CVRSVS MATHEMATICI

PARS II.

Jo. Danielis Freyſeyſſen
Comparavi Schemnicii 1802.

ELEMENTA
ANALYSEOS
FINITORVM.

IOANNIS ANDREAE
SEGNERI

SERENISS. AC POTENTISS. REGI A
CONSIL. INTIM. MATHEMAT. ET PHILOS. NAT.
IN ACADEM. FRIDERIC. PROFESS. PRIMARII
ACADEM. SCIENT. IMPERIAL. PETROP. SOCIET.
REG. LOND. ET ACAD. SCIENT. REGIAE
BEROL. SODALIS.

HALAE MAGDEBVRGICAE
PROSTAT IN OFFICINA RENGERIANA.
MDCCLVIII.

PRÆFATIO.

LECTORI SALVTEM.

Tardius, quam volebam, altera hæc Elementorum Matheſeos pars prodit; non aliqua mea negligentia, ſed quod per aliquot menſes in alio labore ſudandum fuit, cuius quin fructum viderem, grave, quod interea coortum eſt, bellum prohibuit. Quod in toto opere mihi propoſitum eſt, per hanc quoque, ad Analyſin finitorum, Introductionem, vt adſequerer, ſum conatus: vt ſcilicet Matheſeos ſtudioſis, iis inprimis, qui me duce proficere cupiunt, in manus poſſem tradere libellum mole parvum, ex quo, labore quam minimo, poſſent diſcere, quæ ſcitu neceſſaria ſunt ad altiora contendentibus. Quare ante omnia, quantum potui, clare expoſui notiones, quæ in his primæ ſunt, ac, quemadmodum cum arithmeticis cohæreant atque geometricis, oſtendi: veritus ſcilicet, ne, ſi hac in parte negligentior eſſem, per ipſam illam diſciplinam, cuius fructus primarius is eſſe exiſtimatur, quod iudicandi facultatem, tum quoque, cum diſcitur, augeat, corrumperem potius divinam illam ingenii vim, apud lectores meos, quam perficerem. Ab his initiis tyronem ſenſim deduco ad reliqua, per problemata ita ſelecta, vt quodlibet novum aliquod doceret, adderetque Analyſeos præceptis, quæ ex præcedentibus deduci potuere, vel iis certe lumen aliquod affunderet. Qua in re ſi voti compos factus ſum, fieri non poteſt, quin lector, aut auditor potius excitatus, qui ex hoc libello Elementa primum haurit, ea ſe per ſe ipſum reperire, atque non nova diſcere, verum eorum, quæ didicit, recordari ſibi videatur. Namque regulis exempla, quorum conſideratio ad regulas illas poſſit ducere, atque vocabulorum finitionibus generalibus, ſingulares rerum, quæ per ea denotantur, imagines plerumque videbit præmiſſas. Materiei ſelectum ita habendum putavi, vt, ſi aſſequi poſſem, neque deficeret aliquod eorum, quæ Matheſeos ſtudioſo, qualem mihi formandum propoſui, tradi debent, neque abundarent quantumvis egregia, ſed tamen ab eo ſcopo aliena.

Fuit autem propoſitum, eos, qui ſatis ab Arithmetica atque Geometria inſtructi ſunt, ad ſolutionem manu ducere omnium Problematum, quæ redigi poſſunt ad æquationes veri nominis, quarum ſcilicet membra plane atque perfecte ſunt æqualia. Hac enim re æquationes reliquas ab iis, quas Fluxionum methodi ſuppeditant, & calculus potiſſimum Differentialis, ego quidem diſtinguo, in quibus veram æqualitatem non concipio, ſed tendentiam tantum quandam ad æqualitatem iſtam, quam, non ante attingunt, quam vbi, quæ vocantur Differentialia, penitus evaneſcunt. Verum hac de re in Infinitorum Analyſi diſtinctius agetur. Problema autem ad æquationem redactum, cum perfecte ſolutum cenſeri non poſſit, niſi huius radices detegantur; equidem æquationes in claſſes ſtudioſe diſtinxi, quæque ad earum naturam perſpiciendam facere poſſunt, quam potui, accurate expoſui; deinde methodos vniverſales, omnes omnium æquationum radices reperiendi dedi varias, cum arithmeticas, tum geometricas: parti-

