiendus (4). Spatium ergo, quod massa M, postquam ejus motus fuerit aequalis, quovis tempore t percurreret; est  $Ct = 26,042 t$ : si autem quaeratur spatium quocunque tempore  $T = 25'' + t$  ab initio motus computato percurrendum: cum primis 25 minutis secundis motu accelerato conficiatur spatium  $S = 4557,292$  ped.; erit illud spatium  $= 4557,292 + 26,042 t$  ped.

## DISSERTATIO X.

DE

LAPSU CORPORUM GRAVIUM PER PLANA INCLINATA  
ET LINEAS CURVAS.

## 356. DEFINITIO.

Fig. 64. *Planum inclinatum* FGH (64. Fig.) vocatur, quod plano horizontali DE (44. §.) sub angulo acuto occurrit. Tertium planum idque verticale, consequenter perpendiculare ad planum horizontale DE (44. §.), fecet tam hoc planum in IK, quam planum inclinatum in AC, sic ut illud sit quoque perpendiculare ad communem interfectionem GH planorum inclinati FG et horizontalis DE; deinde demittatur ex A ad planum horizontale perpendicularis AB, quae interfectioni IK in puncto B debebit occurrere: hac ratione obtinebitur in eodem plano verticali triangulum rectangulum ABC, complectens *Angulum inclinationis* ACB, *Longitudinem* AC, *Altitudinem* AB, et *Basim* BC, plani inclinati FG.

## 357. Corollarium.

Pro angulo inclinationis  $ACB = \alpha$ , longitudine  $AC = l$ , altitudine  $AB = a$ , et basi  $BC = b$  dati plani inclinati FG, erit (356. §.)

$$a \operatorname{Cof} \alpha = b \operatorname{Sin} \alpha; a = l \operatorname{Sin} \alpha; b = l \operatorname{Cof} \alpha.$$

## Scholion.

Praecipui casus, qui in descensu corporum gravium per plana inclinata possunt occurrere, in eo consistunt, quod corpus per planum, super quo jacet, aut motu lubricationis, aut motu rotationis descendat: priorem motum concipiet e. gr. corpus figurae cubicae, posteriorem autem corpus figurae sphaericae. In praesenti dissertatione solum motum lubricationis considerare, ejusque genefim et naturam exponere constituimus, ab omnibus hujus motus obstaculis, ut e. gr. est adfrictus et aeris resistentia, mentem abstracturi.

## 358. Problema.

*Dato angulo inclinationis  $=\alpha$ , datoque pondere  $P$  corporis  $uxy$  super plano inclinato  $FG$  jacentis; invenire vim ipsum ad descensum sollicitantem.*

## Solutio.

1. Cogitetur per centrum gravitatis  $c$  corporis  $uxy$  duci planum verticale, a quo secetur planum horizontale  $DE$  in  $IK$ , et inclinatum  $FG$  in  $AC$ , sic ut illud sit simul perpendiculare ad communem intersectionem  $HG$  plani inclinati et horizontalis; necesse est, ut, si ex  $A$  demittatur perpendiculum  $AB$  ad planum horizontale, et ex centro gravitatis  $c$  corporis  $uxy$  ducatur  $cb$  perpendicularis ad planum inclinatum  $FG$ , linea item verticalis  $ca$  (42. §), lineae  $cb$ ,  $ca$ , et triangulum  $ABC$  in eodem plano verticali jaceant, triangulumque  $ABC$  ad  $B$  rectangulum angulum inclinationis, longitudinem, altitudinem, et basim plani inclinati complectatur (356. §). Ducatur demum in eodem plano verticali recta  $cd$  parallela plano inclinato, adeoque perpendicularis ad  $cb$ ; erit angulus  $bca = \alpha$  aequalis angulo inclinationis  $\alpha = ACB$ , et  $dca$  illius complementum ad rectum (356. §).

2. Corpus jam  $uxy$  urgetur a gravitate ad descensum secundum directionem verticalem (42. §) eadem prorsus ratione, qua illud omni gravitate destitutum a vi ejus ponderi  $P$  aequali urgeretur, si haec directione verticali  $ca$  immediate in centrum gravitatis  $c$  ageret (148. 331. §): quare, cum vis  $P$  in punctum  $c$  agens directione  $ca$ , ob angulum  $bca = \alpha$  et illius complementum  $dca$  ad rectum (1), in duas vires possit resolvi, quarum una  $= P \cos \alpha$  agat directione  $cb$  perpendiculari ad planum inclinatum  $FG$  (1) et altera  $= P \sin \alpha$  directione  $cd$  parallela plano inclinato (1) per (115. §); clarum est, ab his solis viribus dependere descensum corporis  $uxy$ .

3. Verum, quia planum  $FG$ , et rigidum per hypothesim (60. §) et immobile, totam actionem vis  $= P \cos \alpha$  directione perpendiculari  $cb$  centrum gravitatis  $c$  massae  $uxy$  versus illud prementis sustinet; perspicuum est, hanc vim nullum absolute motum posse producere: in determinatione motus massae  $uxy$  super plano inclinato  $FG$  sufficiet ergo supponere, praeter vim  $= P \sin \alpha$  centrum gravitatis  $c$  directione  $cd$  parallela plano inclinato, et in eodem plano verticali jacente, in quo jacet

rectangulum ABC altitudinem, longitudinem, angulumque inclinationis plani inclinati complectens, urgenrem, nihil esse, quod in motum massae  $uxy$  quaqua ratione influat (2) (1).

## 359. Corollarium 1.

Motus corporis  $uxy$  vi suae gravitatis per planum inclinatum FG descendens erit progressivus, quo singula ejus puncta secundum directiones inter se et plano inclinato parallelas promovebuntur (358. 331. §.).

## 360. Corollarium 2.

Centrum gravitatis  $c$  corporis  $uxy$ , ubicunque hoc jaceat super plano inclinato FG, sollicitatur ad motum a vi invariabili  $= P \sin \alpha$  per pondus  $P$  ejusdem corporis et angulum inclinationis  $\alpha$  dati plani inclinati determinata (294. §.): motus progressivus, quo corpus  $uxy$  per planum FG descendere cogitur (359. §.), debet ergo uniformiter accelerari (333. §.).

## 361. Corollarium 3.

Si in plano verticali transeunte per centrum gravitatis  $c$  corporis  $uxy$ , in quo jacent rectae  $cb$ ,  $ca$ ,  $cd$ , et rectangulum ABC (358 §. I. n.), recta  $cd$  utrinque produci cogiterur; debebit illa occurrere perpendicularo AB producto in  $A'$ , erectoque ad BC perpendicularo  $CC' = AA' = BB'$ ; erit rectangulum  $A'B'C'$  simile et aequale rectangulo ABC, in cujus hypothenusa  $A'C'$  centrum gravitatis  $c$  corporis  $uxy$  per planum FG descendens debet moveri (358 §. 3. n.).

## 362. Corollarium 4.

Spatium, quod centrum gravitatis  $c$  corporis  $uxy$  per planum inclinatum FG descendens tempore quocunque conficiat, dabit spatium, quod ipsum corpus  $uxy$  eodem tempore percurrat; et celeritas, quam centrum gravitatis  $c$  illo tempore acquisiverit, dabit celeritatem corporis  $uxy$  intra idem tempus genitam (359. 316 §.): in determinatione motus corporis gravis  $uxy$  per planum inclinatum FG descendens licebit ergo ipsum corpus instar unius puncti gravis  $c$  considerare, quod per hypothenusam rectanguli  $A'B'C'$  angulum inclinationis  $A'C'B' = ACB$ , longitudinem  $A'C' = AC$ , altitudinem  $A'B' = AB$ , et basim  $B'C' = BC$  plani inclinati complectentis, cogatur descendere (361. 358. §. I. n.).

## 363. Corollarium 5.

Ut vero omni casu motus corporis uxy super plano inclinato rite determinetur, supponatur id omnis gravitatis esse expers, et a vi  $= P \sin \alpha$ , per pondus P ejus massae proportionale et angulum inclinationis  $\alpha$  dati plani determinata, ad motum secundum directionem per ipsius centrum gravitatis transeuntem atque longitudini plani inclinati parallelam continuo sollicitari (358. §. 3. n.).

## 364. Corollarium 6.

Ex (360. 275. 281. 282. §.) generatim sequitur, spatia, quae a corpore gravi per planum inclinatam de quiete descendente diversis temporibus ab initio descensus computatis percurreuntur, esse inter se, ut quadrata eorundem temporum, celeritatumque intra haec tempora genitarum; ipsas vero celeritates esse inter se in ratione simplici directa temporum.

## 365. Problema.

Si corpus grave in puncto f plani inclinati ABC existens (362. §.) Fig. 65. descensum versus C celeritate  $\gamma$  inchoet; invenire spatium s, quod illud dato tempore t percurret, et celeritatem c, quam in fine temporis t habebit.

## Solutio.

Sit P pondus corporis et massa ei proportionalis (52. §.), angulus autem inclinationis sit  $\alpha = ACB$ ; erit ob (353. §.) per (343. §. 4. n.).

$$s = \gamma t + g \frac{P \sin \alpha}{P} t^2; \quad c = \gamma + 2g \frac{P \sin \alpha}{P} t;$$

debet ergo esse

$$s = \gamma t + g t^2 \sin \alpha; \quad c = \gamma + 2gt \sin \alpha.$$

## 366. Corollarium 1.

Si quaeratur tempus t, intra quod corpus in puncto f plani inclinati existens, descensumque celeritate  $\gamma$  inchoans datum spatium  $s = fC$  percurret, et celeritas c, quam illud in puncto C habeat; erit per (365. §.)

$$t = \frac{\sqrt{(4gs \sin \alpha + \gamma^2)} - \gamma}{2g \sin \alpha}; \quad c = \sqrt{(4gs \sin \alpha + \gamma^2)}.$$

## 367. Corollarium 2.

Ponamus autem corpus grave existens in puncto  $f$  plani inclinati descensum per spatium  $fC = s$  inchoare celeritate  $\gamma$  debita altitudini  $Ak$  determinatae per parallelam  $fk$  basi  $BC$ , et quaeri tam tempus  $t$  descensus per spatium  $fC$ , quam celeritatem corporis in puncto  $C$ : cum hoc casu sit  $\gamma = 2\sqrt{g \cdot Ak}$  per (329. §.), et  $\text{Sin } \alpha = \text{Sin } ACB = \text{Sin } Afk = \frac{Ak}{Af} = \frac{Bk}{fC}$ ; habebimus ob (366. §.)

$$t = \frac{\sqrt{(4g \cdot fC \cdot \frac{Bk}{fC} + 4g \cdot Ak) - 2\sqrt{g \cdot Ak}}}{2g \text{Sin } \alpha};$$

$$c = \sqrt{(4g \cdot fC \cdot \frac{Bk}{fC} + 4g \cdot Ak)};$$

adeoque erit

$$t = \frac{\sqrt{AC} - \sqrt{Ak}}{\text{Sin } \alpha \sqrt{g}}; \text{ et } c = 2\sqrt{g \cdot AC}.$$

## 368. Corollarium 3.

Si corpus grave suum descensum per planum inclinatum de quiete inchoet, erit  $\gamma = 0$  in (365. §.), et  $\text{Sin } \alpha = \frac{a}{l}$  (357. §.): datis ergo angulo inclinationis  $\alpha = ACB$ , longitudine  $l = AC$ , et altitudine  $a = AB$  plani inclinati, poterit determinari tam spatium  $s$ , quod corpus grave de quiete descendens per planum inclinatum quovis dato tempore  $t$  ab initio descensus computato conficiet, et celeritas  $c$ , quam eodem tempore acquireret, nimirum per (365. §.).

$$s = gt^2 \text{Sin } \alpha = \frac{gat^2}{l}; \quad c = 2gt \text{Sin } \alpha = \frac{2gat}{l}.$$

## 369. Corollarium 4.

Tempus  $t$ , intra quod corpus grave per planum inclinatum de quiete descendens datum spatium  $s$  conficiet, celeritatemque  $c$  acquireret, erit per (368. §.).

$$t = \sqrt{\frac{s}{g \text{Sin } \alpha}} = \sqrt{\frac{ls}{ga}};$$

$$t = \frac{c}{2g \text{Sin } \alpha} = \frac{lc}{2ga}.$$

## 370. Corollarium 5.

Ex (369. 368. §) nascentur porro sequentes formulae, quarum prior dabit spatium  $s$  a corpore gravi per planum inclinatum de quiete descendente conficiendum, ut illud datam celeritatem  $c$  acquirat; posterior autem dabit celeritatem  $c$ , quam idem corpus descendens per datum spatium  $s$  acquirat.

$$s = \frac{c^2}{4g \sin \alpha} = \frac{1}{4} \frac{c^2}{g \sin \alpha};$$

$$c = 2\sqrt{gs \sin \alpha} = 2\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{1} s}.$$

## 371. Corollarium 6.

Si duo corpora gravia de quiete descendant per duo plana inclinata, quorum anguli inclinationis sint  $\alpha, \alpha'$ ; erunt spatia  $s, s'$  eodem tempore  $T$  percursa, et celeritates  $c, c'$  intra idem tempus acquiritae inter se ut sinus angulorum inclinationis: erit enim per (368 §.)

$$s = g T^2 \sin \alpha; \quad s' = g T^2 \sin \alpha';$$

$$c = 2g T \sin \alpha; \quad c' = 2g T \sin \alpha';$$

$$\text{igitur } s : s' = \sin \alpha : \sin \alpha' = c : c'.$$

## 372. Corollarium 7.

Tempora  $t, T$ , intra quae duo corpora gravia per integras longitudines  $l, L$  duorum planorum inclinatorum, altitudines  $a, A$  habentium, de quiete descendant; erunt inter se, ut longitudines divisae per radices quadratas altitudinum, nimirum per (369. §.)

$$t = \sqrt{\frac{l^2}{g a}}; \quad T = \sqrt{\frac{L^2}{g A}};$$

$$\text{igitur } t : T = \frac{l}{\sqrt{a}} : \frac{L}{\sqrt{A}}.$$

## 373. Corollarium 8.

Tempora  $t, T$  descensus duorum corporum gravium per integras longitudines duorum planorum inclinatorum ejusdem altitudinis  $a = A$ , vel ejusdem longitudinis  $l = L$ , erunt inter se ut ipsae longitudines casu primo, vel in ratione inversa radicum quadraticarum ipsarum altitudinum casu altero, seu erit (372. §.)

$$t : T = l : L \text{ pro } a = A;$$

$$t : l = \sqrt{A} : \sqrt{a} \text{ pro } l = L.$$

## 374. Corollarium 9.

Theoria motus corporum gravium per plana inclinata descendendum potest servire ad investigandam altitudinem  $g$ , per quam corpora gravia de quiete libere labentia primo minuto secundo decidant (325. §). Tempus enim descensus corporis gravis per totam longitudinem  $s=l$  dati plani inclinati est  $t = \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}$  (369. §): hoc ergo erit eo majus, proinde eo facilius accuratiusque poterit illud observari, quo major fuerit longitudo  $l$  plani inclinati, quove minor fuerit angulus inclinationis  $\alpha$ . Quamobrem, si construatur planum inclinatum notabilis longitudinis  $l$  et parvae altitudinis, ut eo minor sit angulus inclinationis, tum observetur tempus  $t$ , intra quod grave aliquod corpusculum per totam longitudinem  $l$  descendat; inveniatur  $g = \frac{l}{t^2 \sin \alpha}$ .

## Scholion.

Indubium est, facilius observari tempus  $t$  descensus corpusculi gravis per longitudinem plani inclinati, quam tempus liberi lapsus per certam altitudinem (327. §); certum porro est, quod, si superficies plani inclinati probe laevigata sit, et corpusculum grave super illo descendens figuram sphaericam habeat, adeo exigua sit futura resistentia ab adfrictu pendens, ut illa penitus contemni queat: verum semper aderunt alia motus obstacula (e. gr. aeris resistentia), ob quae alia, hac accuratior, methodus investigandi altitudinem  $g$  merito desiderabitur.

## 375. Theorema.

*Tempus descensus corporis gravis per totam longitudinem  $l$  dati plani inclinati est ad tempus liberi lapsus per altitudinem  $a$  ejusdem plani, sicut longitudo  $l$  ad altitudinem  $a$ .*

## Demonstratio.

Si corpus tempore  $T$  descendat per totam longitudinem  $s=l$  plani inclinati, vel tempore  $t$  per illius altitudinem  $a$  libere labatur; erit

$$T = \sqrt{\frac{l^2}{ag}} \text{ per (369. §);}$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ per (326. §):}$$

$$\text{adeoque erit } T:t = \sqrt{\frac{l^2}{ag}} : \sqrt{\frac{a}{g}} = l:a.$$

## 376. Theorema.

*Celeritas, quam corpus grave per totam longitudinem l plani inclinati de quiete descendens potest acquirere, aequatur celeritati debitae altitudinis a ejusdem plani (329. §.).*

## Demonstratio.

Celeritas in descensu per totam longitudinem  $l$  s dati plani inclinati acquisita erit  $c = 2\sqrt{ga}$  (370. §.): haec ipsa vero celeritas debetur altitudini  $a$  ejusdem plani inclinati (329. §.).

## 377. Theorema.

*Si se ad longitudinem AC perpendicularis occurrat altitudini AB plani inclinati productae in e; debet corpus grave in A existens eodem tempore per partem Af plani inclinati descendere, quo tempore illud libero lapsu altitudinem Ae percurreret.*

## Demonstratio.

1. Tempus per Af est  $t = \sqrt{\frac{AC \cdot Af}{AB \cdot g}}$  (369. §.): tempus vero liberi lapsus per altitudinem Ae debet esse  $T = \sqrt{\frac{Ae}{g}}$  (326. §.).

2. Sed in triangulis, ad B, f rectangulis et inter se similibus, ACB, Afe est  $AB : AC = Af : Ae$ : debet ergo esse  $Ae = \frac{AC \cdot f}{AB}$ , hinc  $t = T$  in (1).

## 378. Corollarium 1.

Ducta ad punctum infimum C perpendiculari hC ad longitudinem plani inclinati AC, quae ejus altitudini AB productae in h occurrat; erit tempus descensus corporis gravis per totam longitudinem AC plani inclinati aequale tempori liberi lapsus per altitudinem Ah (377. §.).

## 379. Corollarium 2.

Cum chordae AC, Ch (66. Fig.) insistentes diametro Ah dati circuli Fig. 66. sint ad invicem perpendiculares; patet, cur corpus grave eodem tempore per datam quamcunque chordam AC circuli situm verticalem habentis debeat descendere, quo illud libere labens per diametrum verticalem Ah ejusdem circuli decideret (378. §.): diameter verticalis Ah, et omnes chordae Aa, Ab, Ac, si per illas totidem corpora gravia descendant, percurrentur eodem tempore, id est, erunt *spatia inchochona*.

## 380. Problema.

Fig. 65. Corpori gravi in puncto infimo C plani inclinati ABC (65. Fig.) existenti impressa sit celeritas  $\gamma$ , qua illud secundum directionem parallelam plano inclinato AC per idem planum motu progressivo versus A cogatur ascendere: invenire spatium  $s = Cf$  dato tempore  $t$  conficiendum, et celeritatem  $c$ , quam idem corpus in fine temporis  $t$  in puncto f plani inclinati habebit.

## Solutio.

Si P fit et pondus et ei proportionalis massa corporis gravis (52. §.); debet esse ob (363. §.) per (343. §.)

$$s = \gamma t - g \frac{P \sin \alpha}{p} t^2; \quad c = \gamma - 2g \frac{P \sin \alpha}{p} t;$$

ergo  $s = \gamma t - g t^2 \sin \alpha; \quad c = \gamma - 2g t \sin \alpha.$

## 381. Corollarium 1.

Tempus  $t$ , quo corpus grave motu celeritate  $\gamma$  in C inchoato per partem  $s = Cf$  plani inclinati AC ascendet, et celeritas  $c$ , quam in f habebit, invenietur ex (380. §.), ut sequitur:

$$t = \frac{\gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 4g s \sin \alpha)}}{2g \sin \alpha}; \quad c = \sqrt{(\gamma^2 - 4g s \sin \alpha)}.$$

## 382. Corollarium 2.

Ascensus corporis gravis per planum inclinatum CA in C celeritate  $\gamma$  inchoatus fiet celeritate  $c$  continuo decrescente (380. §.); ubi haec evanuerit, corpus vi suae gravitatis descendere incipiet. Fiet vero celeritas

$$c = 0 \text{ pro } t = \frac{\gamma}{2g \sin \alpha} \text{ (380. §.)}, \text{ et pro hoc valore temporis } t \text{ erit}$$

$$s = \frac{\gamma^2}{4g \sin \alpha} \text{ (380. §.): ascensus ergo in C celeritate } \gamma \text{ inchoatus durabit tempore } t = \frac{\gamma}{2g \sin \alpha}, \text{ seu per spatium } s = Cf = \frac{\gamma^2}{4g \sin \alpha}.$$

## 383. Problema.

Fig. 67. Punctum mobile P progrediens in recta DA (67. Fig.) in A celeritate C praeditum cogitur motum in recta AB ad priorem sub dato angulo BAE  $= \alpha$  inclinata continuare; invenire celeritatem, qua illud in A hunc motum inchoabit.

## Solutio.

## Solutio.

1. Punctum P existens in A talem habet per hypothesim celeritatem C, qua illud, absente omni causa ejus motum turbante, proximo minuto secundo vi folius inertiae certum spatium Ab motu aequabili percurreret (271. 292. §.), adeoque, ducto ba ad AB perpendiculari, ad distantiam ab a recta AB, et ad distantiam Aa a puncto A promoveretur: quare cum primum recta immobilis AB, in qua punctum P in A existens motum continuare cogitur, penitus impediat; manifestum est, punctum mobile P per celeritatem C in A sic esse ad motum determinatum, ut illud vi folius inertiae spatium Aa proximo minuto secundo motu aequabili super recta AB deberet conficere.

2. Quamobrem, dum punctum P eam celeritatem C secundum directionem AE habet, qua illud motu aequabili spatium Ab proximo minuto secundo percurreret; censendum est punctum P talem habere celeritatem secundum novam directionem AB, qua illud motu aequabili spatium  $Aa = Ab \text{Cof} BAE = Ab \text{Cof} \alpha$  proximo minuto secundo conficeret (1), id est: pro celeritate  $C = Ab$  secundum directionem AE habebit punctum P in A celeritatem  $c = Aa = C \text{Cof} \alpha$ , qua illud motum directione AB debebit inchoare (264. 271. §.).

## 384. Corollarium 1.

Si punctum mobile P celeritate C incedat in recta DA motu aequabili, et in A cogatur super recta AB sub dato angulo  $\alpha = BAE$  ad DA inclinata motum continuare; progredietur illud secundum directionem AB motu pariter aequabili celeritate  $c = C \text{Cof} \alpha$  eo majore, quo minor fuerit angulus inclinationis  $\alpha = BAE$  (383. §.): erit autem haec celeritas, ob  $\text{Cof} \alpha = 1$ , semper minor celeritate C, decrementumque celeritatis ob curvedinem viae DAB in puncto A erit  $= C - C \text{Cof} \alpha = C \text{Sin} \nu \alpha$ .

## 385. Corollarium 2.

Punctum mobile P in A ad motum aequabilem secundum directionem Aa celeritate  $\gamma$  determinatum (68. Fig.) cogatur moveri in linea ABCDEFGH ex rectis AB, BC, - - - GH numero quocunque n composita, quarum quaevis ad proxime praecedentem sub determinato angulo  $\alpha = aAB = bBC = cCD = dDE = eEF = fFG = gGH$  sit inclinata: progredietur punctum P per AB celeritate  $= \gamma \text{Cof} \alpha$ , et decrementum

celeritatis ob angulum in A erit  $\equiv \gamma \text{Sin} \nu \alpha$ ; adeoque incedet idem punctum per BC celeritate  $\equiv \gamma \text{Cof} \alpha^2$ , et decrementum celeritatis ob angulos in A, B erit  $\equiv \gamma \text{Sin} \nu \alpha^2$ ; hinc fiet celeritas puncti P per CD incedentis  $\equiv \gamma \text{Cof} \alpha^3$ , et decrementum celeritatis ob angulos in A, B, C erit  $\equiv \gamma \text{Sin} \nu \alpha^3$ ; et sic generatim erit  $\gamma \text{Cof} \alpha^n$  celeritas, qua punctum P per GH incedet, et decrementum celeritatis initialis  $\gamma$  ob omnes angulos A, B, C, - - - G erit  $\gamma \text{Sin} \nu \alpha^n$  (384. §.).

## 386. Corollarium 3.

Sit AEH curva quaecunque nullibi per cuspides aut puncta regressus (Vol. I. §. 441.) interrupta; possibile erit, ducta ad A tangente Aa chordas AB, BC, CD, - - - GH ita ducere, ut quaevis illarum ad proxime praecedentem sub angulo  $\alpha \equiv a AB$  inclinetur. Quidquid sit numerus n harum chordarum, debet punctum mobile P, si id in A, ad motum aequabilem celeritate  $\gamma$  secundum directionem tangentis Aa determinatum, cogatur moveri in linea ABCDEFGH ex iisdem chordis composita, in H habere celeritatem  $\equiv \gamma \text{Cof} \alpha^n$ , et per totam viam pati decrementum celeritatis  $\equiv \gamma \text{Sin} \nu \alpha^n$  (385. §.): quo minor fuerit angulus  $\alpha \equiv a AB$ , eo minores, eoque plures erunt chordae AB, BC, - - - GH in curva AEH; celeritas  $\gamma \text{Cof} \alpha^n$  puncti mobilis P in H erit eo major, et decrementum celeritatis  $\gamma \text{Sin} \nu \alpha^n$  ob viae in A, B, C, - - - G curvedinem eo minus; pro  $\alpha \equiv 0$  fieret decrementum celeritatis  $\gamma \text{Sin} \nu \alpha^n \equiv 0$ , et celeritas puncti P in H puncto  $\gamma \text{Cof} \alpha^n \equiv \gamma$ . Quare, cum curva AEH sit limes, ad quem linea ex chordis AB, BC, - - - GH composita eo propius debet accedere, quo magis decrefcit angulus  $\alpha \equiv a AB$ , quemve illa eoduntaxat determinato casu attingeret, si fieret  $\alpha \equiv 0$ ; clarum est, punctum mobile P, in A secundum directionem tangentis Aa ad motum aequabilem celeritate  $\gamma$  determinatum, si illud in curva AEH moveri cogatur, eandem celeritatem  $\gamma$ , confecta via AEH in puncto H, proinde in quovis puncto ejusdem curvae habiturum.

## 387. Corollarium 4.

Si ergo punctum mobile P in data curva AEH progrediens a vi quacunque x in quovis puncto curvae secundum directionem tangentis eidem puncto debitae ad motum urgeatur; debet celeritas puncti P ob continuam vis x actionem eadem prorsus lege mutari, qua mutaretur, si punctum

punctum P a vi x perpetuo secundum eandem directionem in una recta ad motum sollicitaretur: secus enim deberet ob solam viae curvedinem certa mutatio in celeritatem redundare, contra (386. §.).

## 388. Problema.

Data aequatione ad curvam BD (69. Fig.) inter ejus coordinatas orthogonas  $x = Ea$ ,  $y = Pa$ , in qua massa M instar unius puncti considerata moveri cogatur, dataque vi invariabili, quae illam in quovis curvae puncto P secundum directionem Pb parallelam axi abscissarum ED ad motum sollicitet; invenire tempus T motus per arcum BP = s, et celeritatem C eodem tempore in puncto P debitam.

## Solutio.

I. Sit V vis, quae massam M in P existentem secundum directionem Pb parallelam axi abscissarum ED, adeoque perpendiculararem ad ordinatam Pa ad continuationem motus per arcum PD urgeat; poterit, ducta ad P tangente Pf, et ad hanc perpendiculari Pd, vis V in duas vires resolvi, quarum una = V Coss Pb in punctum P agat directione Pf, et altera = V Sin f Pb directione Pd (115. §.). Massa M premetur ergo a vi = V Sin f Pb versus curvam BD in P secundum directionem Pd perpendiculararem ad tangentem fP; curva BD utpote rigida et immobilis sustinebit ergo totam actionem vis V Sin f Pb directione Pd agentis. Quare debet massa M sic considerari, ac si illa in quovis puncto P curvae ab una vi = V Coss Pb secundum directionem tangentis Pf in eodem puncto ad motum urgeretur, unde necessario sequitur, ob (386. §.) per (350. §.) debere esse

$$C \varepsilon C = 2g \frac{\sqrt{\text{Coss Pb}}}{M} \varepsilon s.$$

2. Sed ob angulum rectum aPb est  $\text{Coss Pb} = \text{Sina Pf} = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon s}$  (Vol. I. §. 455. 469.): hoc itaque valore substituto in (1) habebimus

$$C \varepsilon C = 2g \frac{V}{M} \varepsilon x.$$

Quodsi jam aequatio haec ita integretur, ut pro  $x = EF = e$  fiat celeritas massae  $C = 0$  in puncto B; debebit esse

$$\frac{1}{2} C^2 = \frac{2gV}{M} x + \text{Const}, \text{ et } 0 = \frac{2gV}{M} e + \text{Const};$$

$$\text{hinc Const} = -\frac{2gV}{M}e; \quad \frac{1}{2}C^2 = \frac{2gV}{M}x - \frac{2gV}{M}e;$$

$$\text{adeoque } C = 2\sqrt{\frac{gV}{M}(x-e)}.$$

3. Inventa celeritate  $C$  debita tempori  $T$  motus per arcum  $s = BP$ , habebimus ob  $\varepsilon s = \sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon x^2)}$  (Vol. I. §. 469.) et  $\varepsilon s = C \varepsilon T$  (348. §.), hinc  $\varepsilon T = \frac{\varepsilon s}{C}$ , sequentem expressionem pro  $\varepsilon T$ , ex qua, data aequatione inter  $y$  et  $x$ , derivabitur  $T$ , si  $\varepsilon T$  sic integretur, ut pro  $x = EF = e$  fiat  $T = 0$ .

$$\varepsilon T = \frac{\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon x^2)}}{2\sqrt{\frac{gV}{M}(x-e)}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon x^2)}}{\sqrt{(x-e)}}$$

### 389. Corollarium 1.

Curva  $BD$  jaceat in plano verticali, in eodemque plano situs sit axis abscillarum  $ED$ , quo ordinatae orthogonae  $Pa$  fiant horizontales; debeat hoc quoque casu massa  $M$  instar puncti spectata, si illa per curvam  $BD$ , a vi invariabili  $V$  perpetuo secundum directionem verticalem ad motum deorsum sollicitata, descendere cogatur, confecto arcu  $s = BP$  intra tempus per aequationem differentialem

$$\varepsilon T = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon x^2)}}{\sqrt{(x-e)}}$$

determinatum, in puncto  $P$  habere celeritatem

$$C = 2\sqrt{\frac{gV}{M}(x-e)},$$

pro  $x = Ea$ ,  $e = EF$ , et  $y = Pa$  (388. §.).

### 390. Corollarium 2.

Quodsi ergo corpusculum grave, cujus pondus et massa illi proportionalis sit  $M$  (52. §.), per curvam  $BD$  in plano verticali jacentem vi folius gravitatis cogatur descendere: cum vis, qua illud quovis momento secundum directionem verticalem deorsum urgetur, ejus ponderi  $M$  debeat aequari; acquireret idem corpusculum in descensu per arcum  $BP$  celeritatem

$$C = 2\sqrt{g(x-e)} = 2\sqrt{g \cdot Fa};$$

tempus

tempus autem descensus per eundem arcum licebit ope calculi integralis ex aequatione differentiali

$$sT = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon x^2)}}{\sqrt{(x-e)}}$$

elicere, modo noscatur aequatio ad curvam BD inter ejus coordinatas  $x = Ea$  et  $y = Pa$  (389. §.).

### 391. Corollarium 3.

Proprietas generalis omnium curvarum BD per nullas cuspides, nullaque puncta regressus interruptarum erit haec: celeritas, quam corpusculum grave in descensu per quemcunque arcum BP ejusmodi curvae jacentis in plano verticali potest acquirere, aequatur celeritati, quam illud libero lapsu per altitudinem  $Fa$  acquireret (390. 399. §.)

### 392. Problema.

Data diametro  $ED = 2r$  circuli genitoris cycloidis  $GDH$  jacentis in plano verticali; invenire tempus  $T$ , quo corpusculum grave de quiete per arcum  $BP$  decidat.

#### Solutio.

1. Pro  $x = Ea$ ,  $y = Pa$ ,  $e = EF$ , et  $z = aD$ , erit  $z = 2r - x$ ,  $\varepsilon z = -\varepsilon x$ : igitur per (Vol. I. §. 609)  $\varepsilon y = -\varepsilon x \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$ .

2. Quare substituatur iste valor loco  $\varepsilon y$  in (390. §.); obtinebimus aequationem differentialem

$$sT = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{x\varepsilon x^2}{2r-x} + \varepsilon x^2\right)}}{\sqrt{(x-e)}} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\varepsilon x \sqrt{2r}}{\sqrt{(2r-x)(x-e)}}$$

$$\text{feu } sT = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(-2re + (2r+e)x - x^2)}}$$

Hinc integrando per (Vol. I. §. 286.) inveniemus

$$T = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } \frac{2x - (2r+e)}{2r-e} + C.$$

Verum pro  $x = EF = e$  habetur initium descensus in puncto B, proinde  $T = 0$ : igitur debet esse

$$0 = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } \frac{2e - (2r+e)}{2r-e} + C.$$

$$\text{et } C = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin} \frac{2e-2r-e}{2r-e} = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin} -1,$$

$$\text{feu Const} = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin} 1 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

Consequenter debet esse

$$T = \left( \text{Arc Sin} \frac{2x-(2r+e)}{2r-e} + \frac{1}{2}\pi \right) \sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

393. Corollarium 1.

Si  $x = Ea$  abeat in  $x = ED$ , abibit arcus cycloidis  $BP$  in  $BD$ : pro  $x = ED = 2r$  erit ergo ob (392. §.) tempus descensus per arcum cycloidis  $BD$

$$T = \left( \text{Arc Sin} \frac{2r-e}{2r-e} + \frac{1}{2}\pi \right) \sqrt{\frac{r}{2g}} = \left( \text{Arc Sin} 1 + \frac{1}{2}\pi \right) \sqrt{\frac{r}{2g}};$$

$$\text{feu } T = \left( \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \right) \sqrt{\frac{r}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

394. Corollarium 2.

Tempus ergo descensus corpusculi gravis per quemvis arcum  $BD$  cycloidis jacentis in plano verticali, ita ut diameter  $ED$  circuli genitoris axem cycloidis exhibens sit verticalis, est constans  $= \pi \sqrt{\frac{r}{2g}}$  (395. §.): quotcumque idcirco arcus  $DP$ ,  $DB$ ,  $DH$  ex vertice  $D$  abscindantur; debet corpusculum grave per quemvis arcum ex  $P$ ,  $B$ ,  $H$  eodem tempore ad  $D$  decidere, id est: cyclois est *linea tautochrone*.

395. Problema.

Sit  $GDH$  semicirculus radio  $r = ED$  descriptus jacens in plano verticali, ita ut diameter  $GH$  sit horizontalis, et radius  $ED$  verticalis: invenire tempus  $T$ , quo data massa  $M$  instar puncti spectata per arcum  $BP$  debet descendere, si illa a data vi invariabili  $V$  perpetuo secundum directionem verticalem radio  $ED$  parallelam ad motum deorsum urgeatur.

Solutio.

1. Pro abscissis a centro  $E$  computatis  $x = Ea$ , et ordinatis orthogonis  $y = Pa$ , existente  $EF = e$ , debet esse per (389. §.)

$$sT = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{(ey^2 + ex^2)}}{\sqrt{(x-e)}}.$$

Fiat

Fiat vero  $z = Da$ , et  $b = FD$ ; erit  $x = r - z$ ;  $\epsilon x = -\epsilon z$ , et  $\epsilon = r - b$ : cum ergo fit

$$y = \sqrt{(2rz - z^2)}; \epsilon y = \frac{(r-z)\epsilon z}{\sqrt{(2rz - z^2)}}; \text{erit}$$

$$\epsilon T = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{(r-z)^2 \epsilon z^2}{2rz - z^2} + \epsilon z^2\right)}}{\sqrt{(r-z) - (r-b)}};$$

$$\text{feu } \epsilon T = \frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\epsilon z}{(2rz - z^2)^{\frac{1}{2}} (b-z)^{\frac{1}{2}}}$$

Sed decreſcente variabili  $z = Da$  creſcit arcus  $BP$ , et tempus  $T$  deſcendens per eundem arcum: debet ergo poni

$$\epsilon T = -\frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\epsilon z}{z^{\frac{1}{2}} \cdot (2r-z)^{\frac{1}{2}} \cdot (b-z)^{\frac{1}{2}}}$$

2. Ut jam exponens hic differentialis juxta (Vol. I. §. 361. Schol. 2.) poſſit integrari, reſolvatur functio  $(2r-z)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2r-z)^{\frac{1}{2}}}$  in ſeriem infinitam per (Vol. I. §. 53.), et ſinguli ejus termini ducantur in

$$\frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\epsilon x}{z^{\frac{1}{2}}(b-z)^{\frac{1}{2}}}; \text{debebit eſſe in (1)}$$

$$\epsilon T = -\frac{1}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\epsilon z}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-z)}} + \dots \right) + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2r)^n} \cdot \frac{z^{\frac{2n-1}{2}} \cdot \epsilon z}{\sqrt{(b-z)}}.$$

Factor ſub vinculo continet ſeriem, cujus ſinguli termini poſt primum ordine naturali ſequentes ex parte indeterminata ejusdem factoris derivabuntur, ſi ſucceſſive fiat  $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$ , et ſic porro.

3. Captis itaque ſingulorum terminorum integralibus in (2), debet fieri

$$T =$$

$$T = -\frac{1}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \frac{\epsilon z}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b-z)}} + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2r)^n} \int \frac{z^{\frac{2n-1}{2}} \epsilon z}{\sqrt{(b-z)}} \right).$$

4. Sed per (Vol. I. §. 287. 302.) erit primum et secundum integrale

$$\int \frac{\epsilon z}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b-z)}} = \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b};$$

$$\int \frac{z^{\frac{2n-1}{2}} \epsilon z}{\sqrt{(b-z)}} = \left( -\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} - \frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)} \right. \\ \left. - \frac{(2n-1)(2n-3)b^2 z^{\frac{2n-5}{2}}}{2n(2n-2)(2n-4)} \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \left( \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot b^{n-1} z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \right) 2\sqrt{(b-z)} \right) \\ + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot b^n}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b}.$$

5. Quare, substitutis his integralibus (4) in (3), inuenimus pro tempore T sequentem expressionem:

$$T = -\frac{1}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b} + \dots \dots \dots \right. \right. \\ \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2 \cdot b^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2 (2r)^n} \cdot \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b} \right) \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2r)^n} \left( \frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} + \frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)} \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)b^2 z^{\frac{2n-5}{2}}}{2n(2n-2)(2n-4)} + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot b^{n-1} z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \right) 2\sqrt{(b-z)} \Big] + C.$$

6. Hoc modo determinatur tempus T per duas series, unam trigonometricam complectentem Arc Sin  $\frac{2z-b}{b}$ , et alteram algebraicam: invenientur autem singuli termini utriusque seriei post terminum primum trigonometricum Arc Sin  $\frac{2z-b}{b}$  ordine naturali sequentes, si successive ponatur  $n=1, n=2, n=3, n=4$ , et sic porro. Ut vero etiam constans quantitas per (Vol. I. § 238.) rite determinetur, animadvertendum est, tempus T descensus per arcum BP pro  $z=FD=b$  fieri aequale nihilo: cum igitur pro  $z=b$  tota pars algebraica in (5) fiat aequalis nihilo, et Arc Sin  $\frac{2z-b}{b} = \text{Arc Sin } \frac{2b-b}{b} = \text{Arc Sin } 1 = \frac{1}{2}\pi$ ; erit in (5)

$$0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2}\pi + \dots + \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 \cdot b^n}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2 (2r)^n} \cdot \frac{1}{2}\pi \right) + C,$$

$$\text{hinc } C = \frac{\pi}{4} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \dots + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2 \cdot b^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2 \cdot (2r)^n} \right).$$

7. Quapropter tempus descensus per arcum BP erit pro quavis variabili  $z=Da$ , et altitudine  $b=DF$  in (5) (6)

$$T = \left[ \left( 1 + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left( \frac{b}{2r} \right)^n \right) \left( \frac{\pi}{2} - \text{Arc Sin } \frac{2zb}{b} \right) \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (2r)^n} \left( \frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} + \frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)} \right) \right. \\ \left. + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot b^{n-1} \cdot z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \right] \frac{1}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

396. Corollarium I.

Pro  $z=0$  fiet pars algebraica integralis in (395. §. 7. n.) aequalis nihilo; in parte vero trigonometrica erit pro  $z=0$

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc Sin } -1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Quare, cum pro  $z=0$  arcus BP in BD abeat; obtinebimus ex (395. §. 7. n.) sequentem expressionem temporis, quo massa M instar puncti spectata, si ea a vi invariabili V perpetuo secundum directionem verticalem deorsum urgeatur, per arcum BD circuli e centro E radio  $r=ED$  descripti, et in plano verticali jacentis debeat descendere.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left( \frac{b}{2r} \right)^n \right) = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{b}{2r} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \left( \frac{b}{2r} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \left( \frac{b}{2r} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left( \frac{b}{2r} \right)^n \right).
 \end{aligned}$$

## 397. Corollarium 2.

Si corpusculum grave, cujus massam pondusque ei proportionale denotet  $M$ , vi suae gravitatis per arcum  $BD$  circuli in plano verticali jacentis descendere cogatur; vis ipsum ad descensum secundum directionem verticalem deorsum continuo sollicitura aequabitur ejus ponderi  $M$ : tempus descensus per arcum  $BD$  erit ergo ob (396. §.)

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{r}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{b}{2r} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 \cdot \frac{b^n}{(2r)^n} \right).
 \end{aligned}$$

## Scholion.

Usum ultimi problematis inferius in theoria motus pendulorum videbimus. Transibimus jam ad aliam motus speciem, qualis fere perpetuo occurrit in machinis. Haecenus enim plerumque motum rectilineum et progressivum massarum, pendentem a quibuscunque viribus, variabilibus aut invariabilibus, prae oculis habuimus: sequitur, ut de motu massarum circa axes fixos tractemus. Cum autem universa hujus motus theoria doctrinae de *momento inertiae* innitatur, haec autem, absolute spectata, fit pure geometrica, ab omni motus notione independens; praemittemus in sequenti dissertatione tractatum de momento inertiae, in quo et palmares illius proprietates evolvemus, et ejusdem quantitatem pro corporibus datae figurae determinare docebimus.

DISSERTATIO XI.  
DE  
M O M E N T O I N E R T I A E.

---

398. DEFINITIO.

**D**octrina de momento inertiae, de cujus investigatione tractare constituimus, postulat, ut data corpora ad rectas positione datas relata cogitentur, quae nomine *Axium* solent intelligi: quodsi enim corpus aliquod in minimas particulas mente resolvatur, et quaevis particula per quadratum suae distantiae a dato axe multiplicari cogitetur; aggregatum omnium productorum erit *Momentum inertiae totius corporis respectu dati axeos*. Alia momenta inertiae inusitata sunt in disquisitionibus mechanicis: ut vero eo clarius et ordinatius nonnullas proprietates momenti inertiae respectu datorum axium exponere, investigationemque ipsius pro certis casibus eo commodiorem reddere liceat; momenta quoque inertiae respectu datorum planorum in considerationem vocabimus. Nimirum, si quaevis minima particula alicujus corporis cogitetur multiplicari per quadratum illius distantiae a plano positione dato; erit aggregatum omnium productorum *Momentum inertiae totius corporis respectu ejusdem plani*.

399. Corollarium 1.

Momentum inertiae summae plurium massarum respectu dati axeos vel plani aequale est summae momentorum singularum massarum respectu ejusdem axeos vel plani (398. §.).

400. Corollarium 2.

Adeoque momentum inertiae p massae P aequalis differentiae  $S - Q$  duarum massarum S, Q respectu dati axeos vel plani aequabitur differentiae  $s - q$  momentorum s, q harum massarum respectu ejusdem axeos vel plani: nimirum ob  $S = P + Q$  hinc  $s = p + q$  (399. §.), erit  $p = s - q$ .

## 401. Corollarium 3.

Si data massa variabilis  $K$ , cujus momentum inertiae respectu dati axeos vel plani sit  $k$ , vel incrementum aliquod  $X$  capiat, vel decrementum  $X$  patiat; debet necessario etiam illius momentum inertiae  $k$  capere certum incrementum  $x$ , vel pati decrementum  $x$ , aequale momento inertiae massae  $X$  respectu ejusdem plani vel axeos (399. 400. §.).

## 402. Corollarium 4.

Sit  $\mu$  momentum inertiae datae massae  $M$  relatae ad axem vel planum  $A$ . Si tota massa  $M$  in unico puncto in distantia  $=k$  ab axe vel plano  $A$  collecta concipiatur; erit  $Mk^2$  illius momentum inertiae respectu ejusdem axeos vel plani (398. §.): igitur erit  $\mu = Mk^2$ , modo distantia  $k$  sic determinetur, ut sit  $k = \sqrt{\frac{\mu}{M}}$ . Licebit itaque momentum inertiae cujuslibet massae  $M$  respectu dati axeos vel plani  $A$  aequare producto  $Mk^2$  ex eadem massa in quadratum rectae  $k$  determinantis distantiam puncti, in quo tota massa  $M$  collecta idem haberet momentum inertiae  $\mu$  respectu ejusdem axeos vel plani  $A$ .

## 403. Corollarium 5.

Fig. 70. Datus axis  $BC$  (70. Fig.) consideretur instar communis intersectionis duorum planorum  $ABCD$ ,  $EFBC$  angulum rectum  $DCE$  comprehendentium,  $p$  vero sit minima particula datae cujuscunque massae. Si ad plana  $AC$ ,  $FC$  ducantur perpendiculara  $pa$ ,  $pc$ , et  $pb$  sit perpendicularis ad axem  $BC$ ; erunt  $pab$ ,  $pcb$  rectangula similia, et aequalia: igitur fiet  $p \cdot pb^2 = p(pa^2 + ab^2) = p \cdot pa^2 + p \cdot pc^2$ . Quare, si massa quaecunque  $M$  in minimas particulas mente resolvatur, et cum dato axe  $BC$  jungantur bina quaecunque plana ad invicem perpendicularia, quorum communis intersectio sit ipse axis  $BC$ ; erit productum ex qualibet particula  $p$  massae  $M$  in quadratum distantiae  $pb$  ab axe  $BC$  aequale summae productorum ex eadem particula in quadrata illius distantiarum  $pa$ ,  $pc$  a planis  $AC$ ,  $FC$ : igitur momentum inertiae cujuslibet massae  $M$  respectu dati axeos  $BC$  aequatur summae momentorum inertiae ejusdem massae respectu duorum planorum  $AC$ ,  $FC$  sese in dato axe intersectantium (398. §.).

## 404. Corollarium 6.

Si minimae particulae datae massae inaequaliter distant ab axe vel plano positione dato; erit illius momentum inertiae respectu dati axeos vel plani majus producto ex tota massa in quadratum distantiae minimae, et simul minus producto ex tota massa in quadratum distantiae maximae (398. §.)

## 405. Problema.

Dato momento inertiae corporis cujuscunque  $Z$  respectu axeos  $IK$  trans. Fig. 71. euntis per illius centrum gravitatis  $G$ ; invenire ejus momentum inertiae respectu alterius axeos  $CD$  priori paralleli (71. Fig).

## Solutio.

1. Sit  $AB$  planum, in quo jacent axes  $IK$ ,  $CD$ , et  $LH$ ,  $EF$  sint plana inter se parallela ad planum  $AB$  in  $IK$ ,  $CD$  perpendicularia; erit distantia planorum  $LH$ ,  $EF$  aequalis distantiae  $D = Gg$  centri gravitatis  $G$  dati corporis  $Z$  ab axe  $CD$ .

2. Si porro, denotante  $M$  massam corporis  $Z$ , denotet  $MG^2$  illius momentum inertiae respectu axeos  $IK$ ,  $Mg^2$  vero momentum inertiae respectu novi axeos  $CD$ , et  $A$ ,  $H$ ,  $F$  sint ejus momenta inertiae respectu planorum  $AB$ ,  $LH$ ,  $EF$ ; debet esse per (403. §.)

$$MG^2 = A + H; \quad Mg^2 = A + F:$$

$$\text{igitur} \quad Mg^2 = MG^2 + F - H.$$

3. Cum planum  $LH$  transeat per centrum gravitatis  $G$  dati corporis  $Z$ ; dividet illud hoc corpus in duas partes ad diversas ejusdem plani partes jacentes, ita ut quaevis particula unius partis corporis  $Z$  extra plana  $LH$ ,  $EF$  alicubi in  $q$ , et quaevis alterius partis alicubi intra eadem plana in  $p$  vel extra in  $r$  debeat jacere.

4. Si ex quavis particula  $p$  vel  $r$  ducatur ad planum  $LH$  perpendicularis  $pa$  vel  $ra$ , quae plano  $EF$  occurrat in  $b$ ; erit

$$p \cdot pb^2 = p(ab - pa)^2 = p(Gg - pa)^2;$$

$$r \cdot rb^2 = r(ar - ab)^2 = r(ar - Gg)^2;$$

$$\text{igitur} \quad p \cdot pb^2 = p(D - pa)^2 = p \cdot D^2 + p \cdot pa^2 - 2p \cdot pa \cdot D;$$

$$r \cdot rb^2 = r(ar - D)^2 = r \cdot D^2 + r \cdot ar^2 - 2r \cdot ar \cdot D.$$

Et si ex qualibet particula  $q$  ducatur ad planum  $LH$  perpendicularis  $qa$ , quae plano  $EF$  in  $b$  occurrat; erit

$$q \cdot qb^2 = q(ab + qa)^2 = q(Gg + qa)^2;$$

$$\text{igitur } q \cdot qb^2 = q(D + qa)^2 = q \cdot D^2 + q \cdot qa^2 + 2q \cdot qa \cdot D.$$

5. Hinc (4) generatim sequitur, productum ex quavis minima particula  $z$  dati corporis  $Z$  in quadratum illius distantiae a plano  $EF$  obtentum iri, si producto ex particula  $z$  in quadratum ejus distantiae a plano  $LH$  addatur productum ex eadem particula in quadratum distantiae  $D = Gg$ , tum duplum productum ex particula  $z$  in illius distantiam a plano  $LH$  multiplicatum per  $D$  vel addatur summae illorum productorum, vel indidem subtrahatur, prout particula  $z$  alicubi in  $q$ , vel alicubi in  $p$  aut  $r$  jacet.

6. Cum ergo omnes minimae particulae dati corporis  $Z$  ita sint distributae respectu plani  $LH$ , ut aliquae illarum, ut  $p$ ,  $r$ , necessario ad partem  $IOBK$ , aliae vero, ut  $q$ , ad partem oppositam  $IANK$  debeant cadere (3); debet aggregatum productorum ex singulis particulis corporis  $Z$  in quadrata distantiarum a plano  $EF$  (seu  $F$  in (2) per §. 398.) ita dependere a summa productorum ex iisdem particulis in quadrata respectivarum distantiarum a plano  $LH$  (seu ab  $H$  in (2) per §. 398.), ut illud sit proditurum, si huic addatur summa productorum ex singulis minimis particulis massam  $M$  corporis  $Z$  constituentibus in  $D^2$  (adeoque productum  $M \cdot D^2$  ex tota massa  $M$  in  $D^2$ ), et dupla summa productorum ex singulis particulis ad partem  $IANK$  cadentibus in illarum distantias a plano  $LH$  multiplicata per  $D = Gg$ , tum a summa subtrahatur dupla summa productorum ex singulis particulis cadentibus ad partem  $IOBK$  in distantias illarum a plano  $LH$  multiplicata per  $D$ , ob (5). Quamobrem, quia summa productorum ex singulis particulis corporis  $Z$  jacentibus ad partem  $IANK$  plani  $LH$  exaequat momentum staticum partis corporis  $Z$  ad eandem partem cadentis (3), et summa productorum ex singulis particulis corporis  $Z$  jacentibus ad partem  $IOBK$  plani  $LH$  dat momentum staticum partis corporis  $Z$  ad eandem partem cadentis (3) respectu plani  $LH$  (147. 52. §.); si illud momentum vocetur  $m$ , et istud  $m'$ , habebimus  $F = H + M \cdot D^2 + 2mD - 2m'D = H + M \cdot D^2 + 2D(m - m')$ . Sed momenta statica  $m$ ,  $m'$  partium corporis  $Z$ , in quas istud a plano  $LH$  per ejus centrum gravitatis  $G$  transe-

transiente dirimitur, respectu ejusdem plani sunt inter se aequalia (163. §.); debet ergo esse  $m - m' = 0$ , et  $F = H + M \cdot D^2$ .

7. Hinc vero (6) et ex (2) fit  $Mg^2 = MG^2 + M \cdot D^2$ .

#### 406. Corollarium 1.

Dato momento inertiae massae  $uvxy$  (72. 73. Fig.) respectu axeos Fig. 72. 73.  $mn$  transeuntis per illius centrum gravitatis  $\gamma$  invenietur momentum inertiae ejusdem massae respectu alterius axeos  $MN$  priori paralleli, si dato momento addatur productum ex massa  $uvxy$  in quadratum distantiae  $\gamma C$  illius centri gravitatis  $\gamma$  a novo axe  $MN$  (405. §.).

#### 407. Corollarium 2.

Et vicissim, cognito momento inertiae datae massae  $uvxy$  respectu alicujus axeos  $MN$ , invenietur illius momentum inertiae respectu axeos  $mn$  transeuntis per centrum gravitatis  $\gamma$  et paralleli axi  $MN$ ; si a dato momento subtrahatur productum ex massa  $uvxy$  in quadratum distantiae  $\gamma C$  centri gravitatis  $\gamma$  ab axe  $MN$  (406. §.).

#### 408. Corollarium 3.

Sit massa quaecunque  $M$  relata ad tres axes  $A, B, C$ , quorum primus  $A$  transeat per centrum gravitatis ejusdem massae, et quivis axium  $B, C$  sit axi  $A$  parallelus, seu planum, in quo jacent axes  $A, B$  idem sit cum plano, in quod cadunt axes  $A, C$ , seu ab illo diversum. Si  $A', B', C'$  sint momenta inertiae massae  $M$  respectu axium  $A, B, C$ , axesque  $B, C$  jaceant in distantibus  $d, D$  a centro gravitatis massae  $M$ ; debet esse per (407. §.)

$$A' = B' - M \cdot d^2; \quad A' = C' - M \cdot D^2;$$

$$\text{igitur } B' - M \cdot d^2 = C' - M \cdot D^2;$$

$$\text{hinc } C' = B' + M(D^2 - d^2), \text{ et } B' = C' - M(D^2 - d^2).$$

#### 409. Corollarium 4.

Cognito ergo momento inertiae massae  $M$  respectu certi axeos invenietur momentum inertiae ejusdem massae respectu cujuscunque alterius axeos priori paralleli, si productum ex massa  $M$  in differentiam quadratorum distantiarum illius centri gravitatis ab utroque axe cognito momento addatur, vel ab illo subtrahatur, prout distantia centri a novo axe, respectu  
cujus

cujus momentum quaeritur, est major vel minor quam illius distantia a priori axe, respectu ejus momentum noscitur (408. §).

## 410. Corollarium 5.

Hinc (408. §.) porro sequitur, pro  $D=d$  debere esse  $B'=C'$ , id est: momenta inertiae cujuslibet massae  $M$  respectu omnium axium inter se parallelorum in diversis planis jacentium et a centro gravitatis massae  $M$  aequidistantium sunt inter se aequalia.

## 411. Corollarium 6.

Fig. 74. Datis momentis inertiae  $P, R$  duarum partium  $uyx=p, uvx=r$  constituentium massam  $uvxy$  (74. Fig.) respectu axium  $PQ, RS$  parallelorum per centra gravitatis  $G, g$  illarum partium transeuntium, invenietur momentum inertiae  $A$  totius massae  $uvxy$  respectu cujusvis tertii axeos  $AB$  prioribus paralleli et intra vel extra illos cadentis, si summae momentorum  $P, R$  addatur summa productorum ex massis  $p=uyx, r=uvx$  in quadrata distantiarum  $Ge, gE$  centrorum gravitatis  $G, g$  a novo axe  $AB$ . Cum enim in hac hypothese sit  $P+p \cdot Ge^2$  momentum inertiae massae  $p=uyx$  respectu axeos  $AB$ , et  $R+r \cdot gE^2$  momentum inertiae massae  $r=uvx$  respectu axeos  $AB$  per (406. §.), et momentum inertiae massae  $uvxr=p+r$  respectu axeos  $AB$  debeat aequari summae momentorum inertiae massarum  $p, r$  respectu ejusdem axeos (399. §.); necessarium est, ut illud momentum sit =

$$P+R+p \cdot Ge^2+r \cdot gE^2.$$

## Scholion.

Adplicabimus jam haec ad praecipuas corporum figuras, quales in disquisitionibus mechanicis solent occurrere. Notent vero sibi tyrones, in hac quoque disquisitione ubique nos massas tantum homogeneas et aequaliter densas prae oculis habituros, ut per corporum volumina tam illorum massas, quam pondera iis proportionalia liceat exprimere, prout id in investigatione centri gravitatis observavimus (167. §. Schol.).

## 412. Problema.

Fig. 75. Invenire momentum inertiae dati cujuscunque cylindri recti  $ABDC$  (75. Fig.) respectu illius axeos  $ab$ .

Solutio.

## Solutio.

1. In radio  $aB=R$  baseos capiatur  $x=ae$  pro radio cylindri variabilis  $deqp$ ; erit, posito axe  $ab=a$ , massa cylindri  $ABDC=M=\pi aR^2$ , et massa cylindri  $deqp=m=\pi ax^2$ .

2. Si jam variabilis  $x=ae$  augeatur quacunq̄ue differentia  $\Delta x=eg$ , abibit cylinder  $deqp$  in cylindrum  $hgnm=\pi a(x+\Delta x)^2$ ; quodsi ergo  $\mu$  denotet momentum inertiae cylindri variabilis  $deqp=m$ , crescente variabili  $x=ae$  differentia  $\Delta x=eg$  crescet massa  $m=deqp$  differentia  $\Delta m=hgnm-deqp=\pi a(x+\Delta x)^2-\pi ax^2=\pi a(2x\Delta x+\Delta x^2)$ , et illius momentum  $\mu$  crescet differentia  $\Delta \mu$  aequali momento inertiae massae  $\Delta m$  (401. §.).

3. Minima distantia particularum massam  $\Delta m=hgnm-deqp$  inter superficies convexas cylindrorum  $deqp$ ,  $hgnm$  interceptam constituentium ab axe  $ab$  est radius  $ae=x$ , et distantia maxima radius  $ag=x+\Delta x$ : momentum inertiae  $\Delta \mu$  massae  $\Delta m$  respectu axeos  $ab$  est ergo majus producto  $\Delta m \cdot x^2$  et minus producto  $\Delta m(x+\Delta x)^2$  per (404. §.). Ob (2) habebimus ergo pro quavis utcunq̄ue exigua differentia  $\Delta x=eg$

$$\Delta \mu > \pi a(2x\Delta x + \Delta x^2) \cdot x^2;$$

$$\text{et } \Delta \mu < \pi a(2x\Delta x + \Delta x^2)(x + \Delta x)^2;$$

adeoque fiet

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} > 2\pi ax^3 + \pi ax^2 \Delta x;$$

$$\text{et } \frac{\Delta \mu}{\Delta x} < 2\pi ax^3 + \pi a(5x^2 \Delta x + \Delta x \Delta x^2 + \Delta x^3).$$

4. Exponens rationis differentialis functionis  $\mu$  aequalis momento inertiae cylindri  $deqp$  debet ergo ob (3) per (Vol. I. §. 131.) esse

$$\epsilon \mu = 2\pi ax^3 \epsilon x; \text{ hinc } \mu = \frac{1}{2} \pi ax^4.$$

5. Quodsi jam fiat  $x=aB=R$ ; obtinebitur momentum inertiae totius cylindri  $ABDC$  per (1) (4)

$$\mu = \frac{1}{2} \pi aR^4 = \frac{1}{2} M \cdot R^2.$$

## 413. Corollarium 1.

Momentum inertiae cylindri excavati (75. Fig.), cujus cavitas  $deqp$  Fig. 75. sit cylindrica ejusdem axeos  $ab=a$ , respectu axeos  $ab$  erit aequale differentiae momenti inertiae  $\frac{1}{2} \pi ar^4$  massae cavitatem explentis a momento

inertiae  $\frac{1}{2}\pi aR^4$  totius cylindri ABDC pro perfecte pleno accepti (412. §.), denotante  $r = a$  e radium cavitatis et  $R = aB$  radium totius cylindri (400. §.): si ergo  $\mu$  denotat momentum inertiae cylindri excavati, et  $M$  illius massam seu pondus (411. §. Schol.), erit

$$\mu = \frac{1}{2}\pi aR^4 - \frac{1}{2}\pi ar^4 = \frac{1}{2}\pi a(R^2 - r^2)(R^2 + r^2);$$

$$\text{seu } \mu = \frac{1}{2}\pi a(R^4 - r^4) = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2).$$

## 414. Corollarium 2.

Momentum inertiae cylindri ABDC respectu axeos AC paralleli axi ab et jacentis in ejus convexa superficie, cum centrum gravitatis cylindri in ab sit situm (219. §.) erit  $= \frac{1}{2}\pi aR^4 + \pi aR^2 \cdot R^2 = \frac{3}{2}\pi aR^4 = \frac{3}{2}M \cdot R^2$  (412. 406. §.). Si vero desideretur momentum inertiae cylindri ABDC respectu cujuscunque alterius axeos EF axi ab paralleli; invenietur id  $= \frac{1}{2}\pi aR^4 + \pi aR^2 \cdot aG^2 = \frac{1}{2}M \cdot R^2 + M \cdot aG^2$  pro distantia mutua aG axium ab, EF (412. 406. §.).