particulares autem ſolvendi regulas, præter eam, qua ſolvuntur æquationes quadraticæ, omnes ſepoſui, vtpote quas eos quoque, qui tradunt, parvi admodum atque reſtricti vſus eſſe, video monere. Geometricæ æquationum conſtructiones per lineas curvas abſolvuntur, eæ certe, in quibus is difficultatis gradus eſt, vt per Elementarem Geometriam ſolvi non poſſint: eſtque vna ex pulcerrimis æquationis dotibus, quod linearum ductus menti non minus clare exhibeat, quam, per figuras in plano deſcriptas, patent oculo. Non ergo curvarum conſideratio penitus hic omitti potuit. Verum ea tantum attuli, quæ de iis prima ſunt dicenda; modum, quo ex æquatione colligitur lineæ figura; rationem curvam quamvis in plano deſcribendi; & quæ ſunt huiusmodi alia, quibus, æquationes geometrice conſtructurus, carere nemo poteſt. Theoria curvarum per infinitorum methodos vehementer facilitatur,

litatur, quare illis expoſitis, meo quidem iudicio, tradetur rectius, quantum ſcopus exigere videbitur, completa. Hæc omnia, quamvis totam tractationem ad quantitates finitas potiſſimum reſtrinxerint, non potui tamen prorſus intactum relinquere illud genus æquationum, in quo non plane exactam æqualitatem poni dixi, verum tendentiam tantum ad æqualitatem, vel infinite magni & infinite parvi notionibus penitus carere. Sed hæc clare expoſita, tantum abeſt vt negotium ſtudioſo faceſſere poſſint, vt potius eum ſequentibus iam nunc ſint præparatura.

Qui in libris non penitus hoſpes eſt, ac vel obiter novit, ad quod faſtigium, cum tota Matheſis, tum ars potiſſimum Analytica hodie evecta ſit, facile colliget, quæ hic traduntur, me inventorem non expectaſſe. Nihil aliud egi, quam vt ex libris, qui ad manus ſunt, colligerem, quæ ſcopo convenire videbantur, eaque in corpus aptum & vndi-

vndique cohærens compingerem. Quare ſi quis hic legerit, quæ eadem deprehenduntur in monumentis CARTESII, NEWTONI, HALLEYI, BERNOVLLIORVM, EVLERI, WOLFII, CRAMERI, HAVSENII, REYNEAV, CLAIRAVT, aliorumque primæ, vel ſecundæ etiam & ſequioris notæ, ſcriptorum, vt ad eos auctores referat, non intercedo; quamvis ſint eorum aliqua, quæ ante mihi meditanti ſuccurrerunt, quam eadem in libris editis offenderem. Atque id ipſum prohibet, quo minus adſeverare audeam, omnino novi aliquid in his elementis contineri. Sunt quædam non ex libris hauſta, ſed ſtudio eruta meo, de æquationum inprimis natura: quæ & amicis nova viſa ſunt. Verum omnes libros legere, de his rebus præcipientes, per temporis rationem non potui, & deſes admodum lector ſum. Quis autem dixerit, an inſit aliquid vel non inſit in libro, quem non evolvit?