## 415. Problema.

Fig. 59. *Data aequatione ad lineam QX (59. Fig.) inter coordinatas orthogonas  $x = Qb$ ,  $y = Ab$ , cujus revolutione circa axem QC generetur corpus QXSZR X; invenire momentum inertiae segmenti QADBE respectu axeos QC.*

## Solutio.

1. Si variabilis  $x = Qb$  crescat quacunqve differentia  $\Delta x = ba$ ; debet massa  $m = AQB$  capere incrementum  $\Delta m = ABqp$ , et illius momentum inertiae  $\mu$  respectu axeos QC capiet incrementum  $\Delta \mu$  aequale momento inertiae massae  $\Delta m = ABqp$  respectu axeos QC per (401. §.); ordinata vero  $y = Ab$  aequalis radio sectionis ADBEA crescet certa differentia  $\Delta y$ , per quam determinabitur radius  $pa = y + \Delta y$  sectionis  $prqs$ .

2. Iam vero evidens est, massam  $\Delta m = ABqp$  aequari uni parti cylindri baseos  $prqs$  et altitudinis  $ba = \Delta x$ , cylindrum vero baseos ADBEA et altitudinis  $ba = \Delta x$  aequalem esse uni parti massae  $\Delta m = ABqp$ : momentum ergo inertiae  $\Delta \mu$  massae  $\Delta m$  (1) erit majus momento inertiae cylindri posterioris, et minus momento cylindri prioris respectu axeos QC (399. §.). Quamobrem, cum ob (1) per (412. §.) sit  $\frac{1}{2}\pi y^4 \Delta x$  momentum inertiae cylindri posterioris; et  $\frac{1}{2}\pi (y + \Delta y)^4 \Delta x$  momentum inertiae cylindri prioris, debet esse

$$\Delta \mu > \frac{1}{2}\pi y^4 \Delta x: \Delta \mu < \frac{1}{2}\pi (y + \Delta y)^4 \Delta x.$$

3. Quid-

3. Quidquid sit functio  $y$  variabilis  $x$  determinata per datam aequationem inter  $y, x$ ; extare debebunt certi coefficientes  $f, g, h, \text{etc.}$  independentes a  $\Delta x$ , pro quibus fieret  $\Delta y = f\Delta x + g\Delta x^2 + h\Delta x^3 + \text{etc}$  (Vol. I. §. 84), eoque ipso erunt alii ejusmodi coefficientes  $A, B, C, \text{etc.}$  possibiles, pro quibus fieret  $(y + \Delta y)^4 = y^4 + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \text{etc.}$  (Vol. I. §. 32): in (2) debet igitur esse

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} > \frac{1}{2} \pi y^4;$$

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} < \frac{1}{2} \pi y^4 + \frac{1}{2} \pi (A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \text{etc.}).$$

4. Ob (3) per (Vol. I. §. 131.) erit itaque exponens rationis differentialis functionis  $\mu$  aequalis momento inertiae segmenti  $AQB = m$  respectu axeos  $QC$

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{2} \pi y^4 \varepsilon x = \frac{1}{2} y^2 \varepsilon m;$$

$$\text{pro } \varepsilon m = \pi y^2 \varepsilon x \text{ per (Vol. I. §. 490.)}$$

Quare, si ex data aequatione inter  $y, x$  exprimat  $y$  per  $x$ , vel  $\varepsilon x$  per  $y$  et  $\varepsilon y$ , licebit ope calculi integralis tam massam  $m$  segmenti  $QADBEA$ , quam illius momentum inertiae  $\mu$  respectu axeos  $QC$  determinare.

416. Corollarium I.

Sit  $QX$  linea recta, proinde  $QXZ$  conus rectus axeos  $QC = a$ , et radii baseos  $XC = R$ ; habebimus pro  $x = Qb, y = Ab$

$$y : x = R : a; \text{ hinc } y^2 = \frac{R^2}{a^2} x^2;$$

$$\varepsilon m = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2 \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi R^4}{2a^4} x^4 \varepsilon x \text{ (415. §.)}$$

Consequenter integrando inueniemus

$$m = \frac{\pi R^2}{3a^2} x^3; \quad \mu = \frac{\pi R^4}{10a^4} x^5 = \frac{1}{10} m \cdot \frac{R^2 x^2}{a^2}.$$

Hinc pro  $x = QC = a$  prodibit massa  $M = \frac{\pi R^2}{3} a$ , et momentum inertiae  $\mu = \frac{\pi R^4 a}{10} = \frac{1}{10} M \cdot R^2$  totius coni recti  $XQZ$  respectu illius axeos  $QC$ .

## 417. Corollarium 2.

Fig. 57. Momentum inertiae  $\mu$  coni truncati et recti  $bdDB$  (57. Fig.) respectu illius axeos  $cC$ , si  $M$  sit illius massa,  $dc=r$  radius minoris,  $DC=R$  vero radius majoris baseos, et  $Cc=\alpha$  axis, erit aequale differentiae momenti inertiae coni  $Abd$  a momento coni  $ABD$  (400. §.), adeoque per (416. §.)

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{10} \pi R^4 \cdot AC - \frac{1}{10} \pi r^4 \cdot Ac \\ &= \frac{1}{10} \frac{\pi \alpha R^5}{R-r} - \frac{1}{10} \frac{\pi \alpha r^5}{R-r};\end{aligned}$$

id est

$$\mu = \frac{1}{10} \alpha \pi \frac{R^5 - r^5}{R-r} = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

## 418. Corollarium 3.

Fig. 59. Sit  $QX$  quadrans circuli, et  $XQZ$  dimidius globus radii  $XC=QC=R$ ; erit  $y^2=2Rx-x^2$ : igitur in (415. §.) fiet

$$\varepsilon m = \pi(2Rx - x^2) \varepsilon x; \quad \mu = \frac{\pi}{2} (2Rx - x^2)^2 \varepsilon x.$$

Hinc integrando reperiemus massam  $m$  segmenti sphaerici  $AQB$  pro quavis abscissa  $x=Qb$ , et illius momentum inertiae  $\mu$  respectu axeos  $QC$ , nimirum

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{2} \pi x^2 (3R - x); \\ \mu &= \frac{1}{10} \pi x^3 (20R^2 - 15Rx + 3x^2). \\ \text{feu } \mu &= \frac{1}{10} m \cdot \frac{20R^2 x - 15R x^2 + 3x^3}{3R - x}.\end{aligned}$$

## 419. Corollarium 4.

Pro  $x=QC=R$  in (418. §.) inuenietur massa  $m$  et momentum inertiae  $\mu$  dimidii globi  $XQZ$  respectu axeos  $QC$  ad basim  $XRZSX$  perpendicularis, nimirum

$$m = \frac{2}{3} \pi R^3; \quad \mu = \frac{4}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2.$$

Si autem bis sumas tam massam, quam momentum inertiae dimidii globi, inuenies massam  $M$  et momentum inertiae  $\mu$  totius globi respectu illius axeos (399. §.), nimirum

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \mu = \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2.$$

## 420. Corollarium 5.

Determinatis momentis inertiae segmentorum sphaericorum AQB, pQq respectu axeos QC per (418. §.); invenies momentum inertiae massae ABqp, interceptae inter sectiones sphaerae ADBE, prqsp inter se parallelas et axi QC per illarum centra b, a transeunti perpendiculares, respectu ejusdem axeos, si momentum segmenti AQB subtrahas a momento segmenti pQq per (400. §.).

## 421. Corollarium 6.

Momentum inertiae globi excavati, ita ut illius cavitas sit sphaera concentrica, respectu axeos ejusdem reperietur aequalis differentiae momenti massae cavitatem expientis a momento totius globi pro perfecte solido accepti (400. §.): quodsi ergo radius totius globi vocetur R, radius cavitatis r, massa vero seu pondus globi excavati M, et illius momentum inertiae  $\mu$ ; erit per (419.)

$$\mu = \frac{2}{15} \pi R^5 - \frac{2}{15} \pi r^5: \quad M = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Adeoque etiam

$$\mu = \frac{2}{15} \pi (R^5 - r^5) = \frac{2}{3} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

## 422. Corollarium 7.

Sit QX arcus parabolae, pro quo erit  $y^2 = px$  (Vol. I. §. 508); debeat esse in (415. §.)

$$\varepsilon m = \pi p x \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{1}{2} \pi p^2 x^2 \varepsilon x:$$

consequenter fiet

$$m = \frac{1}{2} \pi p x^2; \quad \mu = \frac{1}{8} \pi p^2 x^3 = \frac{1}{4} m \cdot y^2,$$

ubi m denotat pondus seu massam segmenti AQB conoidis parabolici XQZ, et  $\mu$  illius momentum inertiae respectu axeos QC.

## 423. Corollarium 8.

Pro arcu QA hyperbolae, cujus revolutione circa axem transversum QC generetur conois QADBEA; erit per (Vol. I. §. 550)

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2: \quad \text{pro massa } m \text{ conoidis } QAB, \text{ et momento inertiae } \mu \text{ respectu axeos } QC \text{ habebimus ergo per (415. §.)}$$

$$\epsilon m = \pi \left( \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) \epsilon x; \quad \epsilon \mu = \frac{1}{2} \pi \left( \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2 \right)^2 \epsilon x;$$

et integrando inueniemus

$$m = \frac{\pi b^2}{6 a^2} (3 a x^2 + 2 x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi b^4}{60 a^4} (10 a^2 x^3 + 15 a x^4 + 6 x^5).$$

$$\text{feu } \mu = \frac{b^2}{10 a^2} m \frac{10 a^2 x + 15 a x^2 + 6 x^3}{3 a + 2 x}.$$

#### 424. Corollarium 9.

Quodsi autem QA fit arcus ellipseos, cujus revolutione circa axem transversum QC generetur segmentum AQB = m sphaeroidis elliptici; erit  $y^2 = \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$  (Vol. I. §. 525): pro momento inertiae  $\mu$  segmenti m = AQB respectu axeos QC debebit ergo per (415. §.) esse

$$\epsilon m = \pi \left( \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) \epsilon x; \quad \epsilon \mu = \frac{\pi}{2} \left( \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right)^2 \epsilon x;$$

$$m = \frac{\pi b^2}{6 a^2} (3 a x^2 - 2 x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi b^4}{60 a^4} (10 a^2 x^3 - 15 a x^4 + 6 x^5).$$

$$\text{feu } \mu = \frac{b^2}{10 a^2} m \frac{10 a^2 x - 15 a x^2 + 6 x^3}{3 a - 2 x}.$$

#### 425. Corollarium 10.

Et pro  $x = QC = \frac{1}{2} a$  in (424. §.) prodibit massa m, et momentum inertiae  $\mu$  dimidii sphaeroidis elliptici XQZ respectu axeos transversu QC, nimirum

$$m = \frac{\pi b^2 a}{12}; \quad \mu = \frac{\pi b^4 a}{120} = \frac{1}{10} m b^2.$$

Hujus duplum dabit massam M integri sphaeroidis et illius momentum inertiae  $\mu$  respectu axeos transversu, nimirum

$$M = \frac{\pi b^2 a}{6}; \quad \mu = \frac{\pi b^4 a}{60} = \frac{1}{10} M b^2.$$

## 426. Corollarium 11.

Eodem prorsus modo invenietur momentum inertiae  $\mu$  segmenti  $m = AQB$  sphaeroidis elliptici revolutione arcus  $QA$  ellipseos circa axem conjugatum  $QC$  geniti. Hoc enim casu, pro  $x = Qb$ ,  $y = Ab$ , erit aequatio ad ellipsim  $y^2 = \frac{a^2}{b} x - \frac{b^2}{b^2} x^2$ : igitur per (415. §.)

$$m = \pi \left( \frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2 \right) \varepsilon x; \quad \mu = \frac{\pi}{2} \left( \frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2 \right)^2 \varepsilon x;$$

$$m = \frac{\pi a^2}{6b^2} (3bx^2 - 2x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi a^4}{60b^4} (10b^2x^3 - 15bx^4 + 6x^5).$$

$$\text{feu } \mu = \frac{a^2}{10b^2} m \frac{10b^2x - 15bx^2 + 6x^3}{3b - 2x}.$$

## 427. Corollarium 12.

Et pro femiaxe conjugato  $x = QC = \frac{1}{2}b$  obtinebis ex (426. §.) massam  $m$  et momentum inertiae  $\mu$  dimidii sphaeroidis elliptici  $XQZ$  revolutione quadrantis  $QX$  ellipseos circa femiaxem conjugatum  $QC$  geniti, cujus duplum dabit massam  $M$  et momentum inertiae  $\mu$  integri sphaeroidis revolutione ellipseos circa axem conjugatum geniti respectu ejusdem axeos, nimirum

$$M = \frac{\pi a^2 b}{6}; \quad \mu = \frac{\pi a^4 b}{60} = \frac{1}{10} M a^2.$$

## 428. Corollarium 13.

Centrum gravitatis globi  $BPDQ$  (76. Fig.) coincidit cum illius centro magnitudinis  $C$  (231. §.): quare, si axis  $mn$  detur in distantia  $AC = AB + BC = d + R$  a centro  $C$ , pro radio globi  $BC = R$ , et  $BA = d$ , cum momentum inertiae globi  $BPDQ = M$  respectu diametri  $PQ$  axi  $mn$  parallelae sit  $\frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2$  (419. §.); erit illius momentum inertiae  $\mu$  respectu axeos  $mn$  per (406 §.)

$$\mu = \frac{8}{15} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^3 (d + R)^2 =$$

$$= \frac{2}{5} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^3 (d + 2R) d;$$

$$\text{feu } \mu = \frac{1}{5} M (7R^2 + 10Rd + 5d^2).$$

Et

Et pro  $d=BA=0$  erit momentum inertiae globi  $M=BPDQ$  respectu axeos  $pq$  illum in  $B$  tangentis

$$\mu = \frac{28}{15} \pi R^2 = \frac{7}{3} MR^2.$$

## 429. Problema.

Fig. 77. *Invenire momentum inertiae lentis BPDQ (77. Fig.) ex duobus segmentis sphaericis BPD, BQD compositae respectu illius axeos minoris PQ.*

## Solutio.

1. Sint axes lentis  $PQ=2b$ ,  $BD=2a$ , adeoque semiaxes  $PC=b$ ,  $BC=a$ : cum semiaxis  $BC$  sit ordinata circuli maximi sphaerae, ad quam segmenta  $BPD$ ,  $BQD$  pertinent, respondens abscissae  $PC$ , si radius ejusdem sphaerae vocetur  $R$ ; erit

$$a^2 = 2Rb - b^2; \text{ hinc } R = \frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

2. Pro hoc ergo valore radii  $R$ , si ponas  $x=PC=b$  in (418. §.), invenes et massam  $m$  segmenti  $BPD$ , et illius momentum inertiae respectu axeos  $PQ$ , cujus duplum dabit massam  $M$  totius lentis  $BPDQ$ , ejusque momentum inertiae  $\mu$  respectu axeos  $PQ$ .

$$M = \frac{2}{3} \pi b^2 (3R - b);$$

$$\mu = \frac{1}{15} \pi b^3 (20R^2 - 15Rb + 3b^2);$$

consequenter

$$M = \frac{1}{3} \pi (3a^2b + b^3);$$

$$\mu = \frac{1}{30} \pi (10a^4b + 5a^2b^3 + b^5) = \frac{1}{15} M \cdot \frac{10a^4 + 5a^2b^2 + b^4}{3a^2 + b^2}.$$

## 430. Corollarium.

Centrum gravitatis lentis  $BPDQ$  ex segmentis sphaericis aequalibus  $BPD$ ,  $BQD$  compositae coincidit cum medio puncto  $C$ , in quo illius axes  $PQ=2b$ ,  $BD=2a$  sese bissecant (229. 154. §.): momentum inertiae ejusdem lentis respectu axeos  $mn$  paralleli ejus axi minori  $PQ$ , et perpendicularis ad axem majorem  $BD$  in  $A$  productum, erit ergo  $=\mu + M.AC^2$ , denotante  $M$  massam lentis, et  $\mu$  illius momentum inertia respectu axeos  $PQ$  (406. §.). Quamobrem, sumto valore pro  $\mu$  et  $M$  ex (429. §.), positaque distantia  $AB=d$ , ut sit  $AC=d+a$ ; erit momentum inertiae lentis respectu axeos  $mn$

$$= \frac{1}{30} \pi (10 a^4 b + 5 a^2 b^3 + b^5) + \frac{1}{3} \pi (3 a^2 b + b^3) (d + a)^2 =$$

$$= \frac{1}{10} M \left( 10 (d + a)^2 + \frac{10 a^4 + 5 a^2 b^2 + b^4}{3 a^2 + b^2} \right).$$

Hinc, si fiat  $d = AB = 0$ , obtinebitur momentum inertiae lentis BPDQ respectu axeos pq in vertice ejus B paralleli axi minori PQ et perpendicularis ad axem majorem BD, nimirum =

$$\frac{1}{30} \pi (40 a^4 b + 15 a^2 b^2 + b^5) =$$

$$= \frac{1}{10} M \cdot \frac{40 a^4 + 15 a^2 b^2 + b^4}{3 a^2 + b^2}.$$

## 431. Problema.

*Investigare momentum inertiae dati corporis ADC (30. Fig.) respectu Fig. 30. plani MN positione dati.*

## Solutio.

1. Sit PQ perpendicularis ad planum MN, sumtaque ejus parte variabili  $x = Qb$  cogitetur per b transire planum br parallelum plano MN, quod ex toto corpore ADC abscindat partem rsCD = m, cujus momentum inertiae respectu plani MN vocetur  $mk^2$ .

2. Si variabilis  $x = Qb$  crescat differentia  $\Delta x = ba$ , crescet functio m aequalis massae rsCD differentia  $\Delta m$  aequali massae rsqp inter plana br, ap parallela interceptae, et momentum inertiae  $mk^2$  massae m crescet differentia  $\Delta mk^2$  aequali momento inertiae massae  $\Delta m = pqs$  respectu plani MN per (401. §.). Cum jam  $x = Qb$  sit minima, et  $x + \Delta x = Qa$  maxima inter distantias omnium minimarum particularum massam  $\Delta m = pqs$  constituentium a plano MN; erit per (404. §.)

$$\Delta mk^2 > \Delta m \cdot x^2 \text{ et } \Delta mk^2 < \Delta m (x + \Delta x)^2;$$

$$\text{feu } \Delta mk^2 > \Delta m \cdot x^2 \text{ et } \Delta mk^2 < \Delta m \cdot x^2 + \Delta m (2x \Delta x + \Delta x^2).$$

3. Quidquid vero est functio m variabilis x, dari debent certi coefficientes f, g, h, etc. independentes a  $\Delta x$ , pro quibus fieret  $\Delta m = \frac{\varepsilon m}{\varepsilon x} \Delta x + f \Delta x^2 + g \Delta x^3 + \text{etc.}$  (Vol. I. §. 84): in (2) erit ergo pro qualibet cogitabili differentia  $\Delta x = ba$

$$\frac{\Delta m k^2}{\Delta x} > \frac{x^2 \varepsilon m}{\varepsilon x} + f x^2 \Delta x + g x^2 \Delta x^2 + \text{etc.};$$

$$\frac{\Delta m k^2}{\Delta x} < \frac{x^2 \varepsilon m}{\varepsilon x} + f x^2 \Delta x + g x^2 \Delta x^2 + \text{etc.} \\ + \left( \frac{\varepsilon m}{\varepsilon x} + f \Delta x + g \Delta x^2 + \text{etc.} \right) (2x \Delta x + \Delta x^2).$$

4. Hinc (3) per (Vol. I. §. 131.) inveniatur exponens rationis differentialis momenti inertiae  $m k^2$  massae  $m = rsCD$  respectu plani  $MN$ , nimirum  $\varepsilon m k^2 = x^2 \varepsilon m$ .

5. Quamobrem, si exponens  $\varepsilon m$  rationis differentialis massae  $m = rsCD$  pendentis a variabili  $x = Qb$  fuerit per  $x$  et  $\varepsilon x$  determinabilis; poterit quoque ope calculi integralis determinari momentum inertiae  $m k^2$  ejusdem massae respectu plani  $MN$ ; et hinc inveniatur porro momentum inertiae totius massae  $ADC$  pro illo valore variabilis  $x$ , pro quo massa indeterminata  $m = rsCD$  in  $ADC$  abiverit.

#### 432. Corollarium 1.

Investigatio haec momenti inertiae dati corporis respectu plani positione dati serviet in multis casibus ad eo facilius inveniendum momentum inertiae ejusdem corporis respectu dati axeos: si enim concipiantur duo plana sese sub angulo recto interfecantia, ita ut communis illorum intersectio coincidat cum dato axe, tum quaerantur per (431. §.) momenta inertiae corporis respectu utriusque plani; erit summa momentorum aequalis momento inertiae ejusdem corporis respectu dati axeos (403. §.).

#### 433. Corollarium 2.

Fig. 78. Exemplo fit cylinder rectus (78. Fig.) axeos  $ch = a$  et radii  $cd = R$ . Sit enim  $ABDC$  planum transiens per centra  $c, h$  basium, in quo axis  $ch$  jaceat, et radius  $cd$  sit ad  $AB$  perpendicularis: si in hoc capiatur  $cg = x$  et per  $g$  ducatur planum  $abfe$  parallelum plano  $ABDC$ ; erit massa  $ABbaeCDf = m$  certa functio variabilis  $x$ , pro cujus momento inertiae  $\mu$  respectu plani  $ABDC$  debet esse  $\varepsilon \mu = x^2 \varepsilon m$  (431. §.). Cum autem sit  $m = 2a \cdot A c g a$ , hinc  $\varepsilon m = 2a \varepsilon A c g a = 2a \cdot y \varepsilon x$  pro  $ag = y$  (Vol. I. §. 488.); habebimus

$$\varepsilon \mu = 2a x^2 y \varepsilon x = 2a x^2 \varepsilon x \sqrt{(R^2 - x^2)},$$

Hinc

Hinc integrando per (Vol. I. §. 289. 308.) prodibit

$$\mu = -\frac{ax}{2}\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{axR^2}{4}\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{aR^4}{4} \text{Arc Sin } \frac{x}{R}.$$

Pro  $x=cd=R$  erit ergo  $\mu = \frac{aR^4}{4} \text{Arc Sin } 1 = \frac{1}{8} a \pi R^4$  momentum inertiae dimidii cylindri respectu plani  $ABDC$ , et  $2\mu = \frac{1}{4} a \pi R^4$  momentum integri cylindri respectu cujusvis plani  $ABDC$  traesuntis per centra basium  $c, h$ : momentum inertiae integri cylindri respectu illius axeos  $ch$  aequale summae momentorum ejusdem cylindri respectu duorum planorum ad invicem perpendicularium per centra  $c, h$  transentium (432. §.) erit itaque  $= \frac{1}{4} a \pi R^4 + \frac{1}{4} a \pi R^4 = \frac{1}{2} a \pi R^4$  ut in (412. §.).

#### 434. Corollarium 3.

Petatur momentum inertiae  $\mu$  corporis  $ABZX$  (59. Fig.) revolutione Fig. 59. plani  $AbCX$  ad  $b, C$  rectanguli circa axem  $QC$  geniti respectu axeos  $MN$  jacentis in plano ad  $QC$  in  $Q$  perpendiculari, dato illius momento inertiae  $Z$  respectu axeos  $QC$ . Si per (431. §.) quaeratur momentum inertiae  $X$  corporis  $XABZ$  respectu plani in  $Q$  ad  $QC$  perpendicularis; erit  $\mu = X + \frac{1}{2} Z$ .

Quodlibet enim planum, in quo axis  $QC$  jaceat, dividet corpus  $ABZX$  in duas partes similes et aequales, ita ut momenta inertiae respectu omnium ejusmodi planorum inter se aequalia sint futura (398. §.): quodsi ergo cogitentur duo plana sese in  $QC$  sub angulo recto interfecantia, et  $Y$  sit momentum inertiae corporis  $ABZX$  respectu unius talis plani; erit  $Z = Y + Y = 2Y$  momentum inertiae ejusdem corporis respectu axeos  $QC$  (403. §.); adeoque  $Y = \frac{1}{2} Z$ . Sed si unum planum, in quo  $QC$  jacet, concipiatur esse perpendicularare plano, in quo jacet axis  $MN$ , ita ut  $MN$  sit communis intersectio horum planorum; erit eo ipso  $\mu = X + Y$  (403. §.), consequenter  $\mu = X + \frac{1}{2} Z$ .

#### 435. Corollarium 4.

Sit inveniendum momentum inertiae  $\mu$  cylindri recti (78. Fig.) Fig. 78.  $ARSEDC$  respectu axeos  $AB$  cum diametro baseos coincidentis. Pro radio  $cA=R$ , axe  $ch=a$ ,  $cu=x$ , si per  $u$  transeat sectio  $sr$  parallela basi  $ARS$ , fiat massa  $ARSrs=m$ , et illius momentum inertiae respectu plani  $ARS$  sit  $X$ ; erit

$$m = \pi R^2 x; \quad \varepsilon m = \pi R^2 \varepsilon x: \quad \text{igitur (431. §.)}$$

$$\varepsilon X = x^2 \varepsilon m = \pi R^2 x^2 \varepsilon x; \quad X = \frac{1}{3} \pi R^2 x^3.$$

Quamobrem pro  $x = ch = a$  inveniatur  $X = \frac{1}{3} \pi R^2 a^3$  momentum inertiae totius cylindri RSEDC respectu plani ARS: cum ergo  $Z = \frac{1}{2} \pi a R^4$  sit illius momentum respectu axeos ch (412. §.); erit momentum inertiae respectu axeos AB per (434. §.)  $\mu = X + \frac{1}{2} Z = \frac{1}{3} \pi R^2 a^3 + \frac{1}{2} \pi a R^4 = \frac{1}{6} M(4a^2 + 3R^2)$ , denotante M massam cylindri.

## 436. Corollarium 5.

Fig. 56. Quaeratur momentum inertiae  $\mu$  coni recti ABD (56. Fig.) respectu axeos MN jacentis in plano ad axem coni AC  $= a$  perpendiculari, dato tam hoc axe, quam radio baseos BC  $= R$ . Pro  $x = Ac$ , ducta per c sectione cq parallela basi, sit X momentum inertiae massae  $m = Apq$  respectu plani MN, adeoque  $\varepsilon X = x^2 \varepsilon m$  (431. §.). Cum area baseos sit  $= \pi R^2$ , hinc area sectionis pq:  $\pi R^2 = x^2 : a^2$ ; erit  $pq = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2$ ;  $m = \frac{\pi R^2}{3 a^2} x^2$ , hinc  $\varepsilon m = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2 \varepsilon x$ . Quare habebimus

$$\varepsilon X = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2 \varepsilon x; \quad X = \frac{\pi R^2}{5 a^2} x^5.$$

Pro  $x = AC = a$  fiet itaque  $X = \frac{1}{5} \pi R^2 a^3$  momentum inertiae totius conii ABD respectu plani MN. Est autem  $Z = \frac{\pi R^4 a}{10}$  illius momentum respectu axeos AC (416. §.): momentum respectu axeos MN debet ergo per (434. §.) esse  $\mu = X + \frac{1}{2} Z = \frac{1}{5} \pi R^2 a^3 + \frac{1}{20} \pi R^4 a = \frac{3}{20} M(4a^2 + R^2)$ , exprimente M massam conii.

## 437. Corollarium 6.

Fig. 59. Quidquid demum fit corpus QADBEA (59. Fig.) revolutione plani QAb ad b rectanguli circa axem Qb  $= x$  geniti, si  $y = Ab$  sit ordinata curvae QA respondens abscissae  $x = Qb$ , et X designet momentum inertiae corporis QAB  $= m$  respectu plani in Q ad Qb perpendicularis,  $\mu$  vero exprimat illius momentum respectu axeos MN per Q in eodem plano excurrentis, et Z denotet illius momentum respectu axeos Qb; erit

$$\varepsilon X = x^2 \varepsilon m \text{ (431. §.)} = \pi x^2 y^2 \varepsilon x \text{ (Vol. I. §. 490.)};$$

$$\varepsilon Z = \frac{1}{2} \pi y^4 \varepsilon x \text{ (415. §.)}; \quad \varepsilon \mu = \varepsilon X + \frac{1}{2} \varepsilon Z \text{ (434. §.)};$$

igitur

igitur habebimus

$$\epsilon \mu = \pi x^2 y^2 \epsilon x + \frac{1}{4} \pi y^4 \epsilon x = \frac{\pi}{4} (4x^2 y^2 + y^4) \epsilon x.$$

Data itaque aequatione ad curvam QA inter ejus coordinatas orthogonas y, x, licebit ope calculi integralis ex hac expressione momentum inertiae  $\mu$  corporis AQB respectu axeos MN ad Qb perpendicularis immediate elicere.

#### 438. Corollarium 7.

Sit QA arcus circuli, qui circa axem Qb revolutus generet segmentum sphaericum AQB = M; erit  $y^2 = 2Rx - x^2$ : pro momento inertiae  $\mu$  segmenti sphaerici M = AQB respectu axeos MN illud in vertice Q tangentis erit ergo per (437. §.)

$$\begin{aligned} \epsilon \mu &= \frac{\pi}{4} (4x^2(2Rx - x^2) + (2Rx - x^2)^2) \epsilon x \\ &= \frac{\pi}{4} (4Rx^3 - 3x^4 + 4R^2x^2) \epsilon x. \end{aligned}$$

igitur erit

$$\mu = \frac{\pi}{4} (Rx^4 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{4}{3}R^2x^3) = \frac{\pi}{60} \pi x^3 (15Rx - 9x^2 + 20R^2);$$

seu pro massa AQB = M,

$$\mu = \frac{\pi}{60} \pi x^3 (15Rx + 20R^2 - 9x^2) = \frac{\pi}{20} M \frac{15Rx^2 + 20R^2x - 9x^3}{3R - x}.$$

Ex hac porro expressione momenti inertiae segmenti sphaerici AQB respectu axeos MN invenies pro  $x = R$  vel  $x = 2R$  momentum inertiae dimidii vel integri globi respectu axeos MN illum in vertice Q tangentis: nimirum momentum inertiae dimidii globi, denotante M illius massam, erit

$$= \frac{1}{10} \pi R^5 = \frac{1}{10} MR^2;$$

et momentum inertiae integri globi, denotante M ejus massam, fiet, ut in (428. §.)

$$= \frac{2}{5} \pi R^5 = \frac{2}{5} MR^2.$$

#### 439. Corollarium 8.

Pro segmento m = QAEBDA conoidis parabolici revolutione arcus parabolae QA circa ejus axem QC genito, et illius momento inertiae  $\mu$  respectu axeos MN illud in vertice Q tangentis, debet esse  $y^2 = px$ :

Aa 3

igitur

$$\text{igitur } \varepsilon\mu = \frac{\pi}{4} (4px^3 + p^2x^2) \varepsilon x;$$

$$\text{hinc } \mu = \frac{\pi}{4} (px^4 + \frac{1}{2}p^2x^2); \text{ seu ob } m = \frac{1}{2}\pi px^2,$$

$$\mu = \frac{\pi px^2}{12} (3x^2 + p^2) = \frac{1}{6}m(3x^2 + p^2).$$

## 440. Corollarium 9.

Pro segmento  $m = AQB$  sphaeroidis elliptici revolutione arcus ellipticos  $QA$  circa axem transversum  $QC$  genito, cujus momentum inertiae respectu axeos  $MN$  illud in vertice  $Q$  tangentis sit  $\mu$ , erit

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2; \text{ igitur pro (437. §.)}$$

$$\varepsilon\mu = \frac{\pi b^2}{4a^4} \varepsilon x ((4a^3 - 2ab^2)x^3 - (4a^2 - b^2)x^4 + a^2b^2x^2).$$

Adeoque debbit esse

$$\mu = \frac{\pi b^2}{120a^4} ((30a^3 - 15ab^2)x^4 - (24a^2 - 6b^2)x^5 + 10a^2b^2x^3);$$

$$\text{seu ob } m = \frac{\pi b^2}{6a^2} (3a^2x^2 - 2x^3)$$

$$\mu = \frac{1}{20}m \cdot \frac{(30a^3 - 15ab^2)x^2 - (24a^2 - 6b^2)x^3 + 10a^2b^2x}{a^2(3a - 2x)}.$$

Hinc pro  $x = \frac{1}{2}a$  invenies momentum inertiae dimidii sphaeroidis elliptici revolutione quadrantis ellipticos circa semiaxem transversum geniti respectu axeos  $MN$  sphaeroidem in vertice  $Q$  tangentis, si  $M$  sit massa dimidii sphaeroidis,

$$\mu = \frac{\pi ab^2}{8 \cdot 120} (9a^2 + 4b^2) = \frac{1}{80}M(9a^2 + 4b^2).$$

Et pro  $x = a$  reperies momentum inertiae integri sphaeroidis elliptici revolutione ellipticos circa axem transversum geniti respectu axeos sphaeroidem in vertice axeos transversu tangentis, denotante  $M$  illius massam

$$\mu = \frac{\pi ab^2}{120} (6a^2 + b^2) = \frac{1}{20}M(6a^2 + b^2).$$

## 441. Problema.

Fig. 79. *Invenire momentum inertiae prismatis triangularis recti ABCFED (79. Fig.) basium ad C, F rectangularum respectu lateris AD.*

Solutio.

## Solutio.

1. Sit latus prismatis  $AD=l$ , et latera basium angulos rectos comprehendentia sint  $AC=DF=a$ ,  $CB=FE=b$ ; erit massa prismatis (411. §. Schol.)  $M=\frac{1}{2}abl$ .

2. Ducto plano  $aADd$  perpendiculari ad  $ACFD$ ; erit communis intersectio horum planorum ipse axis  $AD$  respectu cuius debet determinari momentum inertiae totius prismatis: aequabitur ergo illud summae momentorum inertiae dati prismatis respectu planorum  $aADd$ ,  $ACFD$  (404. §.).

3. Quare sumatur  $Ce=x$ , et per  $e$  ducatur sectio  $eoh$  parallela plano  $ACFD$ : pro massa  $m=ACFDhieo$ , et illius momento inertiae  $\mu$  respectu plani  $ACFD$  habebimus  $\epsilon\mu=x^2\epsilon m$  (431. §.).

$$\text{Sed } oe = \frac{AC \cdot Be}{BC} = a - \frac{a}{b}x;$$

consequenter

$$ACeo = \frac{1}{2}(AC + oe)Ce = ax - \frac{a^2}{2b}x^2;$$

$$m = ACeo \cdot AD = axl - \frac{al}{b}x^2;$$

Debet itaque poni

$$\epsilon m = \frac{al}{b}(b-x)\epsilon x; \quad \epsilon m = \frac{al}{b}(bx^2 - x^3)\epsilon x.$$

Quamobrem erit

$$\mu = \frac{al}{b}\left(\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{4}x^4\right) = \frac{alx^3}{12b}(4b - 3x).$$

4. Pro  $x=BC=b$  in (3) obtinebimus ergo momentum inertiae totius prismatis respectu plani  $AF$ ,  $=\frac{1}{12}alb^3$ .

5. Porro capiatur  $Af=x$ , ductoque per  $f$  plano  $fohg$  parallelo ad  $aADd$ , ponatur massa  $AfohgD=m$ , et  $\mu$  sit illius momentum inertiae respectu plani  $aADd$ ; erit per (431. §.)  $\epsilon\mu=x^2\epsilon m$ .

$$\text{Sed est } fo = \frac{b}{a}x, \text{ hinc } Afo = \frac{b}{2a}x^2;$$

$$m = Afo \cdot AD = \frac{bl}{2a}x^2; \text{ igitur fiet}$$

$$\varepsilon m = \frac{bl}{a} x \varepsilon x; \quad \text{hinc } \varepsilon \mu = \frac{bl}{a} x^3 \varepsilon x.$$

$$\text{Quare debebit esse } \mu = \frac{bl}{4a} x^4.$$

6. Posita variabili  $x = AC = a$  in (5) inveniemus ergo momentum inertiae totius prismatis ABCFED respectu plani aADd,  $= \frac{1}{4} bla^3$ .

7. Ex his (4) (6) per se jam ob (2) fluit momentum inertiae  $\mu$  dati prismatis respectu lateris AD, nimirum

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} alb^3 + \frac{1}{4} bla^3 = \frac{1}{2} abl(3a^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{2} M(3a^2 + b^2) \quad \text{ob (1).} \end{aligned}$$

#### 442. Corollarium 1.

Fig. 80. Momentum inertiae  $\mu$  prismatis triangularis recti ABCDEF (80. Fig.) respectu axeos AF, si uterque angulus baseos ad B, C sit acutus, aequabitur summae momentorum prismatum ACpqDF, ABpqEF basium ad p, q rectangularium, in quae illud plano ApqF ad CBED perpendiculari potest dividi (399. §.): quare, cum pro  $Ap = a$ ,  $Bp = b$ ,  $Cp = c$ ,  $AF = l$  per (441. §.) debeat esse

$$\text{Mom. ABpqEF} = \frac{1}{2} abl(3a^2 + b^2);$$

$$\text{Mom. ACpqDF} = \frac{1}{2} acl(3a^2 + c^2);$$

Fiet eo ipso

$$\mu = \frac{1}{2} abl(3a^2 + b^2) + \frac{1}{2} acl(3a^2 + c^2);$$

hinc, ob prismatis massam  $M = \frac{1}{2} al(b + c)$ , erit

$$\mu = \frac{1}{2} al(b^3 + c^3 + 3a^2(b + c)) = \frac{1}{6} M(3a^2 + b^2 + c^2 - bc).$$

#### 443. Corollarium 2.

Fig. 81. Si autem unus angulus baseos ABC prismatis triangularis recti ABCDEF, puta angulus ad C (81. Fig.) sit obtusus, et planum ApqF ad BCDE perpendiculare; erit momentum inertiae prismatis ABCDEF respectu axeos AF aequale differentiae momentorum prismatum ABpqEF, ACpqDF (400. §.): cum ergo sit pro  $Ap = a$ ,  $Bp = b$ ,  $Cp = c$ , et  $AF = l$  per (441. §.)

$$\text{Mom. ApqEF} = \frac{1}{2} abl(3a^2 + b^2);$$

$$\text{Mom. ACpqDF} = \frac{1}{2} acl(3a^2 + c^2);$$

erit momentum  $\mu$  prismatis ABCDEF respectu axeos AF

$$\mu = \frac{1}{2} abl(3a^2 + b^2) - \frac{1}{2} acl(3a^2 + c^2);$$

adeo-

adeoque ob illius massam  $\frac{1}{2}al(b-c) = M$

$$\mu = \frac{1}{12}al(b^3 - c^3 + 3a^2(b-c)) = \frac{1}{6}M(3a^2 + b^2 + c^2 + bc).$$

## 444. Corollarium 3.

Si basis ABC (80. Fig.) prismatis sit aequicrura angulorum ad C, B Fig. 80. aequalium; erit  $b=c = \frac{1}{2}BC$ , et  $a = \frac{1}{2}\sqrt{(4AB^2 - BC^2)}$  in (442. §.): pro  $AB=AC=\alpha$  et  $BC=\beta$ ,  $AF=1$  erit ergo momentum inertiae  $\mu$  prismatis ABCDEF respectu axeos AF

$$\mu = \frac{1}{12} \left( \frac{\beta^3}{8} + \frac{\beta^3}{8} + \beta \cdot \frac{1}{2}(4\alpha^2 - \beta^2) \right) \frac{1}{2} \sqrt{(4\alpha^2 - \beta^2)};$$

$$\text{feu } \mu = \frac{\beta^3}{48} (6\alpha^2 - \beta^2) \sqrt{(4\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{1}{12}M(6\alpha^2 - \beta^2).$$

## 445. Corollarium 4.

Momentum autem inertiae prismatis triangularis recti regularis baseos aequilaterae respectu axeos AF erit pro  $\alpha=\beta=AB=BC=CA$ , et  $AF=1$  per (444. §.)

$$\mu = \frac{1}{48}\alpha^4\sqrt{3} = \frac{1}{12}M\alpha^2.$$

## 446. Corollarium 5.

Momentum inertiae cujuslibet prismatis recti regularis (49. Fig.) respectu illius axeos PQ, datis latere baseos  $AB=\beta$ , radio  $PA=\alpha$ , axe  $PQ=1$ , et numero  $n$  laterum AB, BC, CD, etc., inuenietur, si capiatur momentum inertiae prismatis triangularis APBbaQ per (444. §.), illudque multiplicetur per numerum  $n$  talium prismatum datum prisina constituentium (399. §.): ea propter, si  $M$  denotet massam totius prismatis ABCDEedcba, erit illius momentum inertiae respectu axeos PQ

$$\mu = \frac{n}{48}\beta^3(6\alpha^2 - \beta^2)\sqrt{(4\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{1}{12}M(6\alpha^2 - \beta^2).$$

## 447. Corollarium 6.

Momentum inertiae cujuslibet parallelepipedu ABCFGHDE (82. Fig.) Fig. 82. respectu axeos MN coincidentis cum ejus latere ED inuenies, si illud in duo prismata triangularia FGEDHA, FCEDBA mente resolvas; horum momenta inertiae respectu axeos MN per (441. 442. 443. §.) quaeras; tum in unam summam colligas (399. §.).

## 448. Corollarium 7.

In specie ergo, si  $ABCFGHDE = M$  sit parallelepipedum rectangulum, et  $GE = l$ ,  $CE = a$ ,  $ED = b$ ; erit illius massa  $M = abl$ , et momentum inertiae respectu axeos  $MN$  per (447. 441. §.)

$$\mu = \frac{1}{12} GE \cdot GF \cdot ED (3GE^2 + GF^2) + \frac{1}{12} EC \cdot FC \cdot ED (3EC^2 + FC^2),$$

seu  $\mu = \frac{1}{3} abl(a^2 + l^2) = \frac{1}{3} M(a^2 + l^2)$ .

## 449. Corollarium 8.

Si  $a = CE$ , et  $b = ED$  continuo decrescat, tum prope evanescat; abibit parallelepipedum in virgam tenuissimam  $GE = l$ , cujus momentum inertiae respectu axeos  $MN$  ad illam perpendicularis poterit poni  $= \frac{1}{3} Ml^2 = \frac{1}{3} l^3$  (448. §.).

## 450. Corollarium 9.

Si vero tantum  $a = CE$  decrescat et prope evanescat; debet parallelepipedum rectangulum abire in laminam tenuissimam pariter rectangulam  $GHDE$ , cujus momentum inertiae respectu axeos  $MN$ , pro  $EG = l$ ,  $ED = b$ , poterit poni  $= \frac{1}{3} Ml^2 = \frac{1}{3} bl^3$  (448. §.).

## 451. Corollarium 10.

Si denique  $b = ED$  adeo parvi valoris sit, ut prope evanescat; parallelepipedum rectangulum abibit in laminam tenuissimam rectangulam  $FCEG$ , cujus momentum inertiae respectu axeos  $MN$  ad illam perpendicularis poterit poni  $= \frac{1}{3} M(a^2 + l^2) = \frac{1}{3} al(a^2 + l^2)$  pro  $a = CE$ ,  $l = GE$  (448. §.).

## 452. Corollarium 11.

In cubo  $AFED$  erit  $GE = CE = ED = l = a = b$ : momentum inertiae cubi  $AFED$  respectu axeos  $MN$  erit ergo  $\frac{1}{3} a^3(a^2 + a^2) = \frac{2}{3} a^5 = \frac{2}{3} Ma^2$  (448. §.).

## DISSERTATIO XII.

DE

## MOTU MASSARUM CIRCA AXES FIXOS.

## 453. DEFINITIO.

Si corpus rigidum  $Z$  (60. §.) circa lineam rectam  $R$  positione datam sic moveatur, ut haec durante motu eundem perpetuo situm respectu omnium punctorum corporis  $Z$  retineat; erit ejus motus *gyratorius*, et recta  $R$  *Axis gyrationis*, et quidem *fixus* (qualis in sequentibus disquisitionibus ubique subintelligetur), si is perfecte quiescat, nullisque viribus cedat.

## 454. Corollarium 1.

Singula puncta  $a, A$  (83. Fig.) corporis in motu gyratorio circa datum axem  $MN$  constituti easdem perpetuo servant distantias  $af, AF$  ab axe gyrationis  $MN$  (453. §.).

## 455. Corollarium 2.

In motu igitur gyratorio debent singula puncta  $a, A$  corporis describere peripherias circulorum  $abc, ABC$  ad axem gyrationis  $MN$  perpendicularium, centraque  $f, F$  in illo habentium, quorum radii  $af, AF$  aequantur perpendicularibus ex punctis  $a, A$  ad eundem axem demissis (454. §.).

## 456. Corollarium 3.

Cum autem durante motu gyratorio corporis circa datum axem  $MN$  singula ejus puncta tam ab axe  $MN$  (454. §.), quam inter se easdem perpetuo distantias servant (453. 60. §.); evidens est, singula puncta  $a, A$  quovis tempore  $t$  per arcus similes ad  $AD$  promoveri, interceptos inter crura  $af, df$  et  $AF, DF$  angulorum aequalium  $afd, AFD$ , quos perpendicularia  $af, AF$  ex iisdem punctis ad axem  $MN$  ducta intra idem tempus debent percurrere.

## 457. DEFINITIO.

Si recta  $af$  perpendicularis ad axem gyrationis  $MN$  circa hunc axem in circulo  $acb$  moveatur, debet illa quovis tempusculo  $t$  per certum angulum  $afd$  promoveri independentem a longitudine ejusdem rectae: quamobrem licebit rectae  $af$  et cuivis ejus puncto  $a$ ,  $\alpha$  ejusmodi celeritatem tribuere, per quam ea ad certum angulum  $afd$  certo tempore percurrendum determinetur (257. §.); atque haec deinceps nomine *Celeritatis angularis* rectae  $af$  et cujuslibet ejus puncti debet intelligi.

## 458. Corollarium 1.

Spatia, quae celeritatibus angularibus percurri supponuntur, sunt totidem anguli, non autem lineae ut in (252. §.): semper vero illae et hi anguli debent instar quantorum heterogeneorum concipi, quorum unum alteri aequari nequeat (456. §.).

## Scholion.

Contra rei naturam loquuntur idcirco, qui celeritatem angularem in ipsa illius definitione certo angulo ponunt aequalem: in (264. §.) exposui, quo sensu celeritas puncti in linea recta vel curva incedentis per certum spatium possit exprimi; mox vero declarabo, quo sensu celeritatem quoque angularem certo angulo vel arcui aequare liceat. *Eulerus*, in *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, celeritatem angularem in motu gyatorio vocat celeritatem puncti, cujus distantia ab axe gyrationis unitate exprimitur: is ergo dat definitionem celeritatis angularis obscuriorem suo definito, assumens in ipsa definitione, quod ex genuina notione celeritatis angularis demonstrandum esset.

## 459. Corollarium 2.

Motus rectae  $af$  circa datum axem  $MN$  erit *uniformis* seu aequabilis, si illa singulis tempusculis aequalibus per aequales angulos promoveatur, proinde eadem perpetuo celeritate angulari circa  $MN$  volvatur (458. 457. 254. §.).

## 460. Corollarium 3.

Fig. 83. 84. Quodsi ergo duae rectae  $af$ , su (83. 84. Fig.) ad axes fixos  $MN$ ,  $mn$  perpendiculares motu uniformi incedant in circulis  $acb$ ,  $pqr$ ; erunt anguli  $afd$ ,  $sur$ , quos illae intra idem tempus percurrerint, inter se ut celeritates angulares earundem rectarum (459. 458. 260. §.).

## 461. Corollarium 4.

Anguli vero  $afd$ ,  $afe$ , quos recta  $af$ , determinata celeritate angulari motu uniformi circa axem  $MN$  in circulo  $acb$  incedens, intra diversa tempora percurrerit, et anguli  $afd$ ,  $sur$ , quos duae rectae  $af$ ,  $su$ , aequalibus celeritatibus angularibus in circulis  $acb$ ,  $pqr$  circa diversos axes  $MN$ ,  $mn$  motu uniformi incedentes, diversis temporibus confecerint, erunt inter se in ratione directa respectivorum temporum (259. 258. 261. §).

## 462. Corollarium 5.

Quo motus ejusmodi ad calculum possit revocari, congruae mensurae celeritatum angularium, spatiorum (458. §), et temporum constituentur oportet. Retento minuto secundo pro mensura temporum (262. §. 2. n.), fumatur, ob (458. et 262. §. 1. n.), pro mensura spatiorum angulus aequali angulo  $\delta$ , inter cujus latera intercipiatur arcus ex ejus vertice radio  $= 1$  descriptus et eidem radio aequalis (Vol. I. §. 5. Schol. 3. n. 2.).

## 463. Corollarium 6.

Hinc licebit pro mensura cujuslibet celeritatis angularis  $\gamma$ , qua in motu uniformi (459. §.) angulus  $A$  quovis minuto secundo percurratur, eam determinatam celeritatem angularem  $\alpha$  accipere, qua motu pariter uniformi quovis minuto secundo angulus  $\delta$  sumtus pro mensura angulorum  $A$  (462. §.) debeat percurri (262. §. n. 1. 4.).

## 464. Corollarium 7.

In (463. §.) erit ergo  $A : \delta = \gamma : \alpha$  per (461. §.): igitur  $\frac{A}{\delta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ , id est: exponens rationis anguli  $A$  quovis minuto secundo celeritate angulari  $\gamma$  percurri ad angulum  $\delta$  pro ejus mensura acceptum aequatur exponenti rationis ipsius celeritatis angularis  $\gamma$  ad celeritatem angularem  $\alpha$  pro illius mensura acceptam (463. §.). Quodsi ergo ejusmodi exponentes per  $A$  et  $\gamma$  deinceps exprimantur; poterit poni  $\gamma = A$ , atque hoc unico sensu, improprio ut patet, licebit celeritatem angularem  $\gamma$  in motu uniformi (459. §.) aequare angulo  $A$ , qui eadem celeritate quovis minuto secundo percurritur (264. §.).

## 465. Corollarium 8.

Verum, si  $\Phi$  denotet arcum radio  $= 1$  ex vertice anguli  $A$  inter ejus crura descriptum, aequabitur  $\Phi$  exponenti rationis anguli  $A$  ad angulum  $\delta$  pro illius mensura acceptum (462. §.) et (Vol. I. §. 5. Schol. 3. n. 2.): hoc ergo exponente expresso per  $A$  poterit poni  $A = \Phi$ , hinc etiam  $\gamma = \Phi$  (464. §.). Eodem itaque sensu, quo celeritatem angularem  $\gamma$  in quovis motu uniformi (459. §.) angulo  $A$  aequare licuit, qui eadem celeritate quovis minuto secundo percurritur (464. §.), poterit illa aequari etiam arcui  $\Phi$ , qui ex vertice ejusdem anguli radio  $= 1$  inter ipsius crura descriptus potest cogitari.

## 466. Corollarium 9.

Fig. 83. Per haec jam poterit motus uniformis rectorum circa datos axes (459. §.) eadem profus ratione, qua motus uniformis punctorum in lineis incedentium (265. 266. 267. §.), determinari. Si enim recta  $af$  motu ejusmodi in circulo  $abc$  circa axem  $MN$  volvatur celeritate angulari  $C$ , angulumque  $S = afd$  quocumque tempore  $T$  percurrat; debet illa quovis minuto secundo percurrere angulum  $A : S = 1'' : T$  (461. §.): erit ergo  $\frac{A}{\delta} : \frac{S}{\delta} = 1 : \frac{T}{1''}$  denotante  $\delta$  mensuram angulorum  $A, S$  (462. §.), seu  $\frac{C}{\alpha} : \frac{S}{\delta} = 1 : \frac{T}{1''}$  (464. §.), unde, si per  $C, S, T$  intelligentur exponentes rationum celeritatis  $C$ , spatii  $S$ , et temporis  $T$  ad mensuras  $\alpha, \delta, 1''$  (462. 463. §.), necessario sequitur  $C : S = 1 : T$ , hinc  $S = CT, C = \frac{S}{T}, T = \frac{S}{C}$ .

## 467. Corollarium 10.

Haecenus motum gyrationem uniformem rectorum circa datos axes consideravimus (459. §.). *Difformis* seu *inaequabilis* erit ejusmodi motus cujusvis rectorum, si celeritas angularis illo durante non maneat perpetuo eadem (457. §.), sed continuo mutetur (268. §.). In tali motu habebit ergo recta  $af$  quovis momento aliam celeritatem: celeritas angularis, quam illa in fine certi temporis  $T$  ab initio motus computati habuerit, erit ejus celeritas tempori  $T$  debita aestimanda ex angulo, quem eadem recta quovis minuto secundo tali celeritate percurreret, si ejus motus esset uniformis,

mis, vel ex arcu radio  $= I$  ex vertice ejusdem anguli inter ejus crura descripto (271. 464. 465. §.).

## 468. Corollarium II.

Quocunque autem tempore duret motus gyratorius dati corporis circa datum axem MN; necesse est, ut omnia illius puncta eadem celeritate angulari circa axem MN volvantur (456. 457. §.): censebitur ergo totum corpus quovis momento determinatam habere celeritatem angularem, nimirum illam, quam singula ejus puncta eodem momento habuerint; motus autem ipsius gyratorius uniformis erit vel difformis, prout perpendiculara ex singulis ejus punctis ad axem gyrationis demissa motu uniformi vel difformi (459. 467. §.) circa eundem axem fuerint mota.

## 469. DEFINITIO.

Eodem tempore, quo in motu gyratorio dati corporis circa datum axem MN (453. §.) perpendicularum a flex quocunque ejus puncto a ad axem MN demissum per certum angulum afd promovetur, percurritur ab ipso puncto a arcus ad circuli acb: celeritas puncti a, qua ejusmodi arcus percurritur (257. §.) vocabitur deinceps *Celeritas linearis* seu *vera* puncti a, quo illa ab ejus perpendicularique af celeritate angulari (457. §.) distinguatur.

## 470. Corollarium I.

Vera seu linearis celeritas cujuslibet puncti a corporis in motu gyratorio circa datum axem MN constituti aestimabitur ex arcu circulari, quem illud eadem celeritate motu uniformi circa axem MN percurret (469. 264. 271. §.).

## 471. Corollarium 2.

Sunt autem arcus ad, AD a quibuslibet duobus punctis a, A corporis circa axem MN motu gyratorio incedentis quovis tempore percursi inter se similes (456. §.), adeoque inter se in ratione distantiarum perpendicularium af, AF eorundem punctorum ab axe MN: in motu gyratorio corporis circa datum axem MN sunt ergo, verae seu lineares celeritates singulorum ejus punctorum quovis momento inter se ut perpendiculara ex iisdem punctis ad axem MN demissa (470. §.).

## 472. Corollarium 3.

Quamobrem debebunt esse celeritates lineares omnium punctorum corporis in motu gyratorio circa axem MN constituti inter se aequales, si illa aequaliter distent ab axe MN; puncta vero inaequaliter distantia ab axe MN inaequales habebunt celeritates, majores magis, et minores minus distantia (471. §.).

## 473. Corollarium 4.

Cognita unici puncti a corporis circa axem MN moti celeritate vera seu lineari c, datisque distantiiis singulorum punctorum ab axe MN, poterit eo ipso determinari celeritas vera x cujusvis alterius puncti A: erit enim  $x:c = AF:af$  (471. §.); consequenter  $x = c \frac{AF}{af}$ .

## 474. Corollarium 5.

Si punctum a corporis in motu gyratorio circa axem MN tantam per arcum ad acquirat celeritatem linearem seu veram c, et angularem  $\gamma$ , ut illud eadem celeritate motu uniformi circa MN quovis minuto secundo arcum  $= de$ , recta vero af ex a ad MN perpendicularis angulum  $= dfe$  deberet percurrere; erit  $c = de$ ,  $\gamma = \varphi$  pro arcu  $\varphi$  ex f radio  $= 1$  inter crura anguli dfe descripto (470. 465. §.), et  $de:\varphi = af:1$ : debebit ergo esse

$$c = \gamma \cdot af, \text{ et } \gamma = \frac{c}{af}.$$

## 475. Corollarium 6.

Adeoque, si noscatur celeritas angularis  $\gamma$  in motu gyratorio dati corporis circa datum axem (468. §.) constans (459. §.), vel certo tempore t ab initio motus computati debita (467. §.), eaque multiplicetur per distantiam af dati puncti a ab axe MN, determinabitur eo ipso vera seu linearis celeritas c puncti a (474. §.), a qua inventio celeritatum linearium omnium reliquorum punctorum ejusdem corporis dependebit (473. §.).

## 476. Corollarium 7.

Data autem celeritate vera seu lineari c unici puncti a corporis in motu gyratorio circa datum axem MN constituti, si illa dividatur per distantiam af ejusdem puncti ab eodem axe, invenietur eo ipso celeritas angularis  $\gamma$  puncti a (474. §.) totiusque corporis (468. §.).

477. Theo-

## 477. Theorema.

Si in puncta  $b$  et  $a$  (85. Fig.) vel  $a$  et  $d$  plani  $ABCD$ , circa axem Fig. 85.  $MN$  fixum cum illo firmissime connexum libere mobilis, aequidistantia ab axe  $MN$  agant vires aequales  $P$  et  $Q$  vel  $Q$  et  $R$  directionibus  $bP$  et  $aQ$  vel  $aQ$  et  $dR$  ad idem planum perpendicularibus; erunt eae vires inter se in aequilibrio.

## Demonstratio.

1. Si puncta  $b$ ,  $a$  aequaliter distent ab axe  $MN$ , quo perpendiculara  $b\beta$ ,  $a\alpha$  ex illis ad  $MN$  ducta sint inter se aequalia; debet recta  $ab$  in axe  $MN$  bissecari: cum igitur vires aequales  $P$ ,  $Q$  agentes in puncta  $b$ ,  $a$  plani  $AC$  circa axem fixum  $MN$  volubilis necessario in aequilibrio esse debeant, si illae agentes in puncta  $b$ ,  $a$  rectae inflexilis  $ba$  et circa fixum ejus punctum medium  $c$  libere mobilis essent in aequilibrio; patet, illas re ipsa futuras in aequilibrio (76. §.).

2. Si autem in puncta  $a$ ,  $d$  aequidistantia ab axe  $MN$  agant vires aequales  $Q$ ,  $R$ ; ductis ad  $MN$  perpendicularibus  $a\alpha$ ,  $d\beta$ , productoque perpendicularo  $d\beta$  in  $b$ , ut sit  $b\beta = d\beta = a\alpha$ , cogitentur in  $b$  agere vires  $P$ ,  $S$ , inter se et viribus aequalibus  $Q$ ,  $R$  aequales, directionibus  $bP$ ,  $bS$  ad planum  $AC$  perpendicularibus: erit vis  $S$  cum  $R$ , et  $P$  cum  $Q$  in aequilibrio, per demonstrata in (1). Quare erunt omnes quatuor vires  $S$ ,  $R$ ,  $P$ ,  $Q$  inter se in aequilibrio (64. §.), et eo ipso, quia vires  $P$ ,  $S$  sunt inter se seorsim in aequilibrio (66. §.), debebunt iis sublatis vires  $Q$ ,  $R$  manere in aequilibrio (65. §.).

## 478. Corollarium.

Si duo plana  $ABDC$ ,  $CDFE$  (86. Fig.) sub quocunque angulo invariabili  $BDF$  circa axem fixum  $MN$  mobili inter se sint connexa, in quorum puncta  $a$ ,  $c$  aequidistantia ab axe  $MN$  agant vires aequales  $P$ ,  $Q$  directionibus  $aP$ ,  $cQ$  ad plana  $AD$ ,  $ED$  perpendicularibus; erunt hae vires in aequilibrio. Sit  $ab$  in plano  $AD$ ,  $bf = ab$  in plano  $ED$  perpendicularis ad axem  $MN$ , et in punctum  $f$  cogitentur agere vires  $q$ ,  $p$  inter se et viribus aequalibus  $P$ ,  $Q$  aequales directionibus  $fq$ ,  $fp$  ad planum  $ED$  perpendicularibus: jacebunt directiones virium  $P$ ,  $p$  in plano anguli  $abf$ ; vires idcirco  $P$ ,  $p$  erunt inter se in aequilibrio (76. §.). Quare, cum etiam vires  $q$ ,  $Q$  debeant inter se esse in aequilibrio (477. §.), erunt omnes quatuor vires  $P$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $Q$  inter se in aequilibrio (64. §.): sublatis itaque

viribus  $p, q$  inter se seorsim in aequilibrio existentibus (66. §.), manebunt reliquae  $P, Q$  inter se in aequilibrio (65. §.).