Erunt fortaſſe, qui aliqua eorum, quæ ita tracto, quantumvis vtilia, nimis tamen difficilia iudicent, quam vt tyroni debeant proponi. Et ſunt ſane, ad quæ penitus perſpicienda aliquo ingenii conatu opus eſt. Verum ea ſi neceſſaria ſunt ad perfectiorem doctrinam, quantumvis difficilia ſint, omitti tamen non potuerunt. Et quamvis terminum, ad quem Analyſeos ſtudioſos vellem deducere, ipſe ponere potuerim; conſultum tamen non putavi, vt eum nimis anguſtum facerem. Pauci inter noſtros ſunt, qui ex profeſſo, quod dicitur, in Matheſin incumbant. Illis autem, qui ſatis ingenio valent, vt perſpiciant, eius ſtudium cum reliquis neceſſario coniungendum eſſe illis, qui ad aliquem eruditionis ſolidioris gradum adſpirant, raro facultas eſt, plures ex hoc genere libros comparandi. Adhæreſcunt fere illi, quod a doctore traditum acceperunt, diſciplinæ compendio; quod ſi mancum ſit,

ſit, parum ordinatum, forte & oppletum erroribus, neſcio quam miſeram diſciplinæ ideam concipiunt; vltra quam tamen ingenium humanum nihil poſſe, quia ſcilicet præſtantius illis nihil occurrit, vt ſibi perſuadeant, admodum procliues ſunt: maxime vbi, vniverſale illud ſuum gazophylacium, & ab aliis ornari atque celebrari vident. Horum ergo intereſt, librum de rebus Analyticis tractantem, quem forte ſolum poſſident, nimis tenuem non eſſe, & aliqua ſaltim continere, quæ, reliquis etiam perſpectis, mirari debeant, vnde ſublimior quædam diſciplinæ idea illis naſcatur, per quem moneantur, multa multoque maiora, quæ ab aliis repetenda ſint, ex iis, quæ perceperunt, principiis conſequi. Præparandus ad optimorum lectionem per Inſtitutiones animus iuvenilis eſt: quod admodum inepte fit, ſi, poſtquam vix prima principia, tanquam diſtans aliquod lumen, obſcure perſpexit, a ductore deſeratur.

Si quis tamen tardioris fuerit ingenii, vel ſi pleniorem Analyſeos cognitionem non quæſiverit, facile difficultatis remedium eſt, & per ipſum libellum. Capiet aliquem fructum, ac aliquam Analyſeos notionem hauriet, qui vel primam tantum libri ſectionem attente perlegerit. Si addiderit ſecundam, multis, quæ per calculos Algebraicos declarantur a ſcriptoribus, perſpiciendis aptus erit; per quartam autem & quintam ſectionem eam ſibi, in ipſa Analyſi, facultatem comparabit, quæ plerisque vſibus vitæ poſſit ſufficere, Arithmeticæ certe cognitionem multum ſit perfectura. Sunt & difficiliores propoſitiones plerumque in extrema ſectionum coniectæ, vt, ſi forte aliquis apud eas hæſerit, id eum a lectione ſequentium deterrere non prorſus debeat. Et ſæpe per repetitam lectionem clara fiunt, quæ prior obſcura reliquit. Verum prælectionibus potiſſimum

tiſſimum deſtinatus libellus eſt, non privatæ lectioni.

Dixi quæ propoſita fuerint librum ſcribenti; me omnia adſecutum eſſe, quæ præſtare cupiebam, promittere non auſim. Non fui adeo felix, vt totum viderem, antequam typis excuderetur. Occurrent ergo fortaſſis aliquæ repetitiones, inde natæ, quod facultas præcedentia inſpiciendi non ſemper fuit. Sed hæ, ſi ſcriptori cavendæ ſunt, lectorem tamen offendere, ſi parcæ ſint, non poſſunt. Forte &, ſi relegere licuiſſet omnia, ab illo, quo primum ſcripta ſunt, tempore aliquo interpoſito, clarior nonnullis locis evaſiſſet ſermo, vel comptior: forte & ordo propoſitionum aliquibus locis mutatus, aliquid ad faciliorem comprehenſionem conferre potuiſſet. Sed vrgebat editionem, & promiſſum meum, & aliqua expectatio auditorum. Quare horum, & ſi quæ his graviora ſunt, veniam a lectore expecto, eo potisſimum, qui

qui & rerum, quas tracto, varietatem, & temporis, quo ſcribo, conditionem penſitaverit.