## 479. Theorema.

*Si in duo puncta  $a, e$  planorum  $ABDC, EFDC$  sub angulo invariabili et circa axem fixum  $MN$  libere mobili inter se connexorum agant vires  $P, R$  directionibus ad eadem plana perpendicularibus; erunt illae in aequilibrio, si sint inter se in ratione inversa distantiarum  $ab, ed$  punctorum  $a, e$  ab axe  $MN$ , id est, si sit  $P:R = ed:ab$ : et vicissim, si vires  $P, R$  sint in aequilibrio, erit  $P:R = ed:ab$ .*

## Demonstratio.

1. Per hypothese[m] sunt  $ab, ed$  perpendiculares distantiae punctorum  $a, e$  ab axe  $MN$ . Sit  $ed > ab$ , et fiat  $cd = ab$ , atque in punctum  $c$  cogitentur agere vires  $r, Q$  inter se et vi  $P$  aequales directionibus  $cr, cQ$  ad planum  $ED$  perpendicularibus.

2. Debeunt vires  $r, Q$  inter se necessario esse in aequilibrio per (66. §.), quidquid sint reliquae vires  $P, R$ .

3. Ponamus jam esse  $P:R = ed:ab$ ; erit ob (1) etiam  $r:R = ed:cd$ : vires igitur  $r, R$  erunt per (92. §.) inter se in aequilibrio. Quamobrem, cum etiam vires  $P, Q$  debeant esse inter se in aequilibrio (478. §.), erunt omnes quatuor vires  $r, R, P, Q$  inter se in aequilibrio (64. §.): unde, quia vires  $r, Q$  sunt seorsim inter se in aequilibrio (2), necessario sequitur, vires quoque  $P, R$  inter se seorsim esse in aequilibrio (65. §.).

4. Si autem dicas, vires  $P, R$  esse in aequilibrio; erunt ob (2) omnes quatuor vires  $r, Q, P, R$  inter se (64. §.), et binae  $P, Q$  seorsim inter se in aequilibrio, ob (1) per (478. §.): sublatis igitur viribus  $P, Q$  manebunt vires  $r, R$  inter se in aequilibrio (65. §.). Erit itaque  $r:R = ed:cd$  (92. §.); hinc ob (1) etiam  $P:R = ed:ab$ .

## 480. Corollarium.

Fig. 83.

Si duae rectae  $af, AF$  (83. Fig.) cum axe fixo  $MN$  sub angulis rectis firmissime sint connexae, ita ut et utraque circa axem  $MN$  libere possit converti, et impossibile sit, ut una illarum circa  $MN$  convertatur, quin eo ipso altera quoque circa  $MN$  debeat converti; in puncta vero  $a, A$  agant vires  $P, R$  secundum directiones  $aP, AR$  perpendiculares ad  $af, AF$  in

in planis ad MN perpendicularibus jacentes, in quibus jacent rectae af, AF: nitentur hae vires rectas af, AF in partes oppositas circa axem MN eadem profus efficacia convertere, ac si rectae af, AF pertinerent ad bina plana circa axem MN mobilia et in hoc firmissime inter se connexa, ad modum, qui in (86. Fig.) est conspicuus. Vires ergo P, R erunt inter se in aequilibrio, si illae fuerint in ratione inversa rectarum af, AF, id est, si fuerit  $P:R = AF:af$ ; et vicissim erit  $P:R = AF:af$ , si vires P, R sint in aequilibrio (479. §.).

## 481. Problema.

*Data directione vis V agentis in punctum A (87. Fig.) circuli Apq Fig. 87. circa axem fixum MN per ejus centrum C transeuntem et ad illius planum perpendiculararem libere mobilis; determinare vim, quae tota sua efficacia circum Apq circa axem MN convertere nititur.*

## Solutio.

1. Directio datae vis V fit AD in plano Aaeb perpendiculari ad planum circuli Apq hocque in Ab secante, quae detur per angulos  $DAb = \beta$ ,  $bAC = \alpha$  inter eandem directionem AD, radium circuli AC, et intersectionem communem Ab planorum Aaeb, Apq comprehensos.

2. Si in plano aAbe sit aA perpendicularis ad planum circuli Apq (1); poterit vis V agens in punctum A directione AD in duas vires resolveri, quarum una agat directione Aa sitque  $= V \sin DAb = V \sin \beta$ , et altera agat directione Ab sitque  $= V \cos DAb = V \cos \beta$ , ob (1) per (115. §.). Quare, cum prior vis agens in punctum A directione Aa perpendiculari ad planum circuli Apq, adeoque parallela axi gyrationis MN nulla ratione possit influere in conversionem ejusdem circuli circa axem MN; videndum est, quantum influxum in hanc conversionem vis altera  $= V \cos \beta$  agens in punctum A directione Ab jacente in plano circuli (1) habeat.

3. Si ad punctum A in plano circuli Apq ducatur tangens AB; erit illa perpendicularis ad radium AC. Vis ergo  $= V \cos \beta$  in (2) agens in punctum A directione Ab poterit resolveri in duas vires, quarum una  $= V \cos \beta \cdot \cos bAC = V \cos \beta \cos \alpha$  agat directione AC, et altera  $= V \cos \beta \cdot \sin bAC = V \cos \beta \sin \alpha$  agat directione AB per (115. §.). Est vero evidens, priorem vim nullo pacto in conversionem circuli Apq circa axem MN posse influere; alteram vero vim agentem directione AB in plano

circuli Apq ad radium ejus AC perpendiculari tota sua efficacia niti, eundem radium circumque circa axem MN convertere.

4. In assumpta hypothesi (1) tantum ergo habebit data vis V, agens in punctum A secundum directionem AD, influxum in conversionem circuli Apq circa axem MN, quantum haberet vis  $= V \text{Cof} \beta \text{Sin} \alpha$ , si haec in punctum A secundum directionem tangentis AB ageret, quae tota sua efficacia eundem circum circa axem MN niteretur convertere (3).

#### 482. Corollarium 1.

Semper, si in (481. §. 1. n.) sit angulus  $bAC = \alpha = 0$ , erit vis  $V \text{Cof} \beta \text{Sin} \alpha = 0$ : quoties ergo directio AD datae vis V agentis in punctum A circuli Apq jacuerit in plano AaeC perpendiculari ad planum circuli et cum hoc radium AC pro communi intersectione habente, erit vis, quae in conversionem circuli Apq circa axem MN deberet impendi, aequalis nihilo, ipsaque conversio impossibilis (481. §. 1. 4. n.).

#### 483. Corollarium 2.

Et pro angulo  $DAb = \beta = 0$  erit vis  $V \text{Cof} \beta \text{Sin} \alpha = V \text{Sin} \alpha$ , id est: si directio vis V agentis in punctum A circuli Apq jaceat in plano circuli, ita ut illa cum radio AC angulum  $\alpha$  comprehendat; efficacia, qua illa circum Apq circa axem MN nitetur convertere, aequabitur efficaciae, qua vis  $= V \text{Sin} \alpha$  in puncto A secundum directionem tangentis AB applicata eundem circa MN convertere niteretur; haec vero vis tota deberet in ejus conversionem impendi (481. §. 1. 4. n.).

#### 484. Corollarium 3.

Quodsi autem ponas angulum  $\alpha = 90^\circ$  in (483. §.); erit vis  $V \text{Sin} \alpha = V$ , id est: vis V agens in punctum A circuli Apq secundum directionem tangentis AB ad radium AC eo ipso perpendicularem, nitetur tota sua efficacia eundem circum circa axem MN convertere (483. §.).

#### 485. Corollarium 4.

Fig. 18. Conditio essentialis, sine qua nulla vis V agens in punctum aliquod B (88 Fig.) corporis abcde, circa axem fixum MN cum illo firmissime connexum libere mobilis, poterit corpus abcde circa eundem axem converti, est, ut illius directio non jaceat in plano circum bpc per B transentem et axi MN perpendicularem ita secante sub angulo recto, ut inter-  
sectio

sectio coincidat cum radio BC ad idem punctum B ducto (482. §.): omni autem alio casu aderit una vis per (483. 484. 481. §. 4. n.) determinabilis, quae, secundum directionem tangentis BP ad radium BC perpendicularem in punctum B actura, tota sua efficacia corpus abcde circa axem MN nitetur convertere.

## 486. Corollarium 5.

Si igitur motus gyrotorius corporum circa datos axes fixos dependens a viribus in quaecunque illorum puncta agentibus generatim fuerit determinandus, licebit supponere, directiones omnium virium coincidere cum tangentibus, quae ad eadem puncta totidem circularum ad axes gyrationis perpendicularium centraque in iisdem axibus habentium possunt duci (485. §.)

## 487. Theorema.

Si in punctis B, F corporis abcde circa datum axem MN libere mobilis applicentur vires P, Q, quae idem corpus secundum directiones BP, FQ in partes oppositas circa axem MN nitantur convertere (486. §.); erunt illae in aequilibrio, si fuerint inter se in ratione inversa distantiarum BC, FD punctorum B, F ab axe gyrationis MN, seu si fuerit  $P:Q = FD:BC$ : et vicissim, quoties vires P, Q fuerint in aequilibrio, toties erit  $P:Q = FD:BC$ .

## Demonstratio.

Per hypothesein coincidunt directiones BP, FQ virium P, Q cum tangentibus, quae ad puncta B, F circularum Bpq, Fnm ad MN perpendicularium et e centrīs C, D radiis CB, DF descriptorum possunt duci: quodsi ergo cogitentur duo plana ABCD, FECD, quorum primum sit perpendicularare ad planum circuli Bpq hocque in BC interfecet, et alterum sit perpendicularare ad planum circuli Fnm, atque istud in FD interfecet; erunt directiones BP, FQ virium P, Q perpendicularares ad plana ABCD, FECD, unde, ut patet, necessario sequitur, vires P, Q debere esse in aequilibrio, si est  $P:Q = FD:BC$ ; et esse  $P:Q = FD:BC$ , si vires P, Q sunt in aequilibrio (479. §.).

## 488. Problema.

Si, dato puncto A circa axem fixum MN in distantia AF (83. Fig.) Fig. 83. libere mobili, cogitetur in eodem puncto massa  $\mu$  collecta, quam vis quaecunque R secundum directionem AR ad motum circa MN sollicitet (486. §.): invenire celeritatem veram C puncti A, quam eadem vis tempore T producat.

## Solutio.

1. Si vis  $R$  sit invariabilis; debet esse  $C = 2g \frac{R}{\mu} T$  celeritas vera puncti  $A$  (469 §.), quam ea vis tempore  $T$  producet (387. 338. §.).

2. Quodsi autem massa  $\mu$  in puncto  $A$  collecta a vi variabili ad motum circa axem  $MN$  sollicitetur, et eadem vis intra tempus  $T$  fiat  $= R$ ; debet esse per (387. 347. §.)  $\varepsilon C = 2g \frac{R}{\mu} \varepsilon T$ .

## 489 Corollarium 1.

Omni ergo casu, seu massa  $\mu$  collecta in puncto  $A$  a vi invariabili  $= R$  ad motum circa axem  $MN$  urgeatur, seu a vi variabili, quae intra tempus  $T$ , durante motu massae  $\mu$  circa  $MN$ , fiat  $= R$ , ita erit comparata vera celeritas  $C$  puncti  $A$ , quam eadem vis tempore  $T$  producet, ut exponens rationis differentialis ejusdem celeritatis spectatae instar unius functionis temporis variabilis  $T$  futurus sit (488. §.).

$$\varepsilon C = 2g \frac{R}{\mu} \varepsilon T.$$

## 490. Corollarium 2.

Quaelibet vis, tam invariabilis  $R$ , quam variabilis intra tempus  $T$  in vim  $= R$  abiens, si illa datam massam  $\mu$  in puncto  $A$  collectam ad motum circa axem  $MN$  secundum directionem  $AR$  continuo sollicitet, producet intra tempus  $T$  celeritatem angularem  $\gamma$  puncti  $A$  rectaeque  $AF$  ad  $MN$  perpendicularis, cujus exponens differentialis erit per (489. 476. §.).

$$\varepsilon \gamma = \frac{\varepsilon C}{AF} = \frac{2g.R}{\mu.AF} \varepsilon T.$$

## 491. Problema.

*Si, datis duobus punctis  $a, A$  inter se et cum axe gyrationis  $MN$  ita connexis, ut neutrum illorum circa  $MN$  possit converti, quin etiam alterum circa  $MN$  eo ipso moveatur, in puncto  $a$  massa  $m$  collecta cogitetur, in puncto vero  $A$  agat quaecunque vis invariabilis  $R$  secundum directionem  $AR$  (486. §.); invenire celeritatem angularem  $\gamma$ , quam vis  $R$  tempore  $T$  producat.*

Solutio.

## Solutio.

1. Puncta  $A$ , a rectaeque  $AF$ ,  $af$  concipient tempore  $T$  eandem celeritatem angularem  $\gamma$  (468. §.).

2. Cogitentur in puncto  $a$  applicari duae vires invariabiles inter se aequales  $P$ ,  $p$  secundum directiones oppositas  $aP$ ,  $ap$  (485. §.); erunt eae inter se in aequilibrio (66. §.), consequenter erit punctum  $a$  ob vires  $P$ ,  $p$ ,  $R$  in eodem statu motus, in quem illud ob solam vim  $R$ , absentibus viribus  $P$ ,  $p$  intra tempus  $T$  potest reponi. Quodsi ergo vires  $P$ ,  $p$  ita sint comparatae, ut sit  $P = p : R = AF : af$ , adeoque  $P = p = R \cdot \frac{AF}{af}$ ; debet punctum  $a$  etiam in hac hypothese in eodem prorsus statu motus manere, proinde eandem celeritatem angularem  $\gamma$  tempore  $T$  concipere (1). Sed vires  $P$ ,  $R$  sunt in hac hypothese inter se in aequilibrio (480. §.); quae idcirco tolli possunt, quin ideo status motus puncti  $a$  turbetur: punctum ergo  $a$  debet datam celeritatem  $\gamma$  intra tempus  $T$  concipere, si illud a vi invariabili  $p = R \cdot \frac{AF}{af}$  ad motum circa  $MN$  continuo urgeatur.

3. Hinc autem (2) per (490. §.) sequitur, celeritatem angularem  $\gamma$  debere esse

$$\gamma = \frac{2g}{m \cdot af} \cdot \frac{R \cdot AF}{af} \cdot T = \frac{2g \cdot R \cdot AF}{m \cdot af^2} T.$$

## 492. Corollarium 1.

Coequatis celeritatibus angularibus, quarum unam vis invariabilis  $R$  agens in punctum  $A$  intra tempus  $T$  debet producere, si in eodem puncto massa  $\mu$  collecta cogitetur, et nulla in  $a$ ; alteram vero eadem vis debet generare, si in puncto  $a$  massa  $m$  collecta concipiatur, et nulla in  $A$ , habebimus per (490. 491. §.).

$$\frac{2g \cdot R}{\mu \cdot AF} T = \frac{2g \cdot R \cdot AF}{m \cdot af^2} T;$$

$$\text{igitur } m \cdot af^2 = \mu \cdot AF^2.$$

Et vicissim pro  $m \cdot af^2 = \mu \cdot AF^2$ , adeoque  $\frac{1}{\mu \cdot AF} = \frac{AF}{m \cdot af^2}$  erunt celeritates angulares in (490. 491. §.) inter se aequales.

## 493. Corollarium. 2.

Producta  $m.af^2$ ,  $\mu.AF^2$  ex massis  $m$ ,  $\mu$ , quas in punctis  $a$ ,  $A$  collectas imaginati nobis sumus (490. 491 §.), in quadrata distantiarum respectivarum  $af$ ,  $AF$  ab axe gyrationis  $MN$  sunt momenta inertiae earundem massarum respectu axeos  $MN$  (398 §.): vis ergo invariabilis  $R$  agens in punctum  $A$  eandem tempore  $T$  producet celeritatem angularem  $\gamma$ , seu massa  $\mu$  in puncto  $A$  collecta, nulla vero in  $a$ , seu massa  $m$  in puncto  $a$  collecta, nulla vero in  $A$  cogitetur, modo massae  $m$ ,  $\mu$  ita sint comparatae, ut momentum inertiae massae  $\mu$  in puncto  $A$  respectu axeos gyrationis  $MN$  aequetur momento inertiae massae  $m$  in puncto  $a$  respectu ejusdem axeos (492. §.).

## 494. Corollarium 3.

Si, data massa  $m$  collecta in puncto  $a$ , quaeratur vis invariabilis  $R$ , quae in puncto  $A$  applicata producat celeritatem angularem  $\gamma$  intra tempus  $T$ ; erit illa ob (491. §.)

$$R = \frac{\gamma.m.af^2}{2g.T.AF}.$$

Per hanc vim invariabilem ita determinatur celeritas angularis  $\gamma$  puncti  $A$  rectaeque  $AF$ , ut alia vis hac major vel minor in eodem puncto  $A$  applicata necessario aliam celeritatem angularem majorem vel minorem deberet intra idem tempus generare (491. §.).

## 495. Corollarium 4.

Fig. 89. Si ergo in punctis  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , - - -  $z$  (89. Fig.) circa datum axem  $MN$  mobilibus et cum eodem per perpendiculara  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$ ,  $ee'$ , - - -  $zz'$  ita connexis, ut punctum  $R$  per perpendicularum  $RS$  cum  $MN$  connexum, circa  $MN$  converti nequeat, quin eo ipso omnia puncta circa  $MN$  debeant in eandem partem converti, totidem massae  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , - - -  $Z$  collectae cogitentur,  $A'$  vero,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$ , - - -  $Z'$  sint vires invariabiles, quarum prima  $A'$ , vel secunda  $B'$ , aut tertia  $C'$ , et sic porro, in puncto  $R$  ad celeritatem angularem  $\gamma$  intra tempus  $T$  producendam requiratur, prout vel tantum in puncto  $a$  adest massa  $A$ , vel tantum in  $b$  massa  $B$ , aut tantum in  $c$  massa  $C$ , et sic porro; erit per (492. §.)

$$A^r = \frac{\gamma \cdot A \cdot a^r a^2}{2g \cdot RS \cdot T}; \quad B^r = \frac{\gamma \cdot B \cdot b^r b^2}{2g \cdot RS \cdot T};$$

$$C^r = \frac{\gamma \cdot C \cdot c^r c^2}{2g \cdot RS \cdot T}; \quad D^r = \frac{\gamma \cdot D \cdot d^r d^2}{2g \cdot RS \cdot T};$$

$$E^r = \frac{\gamma \cdot E \cdot e^r e^2}{2g \cdot RS \cdot T}; \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad Z^r = \frac{\gamma \cdot Z \cdot z^r z^2}{2g \cdot RS \cdot T}.$$

## 496. Corollarium 5.

Hinc (495. 494 §.) et ex notione celeritatis angularis (457. §.) evidenter sequitur, quod, si omnes massae A, B, C, D, E, - - - Z in suis punctis a; b, c, d, e, - - - z collectae simul circa axem MN debeant moveri, ita ut recta RS dato quocunque tempore T datam celeritatem angularem  $\gamma$  concipiat, ad generationem hujus celeritatis vis una invariabilis

$$X = A^r + B^r + C^r + D^r + E^r + - - - + Z^r =$$

$$= \frac{\gamma}{2g \cdot RS \cdot T} (A \cdot a^r a^2 + B \cdot b^r b^2 + C \cdot c^r c^2 + D \cdot d^r d^2 + E \cdot e^r e^2 + - - - + Z \cdot z^r z^2)$$

fit necessaria, quin alia aliqua vis invariabilis, vi X major aut minor, in eodem puncto R applicata eandem celeritatem angularem  $\gamma$  intra idem tempus T possit generare.

## 497. Corollarium 6.

Quamobrem, si in hypothesi massarum A, B, C, D, E, - - - Z in totidem punctis a, b, c, d, e, - - - z circa datum axem MN mobilibus collectarum (495. §.) in puncto R applicetur data vis invariabilis V; convertentur omnes massae circa axem MN, rectaque RS concipiet intra quodvis tempus T certam celeritatem angularem  $\gamma$ , pro qua debet esse (496. §.)

$$V = \frac{\gamma}{2g \cdot RS \cdot T} (A \cdot a^r a^2 + B \cdot b^r b^2 + C \cdot c^r c^2 + D \cdot d^r d^2 + E \cdot e^r e^2 + - - - + Z \cdot z^r z^2);$$

ipsa igitur celeritas  $\gamma$  erit

$$\gamma = \frac{2g \cdot V \cdot RS \cdot T}{A \cdot a^r a^2 + B \cdot b^r b^2 + C \cdot c^r c^2 + - - - + Z \cdot z^r z^2},$$

id est: celeritas angularis  $\gamma$ , quam vis invariabilis V dato tempore T

generabit, aequatur producto  $2gVT.RS$  diviso per summam productorum ex singulis massis  $A, B, C, \dots Z$  in punctis  $a, b, c, \dots z$  collectis in quadrata distantiarum respectivarum  $a^2, b^2, c^2, \dots z^2$  ab axe gyrationis  $MN$ .

## 498. Problema.

*Punctum R est cum dato corpore circa axem fixum  $MN$  libere mobili ita connexum, ut illud a nulla vi circa  $MN$  possit converti, quin eo ipso totum corpus motum gyrationis circa eundem axem concipiat (453. §.): invenire celeritatem angularem  $\gamma$  (457. 468. §.) et veram seu linearem celeritatem  $C$  puncti  $R$ , quam data vis invariabilis  $V$  tempore  $T$  debet generare, si illa in punctum  $R$  secundum directionem  $RV$  agat (486. §.).*

## Solutio.

Corpus rigidum, de quo hic sermo est, potest spectari instar aggregati minimarum massularum cum axe gyrationis  $MN$  in certis distantis  $aa^2, bb^2, cc^2, dd^2, ee^2, \dots, zz^2$  cum illo firmissime connexarum (453. 60. §.): cum igitur momentum inertiae ejusdem corporis respectu axeos  $MN$  aequetur summae productorum ex singulis massulis in quadrata respectivarum distantiarum ab axe  $MN$  (398. §.); obinebitur celeritas angularis  $\gamma$ , quam data vis invariabilis  $V$  intra tempus  $T$  producet, si productum  $2gVT.RS$  dividatur per momentum inertiae dati corporis respectu axeos  $MN$  (495. §.): et si haec celeritas multiplicetur per  $RS$ , invenietur celeritas vera puncti  $R$ , quam eadem vis intra idem tempus generabit (475. §.). Quamobrem, si pro pondere seu ei proportionali massa  $P$  dati corporis denoret  $Pk^2$  illius momentum inertiae respectu axeos  $MN$  (402. §.), erit (497. §.)

$$\gamma = 2gT \frac{V.RS}{Pk^2}; \quad C = 2gT \cdot \frac{V.RS^2}{Pk^2}.$$

## 499. Problema.

*In eadem hypothesi (498. §.) investigare celeritatem angularem  $\gamma$  et veram  $C$  puncti  $R$ , quam data quaecunque vis variabilis in  $R$  agens tempore  $T$  producat.*

## Solutio.

1. Vis variabilis in puncto  $R$  applicata debet toto tempore  $T$ , quo motus gyrationis corporis circa axem  $MN$  durare supponitur, crescere vel

vel decrefcere (294. §.), ita ut, fi tempus  $T$  crefcat differentia  $\Delta T$ , et  $V$  quantitatem vis in fine temporis  $T$  exprimat, haec intra tempusculum  $\Delta T$  incrementum aliquod  $\Delta V$  capiat, vel decrementum  $\Delta V$  patiat: vis ergo in fine temporis  $T$  adeoque initio tempusculi  $\Delta T$  agens in  $R$  erit  $= V$ ; vis vero, quae in fine temporis  $T + \Delta T$ , confequenter in fine tempusculi  $\Delta T$  ager in  $R$ , erit  $= V + \Delta V$ , vel  $= V - \Delta V$ .

2. Semper autem, feu crefcat vis agens in  $R$  feu decrefcatur tempore  $T$  (1), debet celeritas angularis  $\gamma$  tempore  $T$  genita, crefcente tempore  $T$  differentia  $\Delta T$ , augeri certa differentia  $\Delta \gamma$ , quae celeritati aequabitur a vi in  $R$  agente tempusculo  $\Delta T$  productae.

3. Cum jam initio tempusculi  $\Delta T$  agat in  $R$  vis  $= V$ , haecque toto tempusculo  $\Delta T$  continuo crefcat, vel continuo decrefcatur, et in fine tempusculi  $\Delta T$  fiat  $= V + \Delta V$  vel  $= V - \Delta V$  (1); evidens est, vim in  $R$  corpus ad motum circa axem  $MN$  continuo follicitantem quovis momento, durante motu tempusculo  $\Delta T$ , minorem effe vi invariabili  $= V + \Delta V$  et majorem vi invariabili  $= V$ , vel majorem vi invariabili  $= V - \Delta V$  et minorem vi invariabili  $= V$ .

4. Igitur in hypothefi vis continuo crefcentis erit celeritas  $\Delta \gamma$ , quam illa tempusculo  $\Delta T$  producit (2), major celeritate, quam vis invariabilis  $= V$ , et minor illa, quam vis invariabilis  $= V + \Delta V$  eodem tempusculo produceret (3).

5. Si autem vis continuo decrefcatur, debet effe celeritas  $\Delta \gamma$ , quam illa tempusculo  $\Delta T$  generat, minor celeritate, quam vis invariabilis  $= V$ , et major celeritate, quam vis invariabilis  $= V - \Delta V$  intra idem tempusculum generaret (3).

6. Sed, fi  $P$  fit pondus feu ei proportionalis massa corporis circa axem  $MN$  mobilis, et  $Pk^2$  illius momentum inertiae refpectu axeos  $MN$ , quaevis autem virium invariabilium  $V$ ,  $V + \Delta V$ ,  $V - \Delta V$  feorfim in punctum  $R$  agere cogitetur; debet tempusculo  $\Delta T$  generare per (498. §.)

$$\text{vis } V \text{ celeritatem angularem} = \frac{2g \cdot V \cdot RS}{Pk^2} \Delta T;$$

$$\text{vis } V + \Delta V \text{ celeritatem angularem} = \frac{2g(V + \Delta V) \cdot RS}{Pk^2} \Delta T;$$

$$\text{vis } V - \Delta V \text{ celeritatem angularem} = \frac{2g(V - \Delta V) \cdot RS}{Pk^2} \Delta T.$$

Dd 2

7. Quam-

7. Quamobrem habebimus ob (4) (5) (6) pro quovis quantumcunque parvo tempusculo  $\Delta T$

$$\Delta \gamma > \frac{2gV.RS}{Pk^2} \Delta T; \text{ et } \Delta \gamma < \frac{2g(V+\Delta V)RS}{Pk^2} \Delta T;$$

vel

$$\Delta \gamma < \frac{2gV.RS}{Pk^2} \Delta T; \text{ et } \Delta \gamma > \frac{2g(V-\Delta V)RS}{Pk^2} \Delta T.$$

8. Potest porro, sicut in (347. §. 6. n.), poni  $\Delta V = l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}$  pro certis coefficientibus  $l, m, n, \text{etc.}$  independentibus a  $\Delta T$ : pro hoc vero valore in (7) substituto fiet

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta T} > \frac{2gV.RS}{Pk^2}; \text{ et } \frac{\Delta \gamma}{\Delta T} < \frac{2gV.RS}{Pk^2} + \frac{2g.RS}{Pk^2} (l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.});$$

vel

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta T} < \frac{2gV.RS}{Pk^2}; \text{ et } \frac{\Delta \gamma}{\Delta T} > \frac{2g.VRS}{Pk^2} - \frac{2g.RS}{Pk^2} (l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}).$$

9. Quapropter erit per (Vol. I. §. 131.) exponens rationis differentialis celeritatis angularis  $\gamma$  consideratae instar unius functionis temporis variabilis  $T$  omni casu

$$\epsilon \gamma = \frac{2g.RS}{Pk^2} V \epsilon T.$$

10. Hinc, quia pro celeritate angulari  $\gamma$  debet esse  $C = \gamma.RS$  vera seu linearis celeritas puncti  $R$ ; erit exponens rationis differentialis verae celeritatis  $C$  puncti  $R$  (475. §.) omni casu, seu crescat seu decrescat vis agens in  $R$ ,  $\epsilon C = \epsilon \gamma.RS$ , adeoque per (9)

$$\epsilon C = \frac{2g.RS^2}{Pk^2} V \epsilon T.$$

11. Cognita ergo lege, qua data vis variabilis, durante motu gyatorio corporis circa axem  $MN$  tempore  $T$ , crescat vel decrescat, exprimitur  $V$  per congruam functionem vel ipsius temporis  $T$ , vel celeritatis angularis  $\gamma$  aut linearis  $C$ : si enim haec functio loco  $V$  in (9) (10) substituat, obtinebitur utroque casu aequatio differentialis inter duas variables  $\gamma$  et  $T$  vel  $C$  et  $T$ , ex qua ope calculi integralis ipsam celeritatem angularem  $\gamma$  vel linearem  $C$  licebit elicere.

## 500. Corollarium.

Omnis ergo vis, tam invariabilis  $V$  agens in punctum  $R$  directione  $RV$  (486. §.), quam variabilis intra tempus  $T$  in vim  $= V$  abiens, si illa corpus quodcunque, cum dato axe gyrationis  $MN$  firmissime connexum, ad motum circa eundem axem continuo sollicitet, producet tempore  $T$  celeritatem angularem  $\gamma$  et veram  $C$ , puncti  $R$ , pro qua, denotante  $P$  massam, et  $Pk^2$  momentum inertiae ejusdem corporis respectu axeos  $MN$ , debet esse (499. 498. §.)

$$\varepsilon \gamma = \frac{2g \cdot RS}{Pk^2} V \varepsilon T; \quad \varepsilon C = \frac{2g \cdot RS^2}{Pk^2} V \varepsilon T.$$

## 501. DEFINITIO.

Si massae  $A, B, D, E, F$ , a quibuscunque viribus ad motum gyrationem circa datum axem  $mn$  continuo sollicitentur, (92. Fig.), una vero massa  $M$  ita sit comparata, ut datae vires eandem intra datum quodcunque tempus celeritatem angularem debeant producere, seu ab illis omnes massae  $A, B, D, E, F$ , circa axem  $mn$  ad motum urgeantur, seu, remotis omnibus his massis, sola massa  $M$  in certo puncto  $d$  collecta ab iisdem viribus circa  $mn$  moveatur; dicetur massis  $A, B, D, E, F$  respondere in puncto  $d$  massa *aequivalens*  $M$ ; datas vero massas  $A, B, D, E, F$  ad punctum  $d$  *reducere* idem erit, ac massam aequivalentem  $M$  in dato puncto  $d$  determinare.

## 502. Corollarium.

Ad quodcunque punctum reducantur massae in motu gyratione circa datum axem constitutae; eadem manebunt celeritates verae, seu lineares singulorum punctorum in motu gyratione circa eundem axem constitutorum (501. 475. 473. §.).

## 503. Problema.

Corpus  $R$  (90. 91. Fig.) sollicitatur a vi  $U$  agente in punctum  $a$  ad motum gyrationem circa axem  $mn$ ; *reducere* massam corporis  $R$  ad datum punctum  $a$ .

## Solutio.

1. Quidquid est vis massam  $R$  ad motum circa axem  $mn$  sollicitans, invariabilis  $= U$ , vel variabilis intra tempus  $T$  in vim  $= U$  abiens, necesse

est, ut illa tempore  $T$  producat certam celeritatem angularem  $\gamma$ , quae, si  $Rk^2$  designet momentum inertiae ejusdem massae respectu axeos  $mn$ , det (500. §.)

$$\epsilon \gamma = \frac{2g \cdot ab}{Rk^2} \cdot U \epsilon T: \text{ igitur } \gamma = \frac{2g \cdot ab}{Rk^2} \int U \epsilon T.$$

2. Si, absente corpore  $R$ , in puncto  $a$ , in quod vis  $U$  agit, massa  $x$  collecta cogitetur; debet vis  $U$  inter tempus  $T$  producere celeritatem angularem  $\gamma$ , quae per (490. §.) dabit

$$\epsilon \gamma = \frac{2g}{x \cdot ab} U \epsilon T: \text{ igitur } \gamma = \frac{2g}{x \cdot ab} \int U \epsilon T.$$

3. Quamobrem, si massa corporis  $R$  ad punctum  $a$  sit reducenda, quo massa aequivalens  $x$  in puncto  $a$  determinetur; debet in (1) (2) per (501. §.) poni  $\gamma = \gamma$ : igitur erit

$$\frac{2g \cdot ab}{Rk^2} \int U \epsilon T = \frac{2g}{x \cdot ab} \int U \epsilon T;$$

$$\text{hinc massa aequivalens } x = \frac{Rk^2}{ab^2}.$$

#### 504. Corollarium 1.

A quacunq; vi  $U$  agente in punctum  $a$  datum corpus  $R$  ad motum gyratorium circa datum axem  $mn$  sollicitetur; dabit corpus  $R$  reductum ad idem punctum  $a$  massam aequivalentem  $x$  aequalem momento inertiae ejusdem corporis respectu axeos  $mn$  diviso per quadratum distantiae  $ab$  puncti  $a$  ab axe gyrationis  $mn$  (503. §.).

#### 505. Corollarium 2.

Fig. 92.

Si plures massae  $A, B, D, E, F$  ab aliqua vi  $U$  agente in punctum  $a$  (92 Fig.) ad motum gyratorium circa datum axem  $mn$  continuo urgeantur, cum omnes massae  $A, B, D, E, F$  instar totidem partium unius corporis circa axem  $mn$  mobilis possint considerari; erit massa aequivalens, quam eadem massae  $A, B, D, E, F$  ad punctum  $a$  reductae dabunt, aequalis summae momentorum inertiae singularum massarum  $A, B, D, E, F$  respectu axeos gyrationis  $mn$  divisae per quadratum  $ab^2$  distantiae  $ab$  puncti  $a$  ab eodem axe (504. 399. §.).

## 506. Corollarium 3.

Quoties ergo motus gyrorius aut unius massae R (90. 91. Fig), aut plurium massarum A, B, D, E, F (92. Fig.) circa datum axem mn, dependens ab aliqua vi U agente in datum punctum a, fuerit determinandus; quaerantur ante omnia momenta inertiae singularum massarum respectu axeos gyrationis mn; tum determinetur massa aequivalens M in puncto a respondeus omnibus massis per (504. 505. §.): inventa enim massa hac M licebit ob (501. §.) investigare tam celeritatem angularem  $\gamma$  quam veram C puncti a per (488. 489. 490. §.), qua cognita poterit per (473. §.) determinari etiam vera celeritas cujusvis alterius puncti in motu circa axem mn constituti.

## 507. Corollarium 4.

Sit in puncto d collecta massa u, et in punctum a agat quaecunque Fig. 90. 91. vis U; debet haec intra tempus T producere certam celeritatem angularem z, pro qua, cum u.cd<sup>2</sup> sit momentum inertiae massae u respectu axeos mn (398. §.), debet esse per (500. §.)

$$z = \frac{2g \cdot ab}{u \cdot cd^2} U \varepsilon T: \text{ igitur } z = \frac{2g \cdot ab}{u \cdot cd^2} \int U \varepsilon T.$$

Si igitur ponas  $z = y$  in (503. §. 2. n.), obtinebis

$$\frac{2g \cdot ab}{u \cdot cd^2} \int U \varepsilon T = \frac{2g}{x \cdot ab} \int U \varepsilon T:'$$

$$\text{adeoque fiet } u = \frac{x \cdot ab^2}{cd^2}.$$

## 508. Corollarium 5.

Ex (507. §.) et (503. §. 2. n.) sequitur, quod pro casu vis invariabilis in (493. §.) est demonstratum: nimirum, vim quoque variabilem agentem in datum punctum a eandem intra idem tempus celeritatem angularem producturam, seu in puncto a collecta sit massa x, et absit omnis alia massa convertenda circa datum axem mn; seu in puncto d collecta sit massa u, et nulla in a, modo tales sint massae x, u, ut momentum inertiae  $x \cdot ab^2$  massae x in puncto a aequetur momento inertiae  $u \cdot cd^2$  massae u in puncto d respectu axeos mn.

## 509. Corollarium 6.

In (507. 503. §.) est  $u = \frac{Rk^2}{cd^2}$ : erat autem  $x$  in (503. §.) massa aequivalens in puncto  $a$  debita massae corporis  $R$  ad idem punctum reductae, et  $u$  in (507. §.) massa aequivalens in puncto  $d$  debita massae  $x$  ad idem punctum reductae; adeoque debet esse  $u = \frac{Rk^2}{cd^2}$  massa aequivalens in puncto  $d$  debita massae corporis  $R$  reductae ad punctum  $d$  (501. §.). Hinc igitur et ex (504. §.) generatim sequitur, massam cujlibet corporis  $R$  circa axem fixum  $mn$  mobilis ad quodcunque punctum reductam (punctum  $a$ , in quovis  $U$  supponitur applicari, vel aliud aliquod  $d$ ) dare in eodem puncto massam aequivalentem aequalem momento inertiae corporis  $R$  respectu axeos  $mn$  diviso per quadratum distantiae ejusdem puncti ( $a$  vel  $d$ ) ab axe  $mn$ .

## 510. Corollarium 7.

Fig. 92. Hinc vero (509. §.) per (506. §.) porro elucet, plures massas  $A, B, D, E, F$  circa datum axem  $mn$  mobiles (92. Fig.) ad quodlibet punctum, ( $a$  in quo certa vis  $U$  agat, vel aliud  $d$ ) reductas dare in eodem puncto massam aequivalentem aequalem summae momentorum inertiae singularum massarum  $A, B, D, E, F$  respectu axeos  $mn$  divisa per quadratum distantiae ejusdem puncti ( $a$  vel  $d$ ) ab axe  $mn$ .

## DISSERTATIO XIII.

DE

MOTU PENDULORUM, CENTROQUE OSCILLA-  
TIONIS.

## 511. DEFINITIO.

Si corpus grave  $FDBE$  (93. Fig.) ope rectae inflexilis  $aB$  transeuntis Fig. 93. per ejus centrum gravitatis  $G$  et ad datum axem fixum horizontalemque  $nm$  perpendicularis cum hoc in puncto  $a$  ita connectatur, ut illud circa  $nm$  libere possit moveri; vocabitur  $aFDBE$  *Pendulum compositum*; punctum  $a$  erit *punctum suspensionis*; et angulus  $G\alpha\beta$ , sub quo recta  $G\alpha$  inclinetur ad rectam verticalem  $\alpha\beta$  transeuntem per punctum suspensionis, appellabitur *Elongatio a situ naturali*.

## 512. Corollarium 1.

Recta  $aG$  inter centrum gravitatis penduli punctumque suspensionis intercepta aequatur distantiae centri gravitatis ab axe suspensionis  $nm$  (511. §.).

## 513. Corollarium 2.

Rectae verticales  $Gv$ ,  $a\beta$  ductae e centro gravitatis  $G$  punctoque suspensionis  $a$  sunt in plano verticali ad axem  $nm$  in  $a$  perpendiculari inter se parallelae, ita ut angulus  $BGv$  debeat aequari elongationi  $G\alpha\beta$  penduli a situ naturali (511. §.).

## 514. Corollarium 3.

Si  $P$  sit pondus penduli seu massa ei proportionalis, licebit totum pendulum omni gravitate destitutum considerare, quin ideo status motus turbetur, in quo illud ob gravitatem cogatur perseverare, modo centrum gravitatis  $G$  a vi  $v = P$  directione verticali  $Gv$  deorsum continuo urgeri supponatur (148. §.).

## 515. Corollarium 4.

Potest autem vis  $v = P$  agens directione  $Gv$  resolvi in vim  $= P \text{ Cof } BGv = P \text{ Cof } Ga\beta$  secundum directionem  $GB$ , et alteram  $y = P \text{ Sin } BGv = P \text{ Sin } Ga\beta$  secundum directionem  $Gy$  in eodem cum  $Gv$  plano ad  $aG$  perpendiculararem (115. §.): priorem vim sustinet, ut patet, solus axis fixus  $nm$  in puncto  $a$ ; posterior vero vis nititur, tota sua efficacia rectam  $Ga$  ipsumque pendulum circa axem  $nm$  movere.

## 516. Corollarium 5.

Si ergo pendulum in situ naturali, centro gravitatis  $G$  cum puncto suspensionis  $a$  in eadem recta verticali  $a\beta$  jacente, quiescat; debeat illud, ob angulum  $Ga\beta = 0$ , adeoque etiam  $P \text{ Sin } Ga\beta = 0$ , perpetuo in eodem situ quiescere, nisi externa aliqua causa independens a vi gravitatis ejus statum turbet (514. 515. §.).

## 517. Corollarium 6.

In quovis autem alio situ, sub qualibet elongatione  $Ga\beta$  a situ naturali (511. §.), concipiet pendulum ob solam gravitatem motum gyrationis circa axem suspensionis  $nm$ , quo singula ejus puncta quovis tempore per certos arcus circulares in planis verticalibus ad  $nm$  perpendicularibus debent promoveri, ipso centro gravitatis  $G$  incedente in arcu  $Gg$  circuli e puncto suspensionis  $a$  radio  $aG$  in eodem plano verticali descripti, in quo jacent rectae  $aG$ ,  $a\beta$  (514. 515. §.).

## 518. Corollarium 7.

Quamobrem cognita celeritate lineari seu vera  $C$ , quam centrum gravitatis  $G$  penduli intra datum tempus  $T$  concipiat, innotescet eo ipso celeritas angularis  $= \frac{C}{aG}$  totius penduli (517. 468. 476. §.); verae autem celeritates omnium reliquorum punctorum poterunt inde per (473. §.) determinari.

## 519. Problema.

*Datis elongatione  $\Phi = Ga\beta$  a situ naturali, massa seu ei proportionali pondere  $P$  penduli, et distantia  $AG = D$  illius centri gravitatis ab axe suspensionis  $nm$  (511. 512. §.); invenire veram celeritatem  $C$ , quam centrum gravitatis  $G$  durante motu per arcum  $Gg$  (518. §.) concipiet*

Solutio.

## Solutio.

1. Pendulum aFDBE potest concipi omnis gravitatis expers, si in ejus centrum gravitatis G vis  $v = P$  directione verticali Gv deorsum continuo agere supponatur (514. §.).

2. Ob hanc vero vim (1) concipiet centrum gravitatis G durante ejus motu per arcum Gg eandem celeritatem veram C, quam, absente corpore FD BE, punctum G rectae aG conciperet, si in illo massa M aequivalens massae totius penduli esset collecta (501. §.).

3. Si igitur GH, gh sint perpendiculares ad rectam verticalem a $\beta$ , ponaturque aH=e, ah=x; erit ob (1) (2) per (389. §.) quaesita celeritas

$$C = 2\sqrt{\frac{gP}{M}(x-e)}.$$

4. Sit k recta, per cujus quadratum  $k^2$  debet multiplicari massa P penduli, ut productum  $Pk^2$  aequetur ejus momento inertiae respectu axeos horizontalis transeuntis per centrum gravitatis G et paralleli axi mn (402. §.); erit  $Pk^2 + PD^2$  momentum inertiae penduli respectu axeos nm (406. §.), et  $M = \frac{Pk^2 + PD^2}{D^2}$  massa in puncto G aequivalens massae penduli (2) per (504. §.).

5. Porro pro data elongatione a fitu naturali  $\phi = Ga\beta$ , si praeterea ponatur angulus Gag= $\alpha$ , fiet aH=e=DCof $\phi$ , et ah=x=DCof( $\phi - \alpha$ ): consequenter erit

$$x - e = D(\text{Cof}(\phi - \alpha) - \text{Cof}\phi).$$

6. Pro his igitur valoribus (4) (5) in (3) substitutis obtinebimus sequentem expressionem celeritatis linearis C, quam centrum gravitatis G penduli durante motu per arcum Gg debet concipere.

$$C = 2D\left(\frac{gD}{k^2 + D^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(\text{Cof}(\phi - \alpha) - \text{Cof}\phi)}.$$

## 520. Corollarium 1.

Crescente arcu Gg crescet quoque angulus  $\alpha = \text{Gag}$ , hinc decrescet  $\phi - \alpha = \text{gaC}$ , et crescet Cof( $\phi - \alpha$ ); celeritas centri gravitatis G durante motu in arcu GC debet ergo continuo crescere (519. §.).

## 521. Corollarium 2.

Si centrum gravitatis  $G$  percurso toto arcu  $GC$  incidat in lineam verticalem  $a\beta$  in puncto  $C$ , abibit angulus  $\alpha = G\alpha g$  in  $\phi = GaC$ , adeoque fiet  $\phi - \alpha = 0$  et  $\text{Cof}(\phi - \alpha) = 1$ : in puncto  $C$  lineae verticalis  $a\beta$  habebit igitur centrum gravitatis  $G$  penduli celeritatem (519. §.).

$$C = 2D \left( \frac{gD}{k^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(1 - \text{Cof} \phi)} = 2D \sqrt{\left( \frac{gD}{k^2 + D^2} \cdot \text{Sin}^2 \phi \right)}.$$

## 522. Corollarium 3.

Si porro centrum gravitatis  $G$  percurso arcu  $Gc$  supponatur excurrere ultra  $C$  per arcum  $CI$ , abibit angulus  $\alpha = Gag$  in  $\alpha = GaI = \phi + CaI$ , adeoque fiet  $\phi - \alpha = -CaI$ , hinc erit  $\text{Cof}(\phi - \alpha) = \text{Cof}(-CaI) = \text{Cof} CaI$ : celeritas centri gravitatis in puncto  $I$  erit igitur (519. §.)

$$C = 2D \left( \frac{gD}{k^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi)}.$$

## 523. Corollarium 4.

Quare, si sit angulus  $CaI < \phi = GaC$ ; erit  $\text{Cof} CaI < 1$  et  $> \text{Cof} \phi$ , crescente vero angulo  $CaI$  decrescet  $\text{Cof} CaI$ , et differentia  $\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi$ : centrum gravitatis  $G$  habebit ergo in quovis puncto  $I$  celeritatem realem  $C$  minorem illa, quam in puncto  $C$  rectae verticalis  $a\beta$  habuit (521. 522. §.), eaque fiet eo minor, quo magis creverit angulus  $CaI$  crescente arcu  $CI$  (522. §.), modo sit  $CaI < GaC$  et  $CI < GC$ .

## 524. Corollarium 5.

Sed pro  $CaI = \phi = GaC$  fiet celeritas centri gravitatis  $G$  in puncto  $I$  aequalis nihilo, ob  $\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi = 0$  (522. §.); et pro  $CaI > \phi = GaC$  erit  $\text{Cof} CaI < \text{Cof} \phi$ , adeoque  $\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi$  valoris negativi, celeritasque centri gravitatis  $G$  in  $I$  imaginaria (522. §.).

## 525. Corollarium 6.

Quare, si pendulum in situ  $aFDBE$  per datam elongationem  $\phi = Ga\beta$  a situ naturali (511. §.) determinato quiescat, ita illud a sola gravitate ad motum gyratorium circa axem suspensionis  $n m$  sollicitabitur (514. 517. §.), ut ejus centrum gravitatis  $G$ , absentibus omnibus motus obstaculis, celeritate continuo crescente in arcu  $GC$  ad rectam verticalem  $a\beta$  per punctum suspen-

suspensionis a traiectionem sit descensurum (520. §.), obtentaque celeritate maxima in puncto C ejusdem rectae (521. §.) ultra hanc rectam per arcum CI celeritate continuo decrescente ascensurum (523. §.), donec per curso arcu CI aequali arcui GC, per quem descenderat, omni celeritate spoliatur (524. §.), consequenter ob parem gravitatis actionem ex puncto I ad G celeritate motu eadem lege primum accelerato usque C, tum retardato redire cogatur.

## 526. Corollarium 7.

Motus penduli a FDBE circa axem suspensionis nm erit ergo *oscillatorius*, quo illius centrum gravitatis G alternatim recedet a suo situ initiali per arcum GI, et accedet ad illum per arcum IG, ita ut arcus GC, IC ad partes oppositas rectae verticalis aβ traiectionis per punctum suspensionis a sint inter se aequales futuri (525. §.): motus idcirco per arcum  $GI = 2GC = 2CI$  vocari solet *integra*, et per GC, aut CI *dimidia Oscillatio*.

## 527. Corollarium 8.

De reliquo evidens est, celeritatem maximam centri gravitatis G, quam illud in puncto infimo C arcus GI debet habere; per elongationem penduli a situ naturali  $\varphi = GaC$  (511. §.) sic esse determinatam, ut illa eo minor sit, quo minor est haec elongatio, et aequetur nihilo, pro elongatione  $\varphi = GaC = 0$  (521. §.).

## 528. Problema.

*Data elongatione penduli a situ naturali  $\varphi = GaC$  (511. §.); invenire tempus T integrae oscillationis in arcu  $GI = 2GC$  (526. §.).*

## Solutio.

Tempus unius integrae oscillationis T aequatur tempori, quo centrum gravitatis G percurrit arcum  $GI = 2GC$  circuli radio  $aG = D$  in plano verticali ad axem suspensionis nm perpendiculari descripti: quare, cum centrum gravitatis G in hoc motu possit spectari instar puncti massae  $M = \frac{P(k^2 + D^2)}{D^2}$ , quod a vi  $v = P$  perpetuo secundum directionem verticalem  $Gv$  deorsum impulsus in arcu circulari GI incedere cogatur (519. §. 1. 2. 3. n.); invenies per (396. §.) pro  $r = D = aG$ ,  $b = CH = D \sin \varphi$ ,  $V = P$ , et  $M = \frac{P(k^2 + D^2)}{D^2}$  tempus dimidiae oscillationis,

nis, cujus duplum dabit tempus unius integrae oscillationis ut sequitur

$$T = \pi S \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}$$

$$\text{pro } S = 1 + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left( \frac{b}{2D} \right)^n =$$

$$= 1 + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin \nu \Phi}{2} \right)^n.$$

Constat autem, terminum indeterminatum factoris  $S$  daturum singulos illius terminos post primum  $= 1$  ordine sequentes, si successive fiat  $n=1, n=2, n=3$ , et ita porro.

### 529. Corollarium.

Quo minor fuerit elongatio penduli a situ naturali  $\Phi = GaC$ , eo minor erit arcus  $GI = 2GC$ , in quo singulae oscillationes perficientur (526. §.), eoque minor fiet  $b = CH = D \sin \nu \Phi$ : et si adeo parva sit elongatio  $\Phi$ , consequenter etiam arcus  $GI$  adeo exiguus, ut  $b = CH$  respectu radii  $D = aG$  prope evanescat; erit valor fractionis  $\frac{b}{2D}$  prope aequalis nihilo. Tempus igitur integrae oscillationis in valde parvo arcu  $GI$  poterit ob (528. §.) poni

$$= \pi \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}},$$

$$\text{et accuratius } = \pi \left( 1 + \frac{b}{8D} \right) \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}.$$

### Scholion.

Proprie nequit in (528. §.) fieri  $T = \pi \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}$ , nisi  $b$  penitus evanescat, seu fiat  $b = 0$ , adeoque arcus  $GI$ , in quo oscillationes perfici supponuntur, in punctum  $C$  abiens nullus evadat. Cum autem pendulum in situ naturali, existente  $b = 0$ , perfecte debeat quiescere (516. §.), ejusdemque celeritas in hoc situ aequetur nihilo (527. §.); clarum est, expressionem temporis in (528. §.) ita esse ad certum valorem  $b$  pendentem ab elongatione penduli  $\Phi = GaC$  restrictam, ut  $T = \pi \left( \frac{k^2 + D^2}{2gD} \right)^{\frac{1}{2}}$  proprie denotare debeat tempus vero proximum, quo pendulum in arcu  $GI$  prope evanescente, non tamen aequali nihilo, singulas oscillationes perficiat.

## 530. DEFINITIO.

Si corpus grave FDBE successive decreſcat, ac demum in unum punctum grave G abire cogitetur, ope rectae inflexilis aG et omni gravitate deſtitutae cum fixo puncto a ita connexum, ut circa hoc libere poſſit moveri; habebitur loco penduli compoſiti (511. §.) *ſimplex pendulum* longitudinis aG.

## 531. Corollarium 1.

Quaecunque ſuperius pro pendulo compoſito aFDBE ſunt demonſtrata, ſubſiſtent etiam pro pendulo ſimplici aG, in quod illud abibit, ſi corpus grave FDBE in unum punctum grave G abeat (530. §.), cujus momentum inertiae  $Pk^2$  (519. §. 4. n.) reſpectu axeos horizontalis per G tranſeuntis et axi nm paralleli aequetur nihilo, ob  $k=0$  (398. 402. §.).

## 532. Corollarium 2.

Pendulum ſimplex in ſitu verticali aβ quieſcens perpetuo quieſcet, niſi ab externa aliqua vi, independente a gravitate, ad motum concitetur (531. 516. §.).

## 533. Corollarium 3.

In quovis alio ſitu per elongationem  $\varphi = Ga\beta$  a ſitu naturali determinato (511. §.) debet pendulum ſimplex aG ad motum oſcillatorium a gravitate concitari, vi cujus punctum grave G alternatim deſcendet per arcum GC aſcendetque per illi aequalem CI, et deſcendet per IC aſcendetque per CG (531. 526. §.).

## 534. Corollarium 4.

Deſcenſus penduli per GC vel IC tempore unius integrae oſcillationis in arcu GI (533. 526. §.), fiet celeritate continuo creſcente, aſcenſus vero per CI vel CG celeritate continuo decreſcente evaneſcenteque in I vel G (531. 525. §.): maxima vero celeritas penduli in infimo puncto C arcus GCI ita dependebit ab ejus elongatione  $\varphi = GaC$  a ſitu naturali, ut ea pro  $b = CH$  et longitudine penduli aG = D futura ſit (531. 521. §.)

$$C = 2\sqrt{gD} \sin v \varphi = 2\sqrt{gb} = 2\sqrt{g} \cdot CH.$$

## 535. Corollarium 5.

Tempus porro unius integrae oſcillationis penduli ſimplicis in arcu GI = 2GC (533. 526. §.), data tam ejus longitudine D = aG, quam elon-

elongatione  $\Phi = GaC$  a situ naturali, pro qua fit  $CH = b = D \sin \nu \Phi$ , obtinebitur per (531. 528. §.)

$$T = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}}$$

$$\text{pro } S = 1 + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left( \frac{b}{2l} \right)^n =$$

feu

$$= 1 + \dots + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \sin \nu \Phi \right)^n$$

### 536. Corollarium 6.

Si autem adeo exigua fuerit elongatio  $\Phi = gaC$  penduli simplicis, adeoque arcus  $gI = 2gC$ , in quo illud singulas oscillationes perficiat, adeo parvus, ut  $b = Ch$  respectu longitudinis  $D = aG$  prope evanescat; erit ob (536. §.), ut in (529. §.), tempus unius integrae oscillationis in ejusmodi arcu  $gI$  prope verum

$$T = \pi \sqrt{\frac{D}{2g}}; \text{ et accuratius } T = \pi \left( \frac{D}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{b}{8D} \right).$$

### 537. Corollarium 7.

Ex (536. §.) obtinetur  $g = \frac{D \pi^2}{2 T^2}$  altitudo, per quam corpus grave libere labens primo minuto secundo decidit (323. §.): cognito igitur per observationes tempore  $T$ , quo pendulum simplex datae longitudinis  $D$  in certa terrae regione singulas oscillationes in exiguis arcubus perficiat, poterit eo ipso inveniri altitudo  $g$ , per quam corpora gravia in eadem regione de quiete libere labentia intra primum minutum secundum debent decidere.

### 538. Corollarium 8.

Cognita autem altitudine  $g$  liberi lapsus corporum gravium intra primum minutum secundum pro quacunque terrae regione; invenietur  $D = \frac{2gT^2}{\pi^2}$  (537. §.) longitudo penduli simplicis, quod in arcubus exiguis oscillans singulas oscillationes tempore  $T$  perficiet: et pro  $T = 1$  fiet  $D = \frac{2g}{\pi^2}$  longitudo penduli simplicis singulas oscillationes intra unum minutum secundum absolventis.

## 539. Corollarium 9.

Si in omnibus terrae regionibus eadem sit longitudo  $D$  penduli simplicis singulas oscillationes intra unum minutum secundum absolventis; debebunt quoque corpora gravia de quiete libere labentia in omnibus terrae regionibus per eandem altitudinem  $=g$  intra primum minutum secundum decidere: quodsi autem longitudo  $D, d$  pendulorum simplicium singulas oscillationes intra unum minutum secundum absolventium diversae sint in diversis terrae regionibus; erunt altitudines  $G, g$ , per quas corpora gravia de quiete in iisdem regionibus libere labentia primo minuto secundo decident, inter se directe ut longitudo pendulorum, nimirum:  $G = \frac{D \pi^2}{2}$ ,  $g = \frac{d \pi^2}{2}$  (537. §.), hinc  $G:g = D:d$ .

## 540. Corollarium 10.

Vires gravitatis  $V, v$  in illis terrae regionibus, in quibus pendula simplicia singulas oscillationes uno minuto secundo absolventia diversas habent longitudo  $D, d$  sunt itaque inter se directe ut hae longitudo: si enim corpora gravia in iisdem regionibus de quiete libere labentia per altitudines  $G, g$  primo minuto secundo decident; erit  $V:v = G:g$  (322. §.)  $= D:d$  (539. §.).

## 541. Corollarium 11.

Si duo pendula simplicia longitudo  $D, d$  in eadem terrae regione sub eadem elongatione  $\phi$  a situ naturali temporibus  $T, t$  singulas oscillationes perficiant; erunt haec tempora inter se ut radices quadratae longitudo; et ipsae longitudo inter se directe ut quadrata temporum: erit enim per (535. §.)

$$T = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}}, \text{ et } t = \pi S \sqrt{\frac{d}{2g}};$$

adeoque fiet

$$T:t = \sqrt{D:d}; \text{ et } D:d = T^2:t^2.$$

## 542. Corollarium 12.

Quodsi autem pendula simplicia longitudo  $D, d$  in arcibus prope evanescentibus oscillent; erunt tempora  $T, t$ , quibus illa singulas oscillationes absolvent, semper inter se directe ut radices quadratae longitudo

D, d, et. hae ut quadrata temporum, etiam si diversa sit pendulorum elongatio (511. §.): semper enim erit per (538. §.)

$$D = \frac{2gT^2}{\pi^2}; \quad d = \frac{2gt^2}{\pi^2};$$

$$\text{hinc } D:d = T^2:t^2, \text{ et } T:t = \sqrt{D}:\sqrt{d}.$$

#### 543. Corollarium 13.

Pendulum longitudinis D singulas oscillationes in arcu prope evanescente tempore T absolvens, absolvet quovis alio tempore Z oscillatio-

$$\text{nes numero } N = \frac{Z}{T} = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}} \quad (536. \text{ §.}).$$

#### 544. Corollarium 14.

Quamobrem, si duo pendula simplicia longitudinum D, d singulas oscillationes temporibus quibuscunque T, t absolvantia, in eadem terrae regione in arcubus prope evanescentibus oscillent; erunt numeri N, n oscillationum, quas illa eodem tempore Z debent perficere, inter se inverse ut radices quadratae longitudinum: nimirum erit per (543. §.)

$$N = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}} \quad \text{et } n = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{d}{2g}}};$$

$$\text{adeoque } N:n = \sqrt{d}:\sqrt{D}.$$

#### 545. Problema.

Fig. 69. 93. *Datis longitudine l = EP (69. Fig.) penduli simplicis et distantia D = aG centri gravitatis G penduli compositi aFD BE (93. Fig.) ab axe suspensionis nm, invenire rationem temporum, quibus ejusmodi pendula sub eadem elongatione  $\Phi = PED = GaC$  (69. 93. Fig.) a situ naturali singulas oscillationes absolvant.*

#### Solutio.

1. Sit k linea recta, cujus quadratum  $k^2$  aequetur momento inertiae penduli compositi aFD BE (93. Fig.) respectu axeos horizontalis transeuntis per illius centrum gravitatis G et paralleli axi oscillationis nm diviso per massam ejusdem penduli, et T sit tempus unius integrae oscillationis; erit per (528. §.)

$$T =$$

$$T = \pi S \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}} = \frac{\pi S}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{D}}$$

2. Si autem pendulum simplex (69. Fig.)  $l = E$  tempore  $t$  singulas oscillationes absolvat; erit per (535. §.)

$$t = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}} = \frac{\pi S}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{D}$$

Debebit ergo esse

$$T:t = \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{D}} : \sqrt{D}, \text{ et } T^2:t^2 = \frac{k^2 + D^2}{D} : D$$

#### 546. Corollarium 1.

Pro  $l = D$  effiet  $T^2:t^2 = (k^2 + l^2):l^2$ , consequenter  $T^2 > t^2$  et  $T > t$  (545. §.): tempus ergo unius integrae oscillationis penduli compositi majus est tempore, intra quod pendulum simplex sub eadem elongatione a situ naturali singulas oscillationes abfolveret, si illius longitudo aequaretur distantiae  $D = aG$  centri gravitatis  $G$  penduli compositi ab axe oscillationis  $n m$ .