Typographus, vt quam minime erraret, cavere ſum conatus. Verum dum potisſimum ad calculos attendo, relicta hinc inde video in ſermone vitia, non quæ ſenſum turbare poſſunt, ſed quæ offendere debent grammaticum. Hæc autem lectoris, rebus potius quam verbis intenti, oculis non minus ſe ſubductura ſpero, quam ſe noſtris, ob eandem rationem, ſubduxerunt. Calculi errrorem, ſi quem in aliquo folio relictum vidi, in ſequenti corrigere, non ſum veritus.

Habes, Lector, de quibus præmonendus videbare. Ipſum libellum ſi cum aliquo Tuo fructu legeris, vehementer gaudebo. Vale. Dabam in Regia Fridericiana d. XXI. Septembris 1757.

ELEMENTORVM ANALYSEOS

SECTIO I.

DE ADDITIONE ET SVBTRACTIONE.

PROBLEMA I.

§. 1.

Navis ab inſula oceani verſus orientem proficiſcitur per 47 *milliaria. Inde vento adverſo in occaſum reiicitur milliaribus* 23. *Progreditur iterum in orientem per milliaria* 59, *deinde regreditur in occaſum per milliaria* 135. *Di-*

cendum eſt, quot milliaribus navis ab inſula receſſerit, & verſus quam partem?

PRÆPARATIO.

§. 2. Vniverſa via, quam navis confecit, eſt milliarium 264, quæ reperitur omnibus iis, quæ dantur, in ſummam collectis, nulla habita ratione directionis eius, qua vel in orientem navigatur, vel in occidentem. Sed hæc via diſtantiæ, quæ quæritur, æqualis non eſt.

§. 3. In ortum proceſſit navis 106 in vniverſum milliaribus; in occaſum autem milliaria 158 confecit. Sed neque hi numeri diſtantiam quæſitam exhibent; vtpote quæ neque ab abſoluta quantitate omnium viarum, nec ab abſoluta quantitate earum, quibus vel in ortum navis profecta eſt vel in occaſum, ſola pendet: verum a quantitatibus iſtis, atque a viarum directionibus, coniunctim.

§. 4. Scilicet, poſtquam navis 47 milliaribus in ortum progreſſa eſt, regreſſu in occaſum per 23 milliaria non modo non aucta eſt eius ab inſula diſtantia, verum etiam imminuta, ſic vt iam diſtantia ea tantum ſit 24 milliarium, 23 milliaribus reliquis, quæ in via verſus orientem confecta inſunt, reditu deſtructis. Hæc 24*m* diſtantia, via 59*m* in ortum denuo

denuo emenſa, crevit in milliaria 83, quæ vero, reditu in occaſum per $135m$, non modo tota in nihilum converſa, verum & nova renata eſt diſtantia navis verſus occaſum. Atque hæc ea eſt, quam quærimus.

Solvtio.

§. 5. Diſtinguantur viæ in ortum a viis in occaſum, quibuscunque ſignis, vt his $+$, $-$ quibus ea vis tribuatur, vt ſimul notent operationes, per quas, ex viis a navi confectis, eius ab inſula diſtantia elicitur. Horum prius præfigatur numeris vias in ortum deſignantibus, alterum iis, qui exprimunt vias in occaſum; vel poſterius viis in ortum, prius viis in occaſum: nihil enim intereſt vtrum horum vſurpetur. Diſtantia quæſita dicatur x. Signo ergo $=$ nunc quoque æqualitatem notante, erit

$$x = +47m - 23m + 59m - 135m$$

ſed $+47m - 23m = +24m$, & $+24m + 59m = +83m$, atque $+83m - 135m = -52m$. Eſt ergo

$$x = -52m$$

atque navis per omnes hos curſus ab inſula verſus occaſum receſſit milliaribus 52.

Scholion.