#### 547. Corollarium 2.

Semper autem, si penduli simplicis longitudo sit  $l = \frac{k^2 + D^2}{D}$ , erit  $T = t$  (545. §.), id est: pendulum compositum  $aFDBE$  (93. Fig.) et pendulum simplex  $EP$  (69. Fig.) abfolvent sub pari elongatione  $GaC = PED$  a situ naturali singulas oscillationes eodem tempore, si longitudo  $l$  penduli simplicis per distantiam  $D$  centri gravitatis penduli compositi ab axe suspensionis ita determinetur, ut ea sit  $l = \frac{k^2 + D^2}{D}$ .

#### 548. DEFINITIO.

*Pendula isochrona* sunt, quae singulas oscillationes eodem tempore abfolvunt.

#### 549. Corollarium 1.

Ut pendulum simplex longitudinis  $l$  sub eadem elongatione a situ naturali, quam pendulum quodcunque compositum  $aFDBE$  (93. Fig.) habeat, fit huic isochronum, debet necessario esse  $l = \frac{k^2 + D^2}{D} = \frac{k^2 + aG^2}{aG}$  (548. 547.).

## 550. Corollarium 2.

Cum igitur omne corpus grave  $FDBE$  unum centrum gravitatis  $G$  habeat (148. §.), per quod potest transire axis horizontalis parallelus axi oscillationis  $nm$ ; adeoque in omni pendulo composito  $aFDBE$  possibilis debeat esse recta  $k$  (545. §. 1. n.), et alia  $D = aG$ : evidens est, pro quovis pendulo composito possibile esse pendulum simplex ei isochronum (549. §.).

## 551. Corollarium 3.

Ob  $l = aG + \frac{k^2}{aG}$  fit  $l > aG$ : longitudo penduli simplicis isochroni pendulo composito  $aFDBE$  est ergo major distantia  $aG$  centri gravitatis  $G$  ab axe oscillationis  $nm$  (549. §.). Quare cogitetur in recta  $aG$  producta punctum  $z$  in distantia  $az = \frac{k^2 + D^2}{D}$ , in quo tota massa gravis  $FDBE$  sit collecta; erit  $az$  pendulum simplex isochronum pendulo composito  $aFDBE$  (531. 549. §.).

## 552. DEFINITIO.

Punctum  $z$  rectae  $aB$  transeuntis per centrum gravitatis  $G$  penduli compositi  $aFDBE$ , pro quo, si tota massa gravis corporis  $FDBE$  in illo collecta esset, nasci deberet pendulum simplex  $az$  composito  $aFDBE$  isochronum, vocatur *Centrum oscillationis* penduli compositi  $aFDBE$ .

## 553. Corollarium 1.

In omni pendulo composito  $aFDBE$  datur in recta  $aB$  transeunte per illius centrum gravitatis  $G$  et perpendiculari ad axem oscillationis  $nm$  unum centrum oscillationis  $z$  in distantia ab eodem axe  $az = \frac{k^2 + D^2}{D}$ , quae semper est major quam distantia  $D = aG$  centri gravitatis  $G$  ab hoc axe (551. 552. §.).

## 554. Corollarium 2.

Distantia centri oscillationis  $z$  penduli compositi  $aFDBE$  excedit distantiam  $D = aG$  illius centri gravitatis  $G$  ab axe oscillationis  $nm$  differentia  $az - aG = az - D = Gz$ , estque (553. §.)

$$Gz = \frac{k^2 + D^2}{D} - D = \frac{k^2}{D}.$$

## 555. Corollarium 3.

Inventio centri oscillationis  $z$  in dato quocunque pendulo composito aFD $\beta$ E dependet igitur a calculo, quem superius pro investigando momento inertiae tradidimus. Si enim dato centro gravitatis  $G$  dataque illius distantia  $D=Ga$  ab axe suspensionis  $nm$  et massa  $P$  corporis FD $\beta$ E, quaeras ejus momentum inertiae  $\mu=Pk^2$  respectu axeos horizontalis transeuntis per centrum gravitatis  $G$  et paralleli axi  $nm$ ; innotescet eo ipso  $k^2=\frac{\mu}{P}$  (545. §. 1. n.), et distantia  $Gz=\frac{k^2}{D}=\frac{\mu}{PD}$  centri oscillationis  $z$  a centro gravitatis  $G$  (554 §).

## 556. Corollarium 4.

Dato autem momento inertiae  $N=Pk^2+PD^2$  penduli aFD $\beta$ E respectu ipsius axeos oscillationis  $nm$  (519. §. 4. n.), datisque massa  $P$  penduli et distantia  $D=Ga$  illius centri gravitatis  $G$  ab axe oscillationis  $nm$ ; invenies distantiam  $az=\frac{N}{P.D}$  centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis  $nm$  (553. §.) divisione momenti inertiae  $N$  per productum ex pondere penduli in distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis.

## 557. Corollarium 5.

Exemplo sit cylinder rectus (78. Fig.) circa axem cum diametro AB Fig. 78. coincidentem oscillans. Cum axis cylindri  $ch$  sit perpendicularis ad axem oscillationis  $nm$ , transeatque per centrum gravitatis  $u$ , ita ut sit  $uc=\frac{1}{2}ch$  (219. §.); jacebit centrum oscillationis cylindri in ipso axe  $ch$ , puta in ejus puncto  $z$  (552. §.): si igitur, pro radio cylindri  $R=Aa$ , axe  $a=ch$ , et massa seu pondere  $P$ , capiatur distantia  $D=uc=\frac{1}{2}a$  centri gravitatis  $u$  ab axe oscillationis, et momentum inertiae  $N=\frac{1}{12}P(4a^2+3R^2)$  totius cylindri respectu axeos AB (435. §.); erit distantia centri oscillationis  $z$  ab hoc axe per (556. §)

$$cz = \frac{\frac{1}{12}P(4a^2+3R^2)}{P \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{2}{3}a + \frac{R^2}{2a}.$$

## 558. Corollarium 6.

Si conus rectus ABD (56. Fig.) oscillet circa axem MN ad illius Fig. 56. axem  $AC=a$  perpendiculararem; jacebit in  $AC$  centrum gravitatis  $\gamma$  in distantia  $D=A\gamma=\frac{3}{4}a$  (223. §.), et centrum oscillationis (552. §.) alicubi

intra centrum gravitatis  $\gamma$  et baseos centrum C (553. §.), cujus distantia X ab axe oscillationis MN, adeoque a vertice conici A, denotante P pondus, et N momentum inertiae conici respectu axeos MN, erit per (556. §.)

$$X = \frac{N}{P \cdot D} = \frac{N}{P \cdot \frac{3}{4}a}.$$

Est autem per (436. §.)

$$N = \frac{3}{20}P(4a^2 + R^2) = P\left(\frac{3}{5}a^2 + \frac{3}{20}R^2\right):$$

igitur debet esse

$$X = \frac{\frac{3}{5}a^2 + \frac{3}{20}R^2}{\frac{3}{4}a} = \frac{4}{3}a + \frac{R^2}{5a}.$$

#### 559. Corollarium 7.

Fig. 59. Oscillet conoides parabolicum pQq (59. Fig.) circa axem MN ejus axi Qa perpendicularem: cum illius centrum gravitatis  $\gamma$  jaceat in axe Qa, ita ut ejus distantia a vertice Q sit  $D = Q\gamma = \frac{2}{3}Qa$  (233. §.); jacebit centrum oscillationis in eodem axe, puta in puncto  $\alpha$  (552. 553. §.), ita ut illius distantia a puncto Q, pro axe conoidis  $a = Qa$ , pondere P, et momento inertiae N respectu axeos MN, debeat esse (556. §.)

$$Q\alpha = \frac{N}{P \cdot D} = \frac{N}{P \cdot \frac{2}{3}a}.$$

Sed pro  $x = Qa = a$ , et parametro p parabolaie Qp, cujus revolutione circa axem Qa generatur conoides pQq debet esse (439. §.)

$$N = \frac{1}{2}P(3a^2 + p^2) = P\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}p^2\right):$$

debet ergo poni

$$Q\alpha = \frac{\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}p^2}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{4}a + \frac{p^2}{4a}.$$

#### 560. Corollarium 8.

Et generatim, quidquid sit curva Qp debita coordinatis orthogonis  $y = pa$ ,  $x = Qa$ , cujus revolutione circa axem Qa generetur corpus rotundum pQq oscillans circa axem MN axi Qa perpendicularem, jacebit et centrum gravitatis corporis pQq in axe Qa (225. §.), et ipsum centrum oscillationis, puta in puncto  $\alpha$  (552. §.), pro cujus distantia  $Q\alpha$  ab axe oscillationis MN facile ex praecedentibus derivabitur expressio generalis.

Si

Si enim  $N$  denotet momentum inertiae corporis  $pQq$  respectu axeos  $mn$ , et  $n$  exprimat productum ex pondere corporis  $pQq$  in distantiam illius centri gravitatis, ab axe  $MN$  aequale momento statico ejusdem corporis respectu plani in  $Q$  ad  $Qa$  perpendicularis (150. §.);

$$\text{erit } Q\alpha = \frac{N}{n} \text{ per (556. §.);}$$

$$N = \frac{\pi}{4} \int (4x^2y^2 + y^4) \varepsilon x \text{ per (437. §.);}$$

$$n = \pi \int xy^2 \varepsilon x \text{ per (226. §.):}$$

igitur erit

$$Q\alpha = \frac{\frac{\pi}{4} \int (4x^2y^2 + y^4) \varepsilon x}{\pi \int xy^2 \varepsilon x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\int (4x^2y^2 + y^4) \varepsilon x}{\int xy^2 \varepsilon x}.$$

### 561. Problema.

*Investigare centrum oscillationis penduli egihPDQi (77. Fig.) com. Fig. 77. positi ex duabus partibus egih, BPDQ, quarum centra gravitatis  $\gamma$ ,  $C$  jaceant in una recta  $AD$  ad axem oscillationis  $mn$  perpendiculari.*

Solutio.

1. Commune centrum gravitatis partium egih, BPDQ, adeoque centrum gravitatis ipsius penduli egih PDQ coincidet in hac hypothesi cum puncto  $\alpha$  rectae  $AD$  intra centra gravitatis  $C$ ,  $\gamma$  ita jacente, ut pro massis seu ponderibus  $m$ ,  $M$  partium egih, BPDQ, sit (154. §.).

$$A\alpha = \frac{m \cdot A\gamma + M \cdot AC}{m + M}.$$

2. Quodsi jam  $m'$ ,  $M'$  sint momenta inertiae partium egih, BPDQ penduli respectu axeos oscillationis  $mn$ ; erit  $m' + M'$  momentum inertiae totius penduli respectu ejusdem axeos (399 §.): quare, cum illius centrum oscillationis cum aliquo puncto  $z$  rectae  $AD$  debeat coincidere (552. 553. §.), et  $m + M$  sit massa,  $A\alpha$  vero distantia centri gravitatis penduli ab axe  $mn$ ; erit distantia centri oscillationis ab eodem axe per (556. §.)

$$Az = \frac{m' + M'}{A\alpha(m + M)} = \frac{m' + M'}{m \cdot A\gamma + M \cdot AC}.$$

3. De-

3. Determinatis ergo ponderibus  $m, M$  partium  $egih, BPDQ$  penduli, inventisque distantis  $A\gamma, AC$  centrorum gravitatis  $\gamma, C$  earundem partium ab axe oscillationis  $mn$ , quaerantur momenta inertiae  $m', M'$  illarum respectu hujus axeos: si enim summam horum momentorum divides per summam productorum ex ponderibus  $m, M$  in distantias respectivorum centrorum gravitatis  $\gamma, C$  ab axe  $mn$ ; dabit quotus distantiam centri oscillationis  $z$  ab eodem axe.

## 562. Corollarium 1.

Fig. 76. Sit datum pendulum compositum ex virga parallelepipedica  $AB$  (76. Fig.) longitudinis  $l$  crassitiei vero adeo parvae, ut illa respectu longitudinis evanescat, et ex globo  $BPDQ$  radii  $R=PC$ ; erit in (561. §.)

$$A\gamma = \frac{1}{2}l; AC = l + R \quad (217. 231. \S.);$$

$$m' = \frac{1}{3}ml^2 \text{ per } (449. \S.);$$

$$M' = \frac{1}{2}M(7R^2 + 10Rl + 5l^2) \text{ per } (428. \S.);$$

pro ponderibus  $m, M$  virgae  $AB$  et globi  $BPDQ$  erit, ergo distantia centri oscillationis  $z$  penduli  $ABPDQ$  ab axe oscillationis  $mn$

$$Az = \frac{m' + M'}{m \cdot A\gamma + M \cdot AC} = \frac{\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}M(7R^2 + 10Rl + 5l^2)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(l + R)};$$

$$\text{id est } Az = \frac{m \cdot \frac{1}{3}l^2 + M(\frac{7}{3}R^2 + 2Rl + l^2)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(l + R)}.$$

## 563. Corollarium 2.

Si autem etiam pondus  $m$  virgae  $AB$  sit tam parvum, ut illud respectu ponderis  $M$  globi  $BPDQ$  evanescat; poterit distantia centri oscillationis  $z$  penduli  $ABPDQ$  ab axe oscillationis  $mn$  poni (562. §.)

$$Az = \frac{l^2 + 2Rl + \frac{7}{3}R^2}{1 + R} = 1 + R + \frac{2R^2}{5(1 + R)}.$$

## 564. Corollarium. 3.

Fig. 77. Sit pars una  $egih$  penduli (77. Fig.) virga cylindrica longitudinis  $l=AB$ , et radii  $r$ ; pars altera  $BPDQ$  sit lens composita ex segmentis aequalibus  $BPD, BQD$  sphaerae radii  $R$ , cujus axes sint  $PQ=2b, BD=2a$ ; erit in (561. §.)

$$A\gamma = \frac{1}{2}l; \quad AC = l + a;$$

$$m' = \frac{1}{r^2} m (4l^2 + 3r^2) \text{ per (435. §.)};$$

$$M' = \frac{1}{r^6} M \left( 10(l+a)^2 + \frac{10a^4 + 5a^2b^2 + b^4}{3a^2 + b^2} \right) \text{ (430. §.)};$$

pro ponderibus  $m$ ,  $M$  ergo virgae cylindricae  $egih$ , et lentis  $BPDQ$  erit distantia centri oscillationis  $z$  penduli  $egihPDQ$  ab axe oscillationis  $mn$

$$Az = \frac{m \left( \frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{3}r^2 \right) + M \left( (l+a)^2 + \frac{a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{r^6}b^4}{3a^2 + b^2} \right)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(l+a)}.$$

#### 565. Corollarium 4.

Quodsi autem pondus  $m$  virgae cylindricae  $egih$  evanescat respectu ponderis  $M$  lentis  $BPDQ$ ; erit prope vera distantia centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis  $mn$  in (564. §.)

$$Az = l + a + \frac{a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{r^6}b^4}{(3a^2 + b^2)(l+a)}.$$

#### 566. Corollarium 5.

Segmenta sphaerica  $BPD$ ,  $BQD$  abibunt in duos semiglobos aequalis globum  $BPDQ$  constituentes, si axes lentis  $BD$ ,  $PQ$  inter se aequentur: pro  $a=b=R$  debet ergo ex (565. §.) prodire formula, quam jam in (563. §.) invenimus.

#### 567. Corollarium 6.

Pari ratione potest determinari distantia  $Az$  centri oscillationis  $z$  penduli  $egihPDQ$  ab axe oscillationis  $mn$ , si pars una  $egih$  sit virga cylindrica longitudinis  $l=AB$ , et radii  $r$ , pars altera autem  $BPDQ$  lens composita ex aequalibus segmentis  $BPD$ ,  $BQD$  sphaeroidis elliptici revolutione ellipseos circa axem conjugatum geniti, cujus axes sint  $PQ=2e$ ,  $BD=2c$ , pro ellipseos axe conjugato  $b$  et transverso  $a$ . Pro centrīs gravitatis  $\gamma$ ,  $C$  virgae et lentis, massis illarum  $m$ ,  $M$ , et momentis inertiae  $m'$ ,  $M'$  respectu axeos  $mn$ , debet enim esse

$$A\gamma = \frac{1}{2}l; \quad AC = l + c;$$

$$m' = \frac{1}{r^2} m (4l^2 + 3r^2) \text{ per (439. §.)}.$$

Porro pro  $x=e$  invenies per (426. §.) momentum inertiae segmenti BPD respectu axeos PC, cujus duplum dabit momentum inertiae totius lentis BPDQ respectu axeos PQ (399 §.), unde additione producti  $M \cdot AC^2 = M(1+c)^2$  reperietur momentum inertiae lentis respectu axeos oscillationis mn (406. §.), nimirum

$$M' = M \left( (1+c)^2 + \frac{a^2(10eb^2 - 15be^2 + 6e^3)}{10b^2(3b-2e)} \right).$$

Hinc per (561. §.) fiet

$$Az = \frac{m(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}r^2) + M \left( (1+c)^2 + \frac{a^2(eb^2 - \frac{3}{2}be^2 + \frac{3}{5}e^3) }{b^2(3b-2e)} \right)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(1+c)}.$$

#### 568. Corollarium 7.

Pro  $2e=PQ=b$ ,  $2c=BD=a$  abibit lens BPDQ in sphaeroidem ellipticum revolutione ellipseos circa axem conjugatum PQ genitum, pro quo casu erit itaque distantia centri oscillationis z ab axe oscillationis mn in (567. §.)

$$Az = \frac{m(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}r^2) + M(l^2 + al + \frac{7}{20}a^2)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(1 + \frac{1}{2}a)}.$$

#### 569. Corollarium 8.

Si vero pondus m virgae cylindricae egih respectu ponderis M lentis vel integri sphaeroidis elliptici BPDQ in (567. 568. §.) evanescat; erit

$$Az = 1+c + \frac{a^2(eb^2 - \frac{3}{2}be^2 + \frac{3}{5}e^3)}{b^2(3b-2e)(1+c)} \text{ in (567. §.);}$$

$$Az = 1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{10} \cdot \frac{a^2}{1 + \frac{1}{2}a} \text{ in (568. §.).}$$

#### 570. Problema.

Fig. 77. Si pendulum compositum sit ex virga tenuissima parallelepipeda vel cylindrica egih, et cono truncato BPQ, qui basi minore in B ita sit ei virgae annexus, ut illius axis BC cum virgae axe AB in eadem recta AC jaceat; invenire centrum oscillationis (77. Fig.).

Solutio.

Solutio.

1. Sit  $m$  pondus,  $l$  longitudo, et  $\gamma$  centrum gravitatis virgae egili, cum crassities illius evanescat respectu longitudinis, seu parallelepipeda illa fit, seu cylindrica, per hypothesim; poterit utroque casu illius momentum inertiae respectu axeos  $mn$  poni  $= \frac{1}{3} ml^2 = m^1$  (449. 435. §.); distantia autem centri gravitatis  $\gamma$  ab axe oscillationis erit  $A\gamma = \frac{1}{2} l$ .

2. Porro fit axis conii truncati  $BC = a$  et in hoc illius centrum gravitatis  $\alpha$ , cujus distantia a puncto  $B$ , pro radio  $r$  baseos minoris in  $B$ , et radio  $R$  baseos majoris in  $PQ$ , erit per (224. §.)  $B\alpha = \frac{3}{4} a \cdot \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^2}{(R^2 - r^2)(R - r)}$ . Hinc, si  $M$  fit massa ejusdem conii, et  $M^1$  momentum inertiae respectu axeos oscillationis  $mn$ , fiet ob (1) per (561. §.) distantia centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis

$$Az = \frac{m \cdot \frac{1}{3} l^2 + M^1}{m \cdot \frac{1}{2} l + M \left( \frac{3}{4} a \cdot \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^2}{(R^2 - r^2)(R - r)} + 1 \right)}$$

3. Inveniendum fit jam in (57. Fig.) momentum inertiae  $\mu$  conii truncati  $bdDB = M$  respectu diametri  $BD$  baseos majoris, pro illius axe  $Cc = x$ , et radiis  $CD = R$ ,  $cd = r$ : si  $k$  denotet illius momentum inertiae respectu plani  $BMDNB$ , et  $Z$  respectu axeos  $Cc$ ; erit per (434. §.)

$$\mu = k + \frac{1}{2} Z;$$

Verum pro angulo  $dDC = \phi$  erit  $r = cd = R - Dd = R - x \cot \phi$ : igitur fiet

$$M = \frac{1}{3} \pi (3R^2x - 3Rx^2 \cot \phi + x^3 \cot^2 \phi);$$

hinc per (431. §.)

$$\epsilon k = x^2 \epsilon M = \frac{1}{3} \pi (3R^2x^2 - 6Rx^3 \cot \phi + 3x^4 \cot^2 \phi) \epsilon x;$$

$$\text{et } k = \frac{\pi x^3}{3} (R^2 - \frac{3}{2} R x \cot \phi + \frac{3}{2} x^2 \cot^2 \phi) =$$

$$= \frac{\pi x^3}{30} (R^2 + 3Rr + 6r^2);$$

$$\text{seu } k = \frac{1}{10} M x^2 \frac{(R^2 + 3Rr + 6r^2)(R - r)}{R^3 - r^3}.$$

Et per (417. §.) est

$$\frac{1}{2} Z = \frac{1}{20} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

His itaque valoribus loco  $k$  et  $\frac{1}{2}Z$  in aequatione pro  $\mu$  substitutis inveniemus

$$\mu = \frac{1}{10} M \frac{3(R^5 - r^5) + 2x^2 R^2(R + 2r) + 6x^2 r^2(R - 2r)}{R^3 - r^3}.$$

Fig. 77.

4. Differentia quadratorum distantiarum  $A\alpha$ ,  $\alpha C$  centri gravitatis  $\alpha$  conii truncati  $BPQ$  (77. Fig.) ab axibus parallelis  $mn$ ,  $PQ$  est

$$\begin{aligned} A\alpha^2 - C\alpha^2 &= (l + B\alpha)^2 - (a - B\alpha)^2 = l^2 - a^2 + 2(l + a)B\alpha = \\ &= l^2 - a^2 + \frac{1}{2}a(l + a) \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} \text{ ob (2).} \end{aligned}$$

5. Quare pro  $x = a = BC$  dabit  $\mu$  in (3) momentum inertiae conii truncati  $BPQ$  respectu axes  $PQ$  coincidentis cum diametro illius baseos majoris; et si eidem momento addas productum ex massa seu pondere conii  $M$  in differentiam  $A\alpha^2 - C\alpha^2$  juxta (4) determinatam, obtinebis momentum inertiae  $M^1$  ejusdem conii respectu axes oscillationis  $mn$  (409. §.): hoc ergo valore loco  $M^1$  in (2) substituto inveniemus sequentem expressionem distantiae centri oscillationis ab axe oscillationis:

$$\begin{aligned} Az = & \frac{l}{m \frac{1}{2}l + M \left( 1 + a \frac{\frac{3}{8}k^4 + \frac{1}{4}r^4 - rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} \right)} \left[ m \cdot l^2 \right. \\ & + M \left( \frac{\frac{3}{20}(R^5 - r^5) + \frac{1}{10}a^2 R^2(R + 2r) + \frac{3}{10}a^2 r^2(R - 2r)}{R^3 - r^3} \right. \\ & \left. \left. + l^2 - a^2 + a(l + a) \frac{\frac{3}{2}R^4 + \frac{1}{2}r^4 - 2rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} \right) \right]. \end{aligned}$$

## 571. Corollarium I.

Conus truncatus  $BPQ$ , si radius  $r$  baseos minoris in  $B$  evanescat, abit in conum integrum axes  $a = BC$ : pro  $r = 0$  obtinebimus ergo ex (570. §) sequentem formulam pro distantia centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis  $mn$ , si una pars egih penduli sit virga tenuissima longitudinis  $l$  et ponderis  $m$ ; pars altera  $BPQ$  autem conus rectus axes  $a = BC$ , radii  $R$  baseos in  $PQ$ , et ponderis  $M$ .

$$Az = \frac{m \cdot \frac{1}{2}l^2 + M \left( \frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{2}a^2 + l \left( 1 - \frac{3}{2}a \right) \right)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M \left( \frac{3}{2}a + l \right)}.$$

## 572. Corollarium 2.

Si petatur distantia  $Az$  centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis  $mn$  pro pendulo ex virga tenuissima  $egih$  et corpore  $BPDQ$  composito, quod constet e duobus conis truncatis aequalibus  $BPQ$ ,  $DPQ$  basium majorum in  $PQ$  congruentium; erit, ut in (570. §. 1. n.)  $Az = \frac{1}{2}l$ ,  $m^2 = m \frac{1}{2}l^2$  pro longitudine  $l$ , et pondere  $m$  virgae  $egih$ : quod si ergo  $BD = 2a$  sit axis corporis  $BPDQ$ , in cujus medio puncto  $C$  jacet ejus centrum gravitatis,  $M$  vero denotet illius pondus, et  $M'$  momentum inertiae respectu axeos oscillationis  $mn$ ; erit per (561. §.)

$$Az = \frac{m \frac{1}{2}l^2 + M^2}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(1+a)}$$

Si jam  $R$  sit communis radius basium majorum in  $PQ$ , et  $r$  radius minorum basium in  $B$ ,  $D$  utriusque conii truncati  $BPQ$ ,  $DPQ$ ; invenies momentum inertiae utriusque conii seorsim respectu diametri in  $PQ$ , si in (570. §. 3. n.) ponas  $x = a$ , et  $\frac{1}{2}M$  loco  $M$ , cujus duplum dabit momentum inertiae totius corporis  $BPDQ$  respectu diametri  $PQ$  parallelae axi oscillationis  $mn$ , unde additione producti  $M \cdot AC^2 = M(1+a)^2$  obtinebitur momentum inertiae  $M'$  ejusdem corporis respectu axeos oscillationis  $mn$  (406. §.). Hoc ergo valore sumpto pro  $M'$  in praecedente formula inveniemus

$$Az = \frac{1}{m \frac{1}{2}l + M(1+a)} \left[ m \frac{1}{2}l^2 + M(1+a)^2 + \frac{3(R^5 - r^5) + 2a^2R^2(R+2r) + 6a^2r^2(R-2r)}{20(K^3 - r^3)} \right]$$

## 573. Corollarium 3.

Pro  $r = 0$  abibit corpus  $BPDQ$  compositum ex duobus conis truncatis aequalibus  $BPQ$ ,  $DPQ$  in corpus constans ex duobus conis integris aequalibus axium  $BC = CD = a$ , et communis radii  $R$  basium in  $PQ$  congruentium: pro  $r = 0$  inveniemus ergo ex (572. §.) distantiam centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis  $mn$  pro pendulo ex ejusmodi corpore  $BPDQ$  et virga tenuissima  $egih$  composito, nimirum

$$Az = \frac{m \frac{1}{2}l^2 + M \left( \frac{1}{20} (3R^2 + 2a^2) + (1+a)^2 \right)}{m \frac{1}{2}l + M(1+a)}$$

## 574. Corollarium 4.

Si cono truncato BPQ in (570. §.) substituas cylindrum axeos  $a=BC$ , et radii R, cum illius centrum gravitatis  $\alpha$  coincidat cum medio puncto axeos BC (219. §.); erit  $A\alpha = l + \frac{1}{2}a$ , hinc ob (570. §. 1. n.) per (561. §.)

$$Az = \frac{m \cdot \frac{1}{2}l^2 + M'}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(1 + \frac{1}{2}a)}$$

Cum autem momentum inertiae cylindri BPQ respectu diametri PQ illius baseos sit  $\frac{1}{12}M(4a^2 + 3R^2)$  per (435. §.); erit  $M' = \frac{1}{12}M(4a^2 + 3R^2) + M(A\alpha^2 - \alpha C^2)$ , feu

$$M' = M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{3}{4}R^2 + (l + \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2)$$

$$= M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{3}{4}R^2 + l(1 + a))$$

momentum inertiae ejusdem cylindri respectu axeos oscillationis  $mn$  (409. §.): quare, si hunc valorem loco  $M'$  in praecedenti formula substituas, invenies distantiam centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis  $mn$  pro pendulo ex virga tenuissima egih longitudinis  $l$  et ponderis  $m$ , et cylindro BPQ axeos  $a=BC$ , radii R et ponderis M composito, nimirum

$$Az = \frac{m \frac{1}{2}l^2 + M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{3}{4}R^2 + l(1 + a))}{m \frac{1}{2}l + M(1 + \frac{1}{2}a)}$$

## 575. Problema.

*Dato numero N oscillationum, quas pendulum compositum sub elongatione  $\Phi$  a situ naturali intra certum tempus T absolvat, invenire longitudinem L penduli simplicis sub eadem elongatione  $\Phi$ , vel in quocunque arcu exiguo ad singula minuta secunda oscillantis.*

## Solutio.

1. Si pendulum compositum intra T minuta secunda oscillationes numero N absolvat; debet illud singulas oscillationes intra tempus  $\frac{T}{N}$  absolvere.

2. Quodsi ergo D sit distantia centri oscillationis dati penduli compositi ab axe oscillationis; erit D longitudo penduli simplicis dato composito

posito ifochroni, quod idcirco sub elongatione  $\varphi$  a fitu naturali quamvis oscillationem intra tempus  $= \frac{T}{N}$  perficiet ob (1) per (552. 548. §.) Adeoque, denotante  $L$  longitudinem penduli simplicis sub pari elongatione a fitu naturali ad singula minuta secunda oscillantis, debet esse per (541. §.)

$$L:D = 1^2 : \frac{T^2}{N^2}; \text{ hinc } L = D \frac{N^2}{T^2}.$$

3. Porro pro cognita elongatione  $\varphi$  penduli simplicis a fitu naturali, quod longitudinem  $D$  habeat, et tempore  $= \frac{T}{N}$  singulas oscillationes perficiat (2), debet esse per (535. §.) proxime

$$\frac{T}{N} = \pi \left( 1 + \frac{b}{8D} \right) \sqrt{\frac{D}{2g}} : \text{ igitur}$$

$$\pi \sqrt{\frac{D}{2g}} = \frac{T}{N \left( 1 + \frac{b}{8D} \right)} \text{ pro } b = D \sin^2 \varphi.$$

Hinc autem, quia  $\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}$  est tempus, intra quod pendulum simplex longitudinis  $D$  singulas oscillationes in quocunque arcu exiguo debet absolvere (536. §.); fiet pro longitudine  $L$  penduli simplicis in quibuslibet arcubus exiguis ad singula minuta secunda oscillantis, per (541. §.)

$$L:D = 1^2 : \frac{T^2}{N^2 \left( 1 + \frac{b}{8D} \right)^2}; \text{ hinc } L = D \frac{N^2 \left( 1 + \frac{b}{8D} \right)^2}{T^2};$$

$$\text{feu } L = \frac{N^2 (b + 8D)^2}{64 D T^2}.$$

### 576. Corollarium 1.

Quamobrem, si determinanda sit in quapiam terrae regione longitudo  $L$  penduli simplicis, quod in arcubus exiguis oscillans singulas oscillationes minutis secundis perficiat, sumatur tale pendulum compositum, pro quo distantiam  $D$  centri oscillationis ab axe oscillationis calculo definire liceat; tum observetur ope exquisiti chronometri tempus  $T$  in minutis

nutis secundis, intra quod illud sub determinata elongatione  $\Phi$  a situ naturali determinatum aliquem numerum  $N$  oscillationum absolvat: per haec enim reperietur quaesita longitudo

$$L = \frac{N^2(b + 8D)^2}{64D^2} \text{ ob (575. §.)}$$

Ubi autem elongatio  $\Phi$  penduli compositi a situ naturali valde parva fuerit, ita ut  $b = D \sin \Phi$  respectu  $8D$  fere evanescat; poterit poni

$$L = \frac{N^2(8D)^2}{64D^2} = D \frac{N^2}{4}$$

### Exemplum.

*Clav. Liesganig* factis peculiari diligentia observationibus comperit, pendulum ex filo tenuissimo AB (77. Fig.) et duplicato cono truncato BPDQ compositum, quale in (572. §.) consideravimus, Viennae 87861 oscillationes  $= N$  intra 86409,4 minuta secunda  $= n$  absolvisse. Erat autem, omnibus dimensionibus ad mensuras viennenses relatis, longitudo fili,  $l = AB = 431.941$  lin.; pondus fili,  $m = \frac{1}{3}$  gran.; semiaxis corporis BPDQ,  $a = BC = 5.922$  lin.; radius communis basium majorum conorum truncatorum BPQ, DPQ in PQ cohaerentium,  $R = PC = 4,26$  lin.; radius communis basium minorum in B, D,  $r = 2,28$  lin.; et pondus totius corporis BPDQ,  $M = 540$  gran.