§. 6. Quæſtio adeo nihil difficultatis habet, vt ſolvi poſſit a quolibet. Verum methodi, quibus in difficilioribus procedendum eſt, per exempla faciliora optime docentur.

§. 7. Quæ autem in ſolutione neceſſaria ſunt, ab arbitrariis, atque in eam tantum rem excogitatis, vt, quæcunque in quæſtionem ingrediantur, menti per ſymbola ſimplicia quam diſtinctiſſime præſententur, ſeparare admodum facile eſt; neque difficilius, quænam horum nullo confuſionis metu mutare liceat, perſpicitur.

§. 8. Sic *m*, nota milliaris, omitti poterat. Cum enim alia in numeris, quicunque quæſtionem ingrediuntur, vnitas non occurrat; vt ea ex memoria excidat, verendum non fuit.

§. 9. Solet & ſignum + initio non ſcribi: adeoque illo loco ſcriptum eſſe, ſemper intelligi debet. His vſurpatis, ſolutio abſolvi poteſt aliquo compendio hunc in modum

$$x = 47 - 23 + 59 - 135$$

ſed $47 - 23 = 24$, & $24 + 59 = 83$ atque $83 - 135 = -52$. Ergo

$$x = -52.$$

§. 10. Sed neque opus eſt, vt is ordo teneatur in vniendis numeris, quem hic ſecuti ſumus. Quocunque ordine vniantur, dummodo ſemper in ſummam colligantur, quorum idem ſignum eſt, ſive id + fuerit, ſive —, eorum

rum autem, quorum diverſa ſunt ſigna, capiatur differentia, eaque afficiatur ſigno numeri maioris, idem prodire neceſſe eſt. Vt ſi in exemplo propoſito addantur $47+59$, prodit 106, ſumma autem horum $-23-135$ eſt -158. Numerorum ergo 106 & 158 differentia cum ſit 52, erit $x=-52$. Hinc autem ſequitur, neque ordinem, quo data ac quæſita primum ſcribuntur, quidquam, quod magni ad ſolutionem momenti ſit, adferre.

§. 11. Cæterum infinita ſunt quantitatum genera, quarum altera refertur ad alteram, quemadmodum progreſſus refertur ad regreſſum, aſcenſus ad deſcenſum, vel motus quicunque verſus aliquam partem, ad motum verſus partem oppoſitam. Tales ſunt, poſſeſſiones, debita; accepta, expenſa; gravitas, vis ſurſum directa; aqua in vas influens, aqua effluens, & aliæ plurimæ, quarum quædam in ſequentibus clare exponentur. Harum duæ quælibet, quæ ita ad ſe invicem referuntur, cum eiusdem ſint generis, poſſunt vtique, ſi abſolute ſpectentur inter ſe æquales eſſe vel vtcunque inæquales: poſſunt etiam in ſummam colligi, qualibet datarum quantitatum maiorem, quemadmodum tres cum ſeptem ſolidis decem conficiunt, ſive in numerato ſint, ſive debeantur. Verum cum conditione illa, qua ſibi opponunponuntur, ſpectatæ quantitates, ſi ſimul novam aliquam quantitatem conficere intelligantur, hæc ſemper minor eſt, quam maior datarum, & ſæpe nihilum. Sic qui poſſidet 150, debet autem 60, ſuos dicere tantum 90 poteſt. Qui autem 150 poſſidet, atque 230 debet, alienos habet 80. Qui 150 poſſidet, ac totidem debet, nec ſui habet quidquam, nec alieni. Scilicet quantitatum ita oppoſitarum, atque cum hac oppoſitione ſpectatarum, minor, ſi cum maiori ad conſtituendam novam quantitatem concurrat, ſemper huius partem, cui abſolute ſumptæ, ipſa quoque abſolute ſumpta, æqualis eſt, deſtruit, relicto reliquo.

§. 12. Solent autem quantitatum ita oppoſitarum aliæ *Poſitivæ* dici, aliæ *Negativæ*, illisque ſignum $+$, his $-$, præfigi. Sed quænam in quæſtione quavis propoſita poſitivæ habeantur, quæ negativæ, parum intereſt. Plerumque tamen quæſtio ita concipitur, vt ipſa nos circa hæc ambigere non ſinat. Sic cui propoſitum eſt, æris alieni, quod penes ſe eſt, computum inire, quæ debet, pro poſitivis habebit, quæ autem poſſidet, pro negativis; atque calculo ſecundum leges expoſitas ſubducto, ſiquidem prodierit $x = a$, concludet, eam quantitatem, quam notat a, ſe ita debere, vt ſolvendo non ſit. Sin produxerit $x = -a$, id ei indicio erit,

erit, ſe non modo nihil debere, verum etiam, ſi ſolverit quæcunque debet, ſuperfuturam rem, quam notat a. Verum cui propoſitum eſt ea computare, quæ vere ſua ſunt, pro poſitivis habebit, quæ poſſidet; pro negativis, quæ debet: ſique eodem calculo produxerit $x = a$, colliget, quantitatem ſubſtantiæ, quam notat a, ſuam eſſe; ſin $x = -a$ confecerit, concludet eandem quantitatem a ſe ita debere, vt ſolvendo non ſit.

§. 13. Solet autem ſignum +, ſi vocabulo denotandum ſit, *Plus* dici, eique oppoſitum, *Minus*. Illud etiam pro ſigno additionis venditatur, hoc pro ſigno ſubtractionis; ſed minus accurate. Neque enim, ſi ex diverſis quantitatibus per ſigna + & — diſcretis, nova colligenda ſit quantitas, quænam illarum addendæ ſint, vel quarum ſit ſumenda differentia, ex alterutro ſignorum ſolo perſpici poteſt: ſed capienda eſt ſumma illarum, quæ eodem ſigno adfectæ ſunt, ſive id + fuerit, ſive —, differentia autem earum, quæ adfectæ ſunt ſignis diverſis: ſemperque harum quantitatum minor ſubtrahi debet a maiori, ſive + præſcriptum habuerit, ſive —; ſemper differentiæ ſignum idem eſt, cum ſigno quantitatis maioris.

§. 14. Cæterum, hæc ſigna + & — intelligimus, quando ſigna nominantur ſimpliciter;

quamvis & pluribus aliis characteribus vtamur, quibus vel ipſæ quantitates indicantur, vel id exprimitur, quomodo earum aliquæ ab aliis pendeant.

DEFINITIO I.

§. 15. *Æquatio* dicitur expreſſio æqualitatis inter duo quanta, vel quantitatum complexus, per ſymbola hactenus expoſita, vel alia quæcunque; deſignatos. Vt, ſi ſcribatur

$$A - B = C + D - E,$$

erit hæc æquatio, quidquid notaverint litteræ, & quomodocunque quantitatum quæ hic litteris ſingularibus A, B, C, D, E notantur, quævis expreſſa fuerit.

DEFINITIO II.

§. 16. *Membrum* æquationis eſt quantitas, vel quantitatum complexus, quem alteri quantitati, vel quantitatum complexui æqualem eſſe, æquatio innuit. *Terminus* autem, quælibet quantitatum, ex quibus membra componuntur, a reliquis per ſignum + vel — diſtincta.

Scholion.

§. 17. Æquationis cuiuſlibet duo membra ſunt, prius, quod hic §. 15. notatur per $A - B$, alterum, $C + D - E$. Illud ad vnam characteris $=$ partem ſcribitur, hoc ad alteram. Ad

quam

quam partem quodlibet membrum ſcribatur, nihil intereſt, namque æquatio

$$C + D - E = A - B$$

idem perfecte notat, quod prior.

§. 18. Magnitudo autem cuiuslibet membri æquationis poteſt eſſe quælibet, & conditio. Sic ſi in æquatione propoſita fuerit $A = B$, erit $A - B$ nihilum, quod ita ſignatur $A - B = 0$, & hinc quoque $C + D - E = 0$. Si quantitas A maior fuerit quantitate B, erit eius membrum $A - B$ affirmativum, contra ſi B maior fuerit quam A, idem membrum negativum erit.