Quare, si hos valores in (572. §.) substituas, invenies distantiam  $D = Az$  centri oscillationis  $z$  ab axe oscillationis  $m$  aequalem longitudini penduli simplicis pendulo composito *Liesganigiano* isochroni, nimirum  $D = 437.903$  lin. Hinc autem determinabis porro longitudinem  $L$  penduli simplicis sub pari elongatione a situ naturali ad singula minuta secunda oscillantis, nimirum

$$L = 437,903 \frac{(87861)^2}{(86409,4)^2}$$

Id est  $L = 452,739$  lin. vienn.  $= 440,562$  lin. parif.

### 577. Corollarium 2.

Inventa ope penduli compositi longitudine  $L$  penduli simplicis in arcibus exiguis ad singula minuta secunda oscillantis (576. §.), potest eo ipso etiam

etiam altitudo  $g$  determinari, per quam corpora gravia de quiete libere labentia intra primum minutum secundum decidunt, ob  $g = \frac{1}{2} \pi^2 L$  per (537. §.).

## Exemplum.

In (576. §.) invenimus  $L = 440,562$  lin. parif. pro longitudine penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis: assumpta ergo ratione radii ad femiperipheriam  $1 : \pi = 1 : 3,1415$  etc., quo fiat  $\pi = 3,1415$  etc. erit

$$g = \frac{1}{2} \pi^2 \cdot 440,562 = \pi^2 \cdot 220,281.$$

Quia vero est pes rhenanus ad parisinum  $= 13913 : 14400$ , si  $g$  ad pedem rhenanum referatur; debet esse

$$13913 : 14400 = \pi^2 \cdot 220,281 : g$$

$$\text{hinc } g = \frac{\pi^2 \cdot 220,281 \cdot 14400}{13913};$$

et adhibitis logarithmis fiet

$$\log g = S - \log 13913$$

$$\text{pro } S = 2 \log \pi + \log 220,281 + \log 14400.$$

Iam autem est

$$\log \pi = 0,4971499$$

$$2 \log \pi = 0,9942998$$

$$\log 220,281 = 2,3429771$$

$$\log 14400 = 4,1583625$$

$$\text{igitur } S = 7,4956394$$

$$\text{Porro } \log 13913 = 4,1434208$$

$$\text{igitur } \log g = 3,3522186$$

Quare, cum huic logarithmo proxime respondeat numerus 2250,187; debet poni  $g = 2250,187$  lin. rhen.  $= 15,6262$  ped. rhen., qui numerus ab illo, quem in (323. §.) calculi gratia proposuimus,  $\frac{1}{5000}$  pedis rhenani differt.

## 578. Corollarium 3.

Observationes enim a diversis Academicis in variis terrae regionibus ope pendulorum compositorum factae evicerunt, haud eandem esse ubique

longitudinem penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis (576. §.), sed eam continuo decrefcere, si locus observationis continuo magis a polo versus aequatorem removeatur: unde necessario fequitur, nec efficaciam gravitatis in corpora terreftria eandem effe in omnibus terrae regionibus, fed illam continuo fieri minorem, prout terrae regio magis a polo versus aequatorem removetur (540. §.).

## Scholion.

Vienna, ubi *Liesganigius* experimentum cepit (576. §.) jacet fub latitudine  $= 48^{\circ}.13'$ : fub hac itaque latitudine, ut vidimus, eft longitudo penduli simplicis ad fingula minuta secunda oscillantis  $= 440,562$  lin. parif. *Mairanus* vero Parifis fub latitudine  $= 48^{\circ}.50'$  invenit longitudinem talis penduli  $= 440,57$  lin. parif.: in hac ergo terrae regione eft efficacia vis gravitatis in corpora terreftria nonnihil major quam Viennae. Et fane pro hac penduli simplicis longitudine habebimus, ut in (577. §.), altitudine  $g$  ad pedem rhenanum relata,

$$g = \frac{\pi^2 \cdot 220,285,14400}{13913};$$

et adhibitis logarithmis

$$\log g = S - \log 13913$$

$$\text{pro } S = 2 \log \pi + \log 220,285 + \log 14400.$$

Quamobrem erit

$$2 \log \pi = 0,9942998$$

$$\log 220,285 = 2,3429850$$

$$\log 14400 = 4,1583625$$

$$S = 7,4956473$$

$$\log 13913 = 4,1434208$$

$$\log g = 3,3522265$$

Confequenter eft hic  $g = 2250,227$  lin. rhen.  $= 15,6265$  ped. rhen., loco  $15,6262$  ped. rhen. in (577. §.).

## 579. Corollarium 4.

In (575. §.) fit  $T = N\pi \left(1 + \frac{b}{8D}\right) \sqrt{\frac{D}{2g}}$  pro  $b = D \sin \nu \phi$ . Si ergo ignoretur tempus  $T$ , intra quod pendulum compositum numerum  $N$  oscilla-

oscillationum sub data elongatione  $\phi$  a situ naturali abfolvat; poterit illud proxime ope hujus formulae determinari, si antea quaeratur distantia  $D$  centri oscillationis ejusdem penduli ab axe oscillationis. Ubi autem elongatio  $\phi$  tam parva fuerit, ut  $b = D \sin \nu \phi$  prope evanescat; poterit idem tempus ope formulae  $T = N \pi \sqrt{\frac{D}{2g}}$  quaeri, aut, adhibitis logarithmis, adhibitoque pede rhenano pro mensura linearum  $D, g$ , ope formulae  $\log T = \log N + \frac{1}{2} \log ND + 0,2503032$ .

Exemplo fit experimentum *Liesganigianum*. Pendulum illius abfolverat  $87861 = N$  oscillationes intra tempus  $T$ ; distantia vero centri oscillationis ab axe oscillationis erat in (576. §.)  $D = 437,903$  lin. vienn.  $= 3,041$  ped. vienn. Quare, ob rationem pedis viennensis ad rhenanum  $= 14013 : 13913$ , erit

$$D = \frac{3,041, 14013}{13913} \text{ ped. rhen.}$$

$$\text{Est autem } \log 3,041 = 0,4830164;$$

$$\log 14013 = 4,1465311;$$

$$\underline{4,6295475};$$

$$\log 13913 = 4,1434208;$$

$$\text{hinc } \log D = 0,4861267;$$

$$\text{et } \frac{1}{2} \log D = 0,2430633.$$

$$\text{Porro est } \log N = 4,9437961;$$

$$\text{hinc } \log N + \frac{1}{2} \log D = 5,1868594.$$

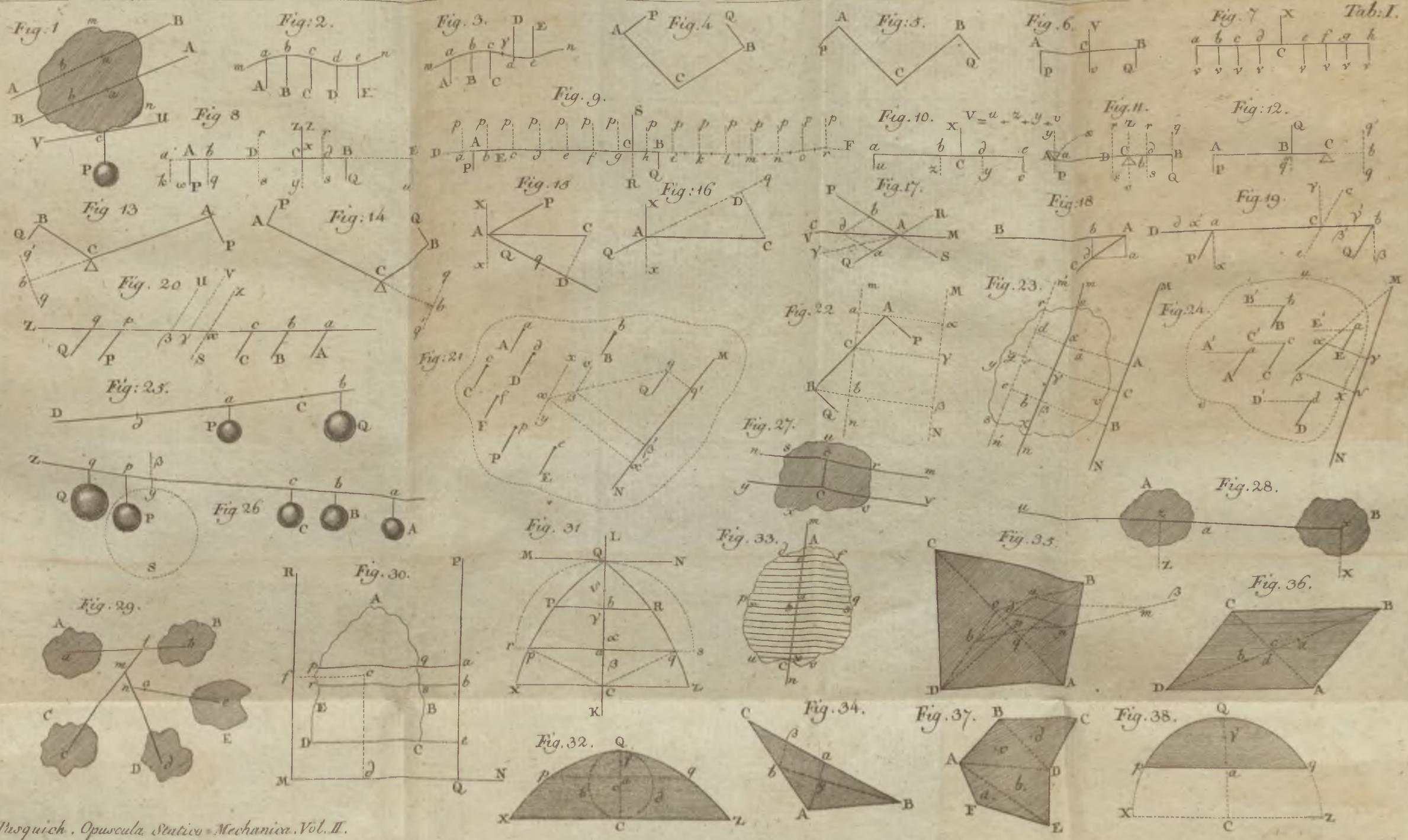
$$\underline{0,2503032}$$

$$\log T = 4,9365562.$$

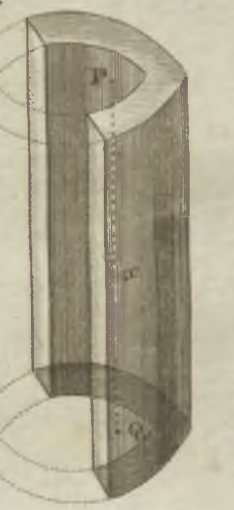
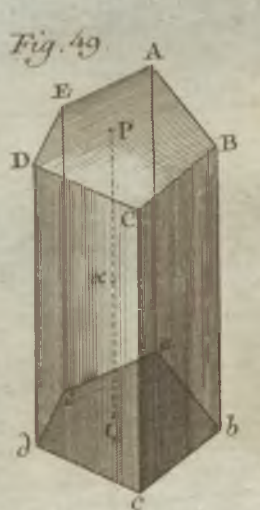
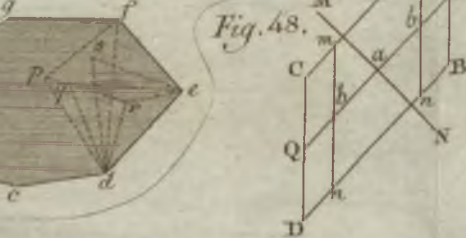
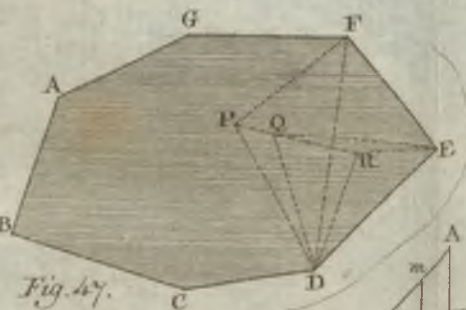
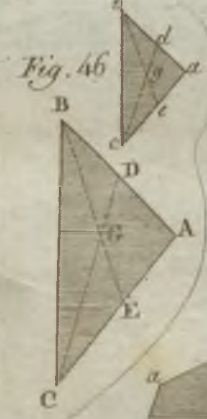
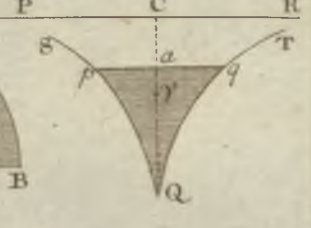
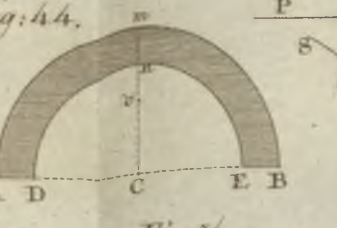
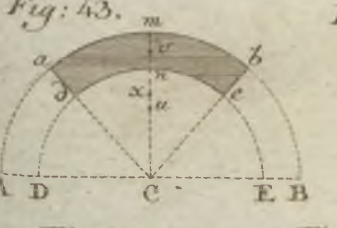
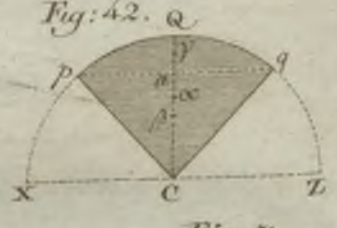
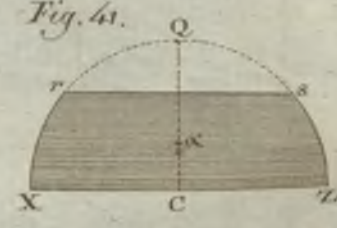
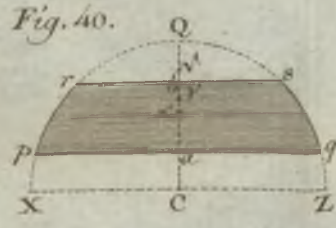
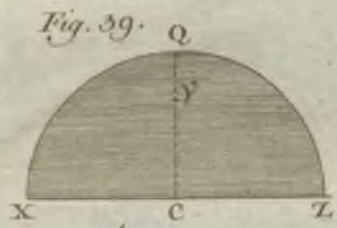
Quamobrem est  $T = 86,408,44$  min. sec., quod tempus cum observatione *Liesganigiana* (576. §.) quam optime consentit.

LIPSIÆ

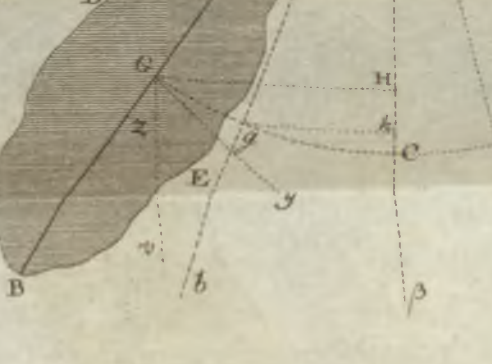
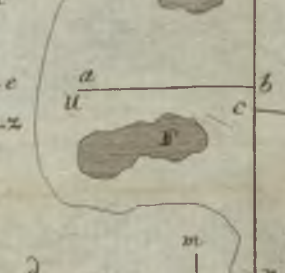
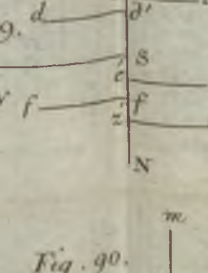
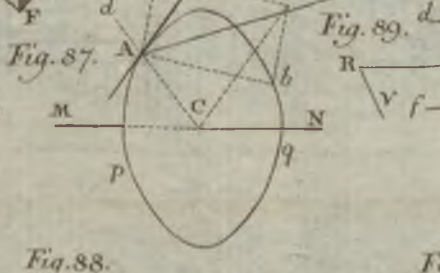
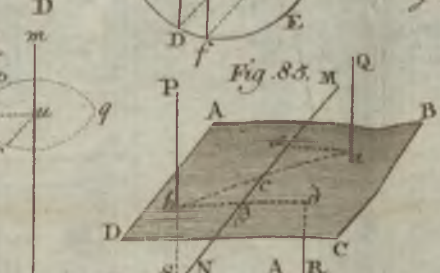
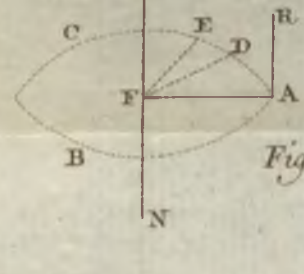
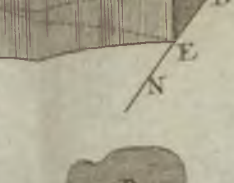
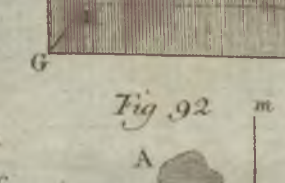
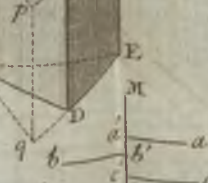
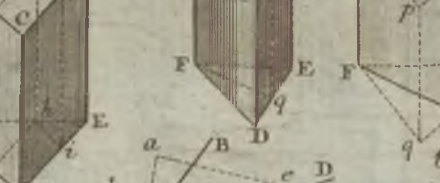
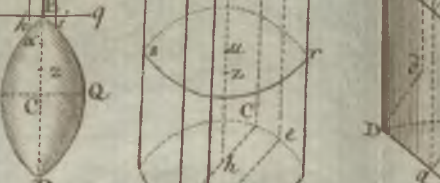
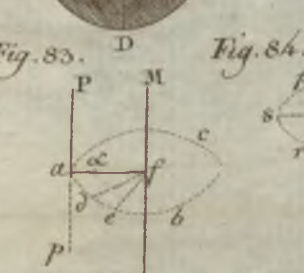
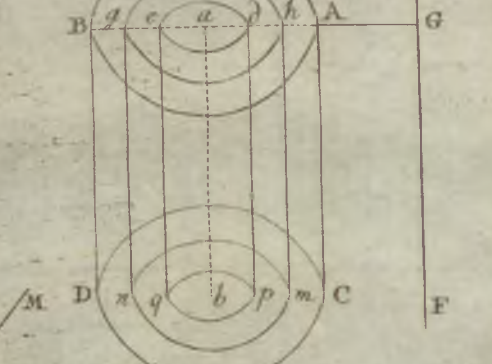
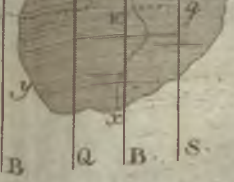
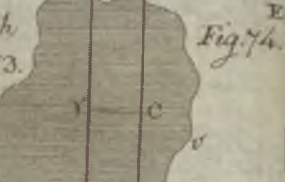
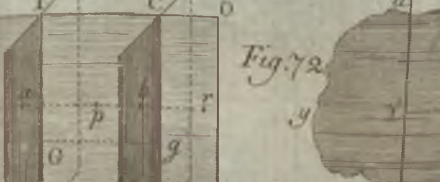
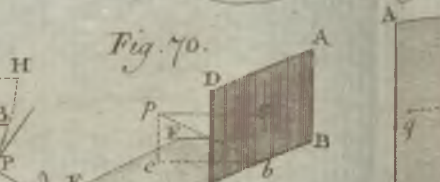
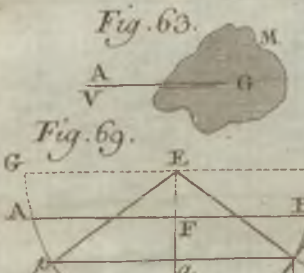
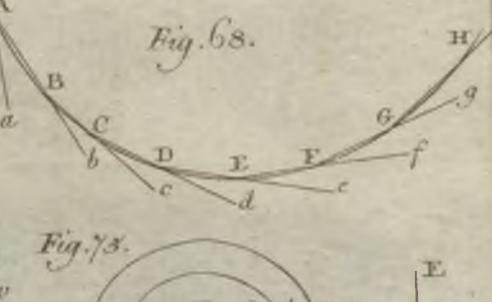
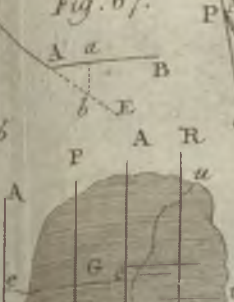
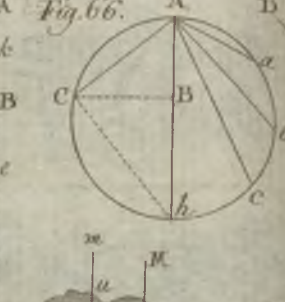
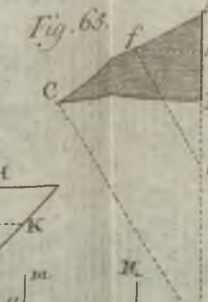
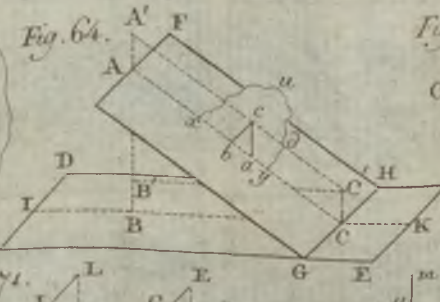
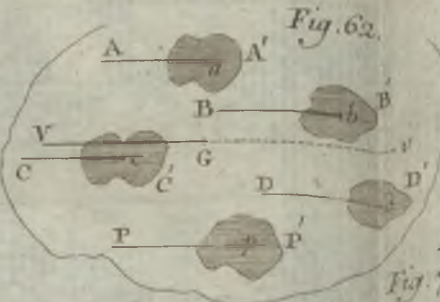
EX TYPOGRAPHIA DÜRRIÆ.





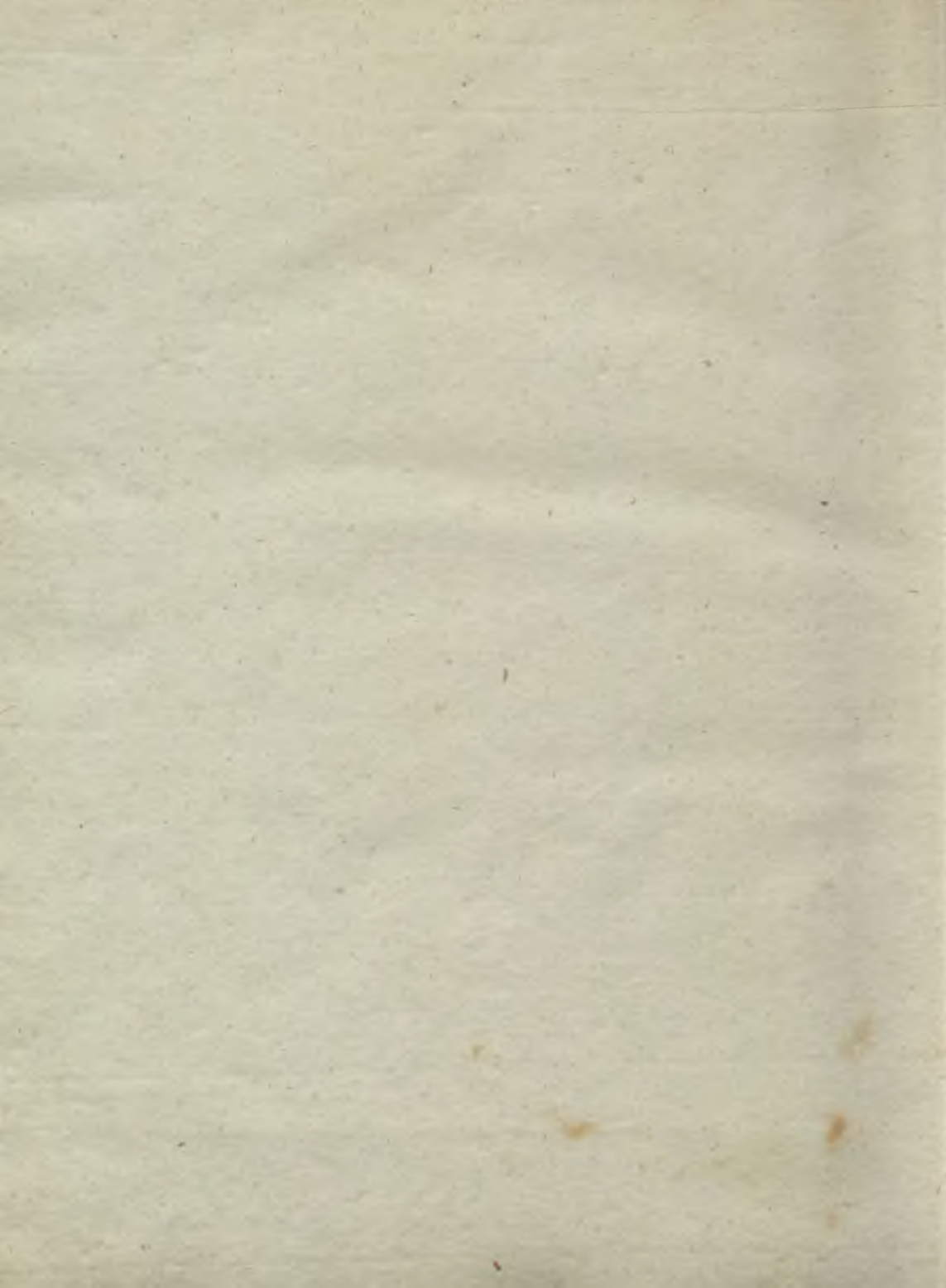










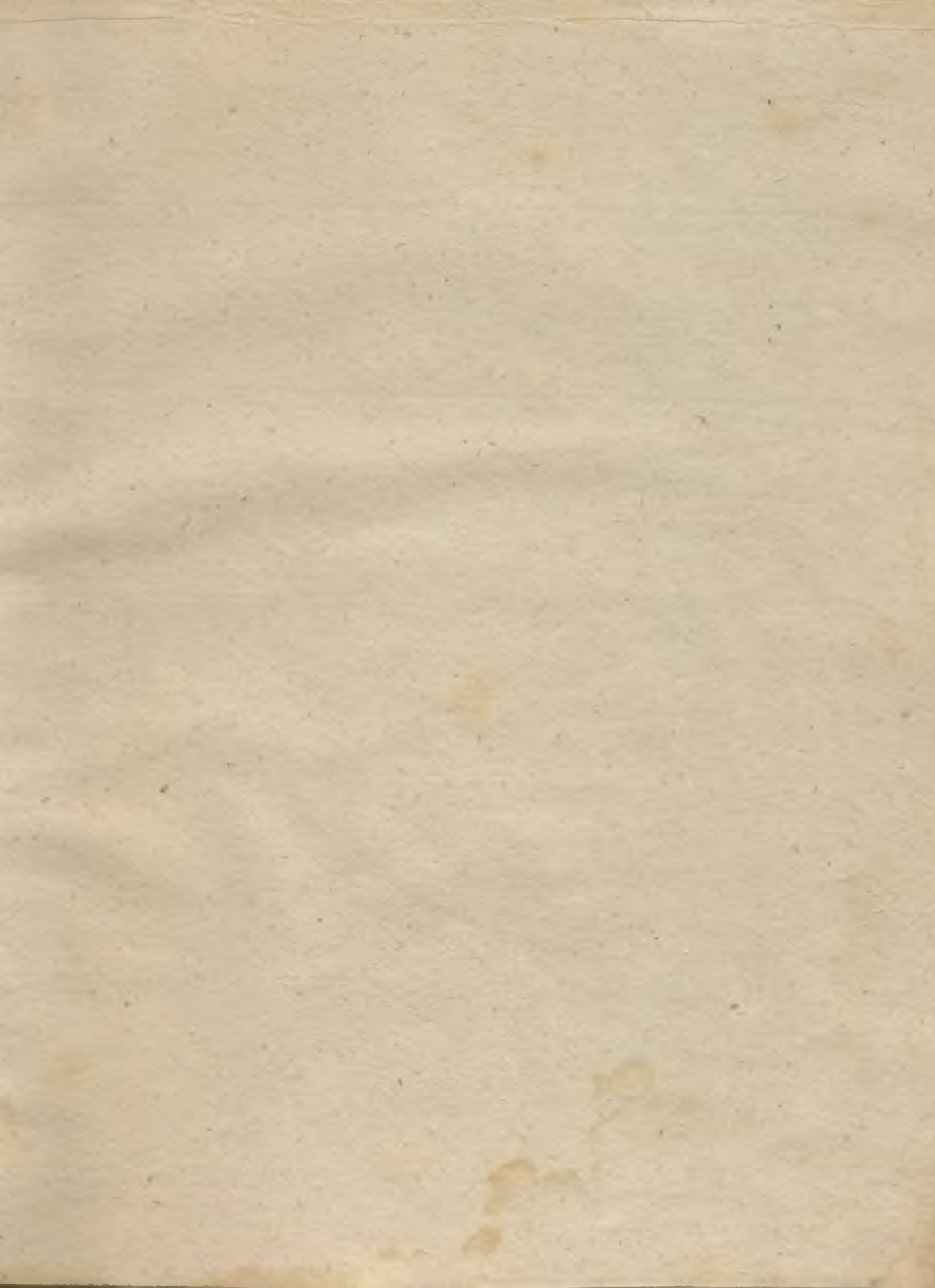












22. 40

0

---

5. 45.