§. 19. Termini in quolibet æquationis membro ineſſe poſſunt, quocunque numero, quemadmodum in membro priore æquationis initio propoſitæ termini duo inſunt, A & $- B$, in altero tres C, D & $- E$. Poſſunt etiam duo pluresve eiusdem æquationis termini vniti pro vno haberi, vel vnus in plures dirimi. Vt ſi ponatur $C + D = F$, æquatio §. 15. fit $A - B = F - E$, cuius quatuor tantum ſunt termini, qui ad quinque redeunt, ſi loco F poſtliminio ſcribatur $C + D$.

§. 20. Solent autem duo pluresve termini, qui ſpectantur tanquam vnus, includi in ( ), tumque ſignum, quodcunque illud fuerit, parentheſi huic, quæ pro copula eſt, præſcriptum, ad terminos ita vnitos referri, ac ſi is vnus foret. Vt $a + (b - c)$ notat differentiam quantitatum b & c addendam eſſe quantitati a: ſed $a - (b - c)$, capiendam eſſe differentiam quantitatis denotatæ per a & differentiæ quantitatum $b - c$, ſecundum ea, quæ mox clarius exponentur; & quæ ſunt huius modi, quorum exempla in ſequentibus crebra occurrent. Loco parentheſeos etiam lineola adhibetur, ſignis quantitatum vniendarum inducta, hoc modo $\overline{a - b}$, ſed non ſine typothetæ moleſtia.

PROBLEMA II.

§. 21. *Navis ab inſula in occaſum proficiſcitur 92 leucis; inde in ortum navigans abſolvit milliaria 72. Hinc iterum in occaſum excurrit per milliaria 32, atque ab hoc termino in ortum remeat 105 leucis. Converſo denuo curſu in occidentem abſolvit ſtadia 320, atque hinc in ortum redit leucis 27. Dicendum eſt quantum, omni hac navigatione perfecta, ab inſula diſtet, & verſus quam partem?*

PRÆPARATIO.

§. 22. Problema eo ſolo differt a præcedente, quod hic viæ per diverſas menſuras exhibeantur: quæ ſi per communem aliquam men-

menſuram darentur, ſtadium videlicet, vel paſſum vel pedem, nihil in eo novi foret. Ad eiusmodi numeros, datos reducere, facile eſt ei, qui novit, quot in ſtadio, in leuca, in milliari pedes vel paſſus inſint. Sed nobis hoc in poteſtate non eſſe, vel, ob quamcunque rationem aliam, reductionem negligi ponimus.

SOLVTIO.

§. 23. Deſignet m milliare, l leucam, s ſtadium, x autem diſtantiam quæſitam. Via in ortum pro poſitiva habeatur, & hinc via in occaſum pro negativa. Erit

$$x = 72m - 92l - 32m + 150l - 320s + 27l$$

Sed $72m - 32m = 40m$, & $150l - 92l = 58l$ & $58l + 27l = 85l$. Ergo

$$x = 40m + 85l - 320s.$$

Scholion.

§. 24. Problema ſolutum debet cenſeri, etiamſi ne id quidem repertum ſit, verſus quam partem cadat diſtantia navis ab inſula. Eſt enim, quod vlterius progreſſi non ſimus, ea ſola cauſſa, quod rationes $s : l$ atque $s : m$ ignotæ ponantur; quæ ſi dentur, omnia plane determinare facile eſt. Si enim milliare 32 continere ponatur ſtadia, leuca vero ſtadia complecti 21, cum ſit $m = 32s$ & $l = 21s$, his numeris

ris in locum litterarum in æquatione ſurrogatis, ſit

$$x = 40 \times 32s + 85 \times 21s - 320s$$

ſigno × numerorum, inter quos collocatum eſt, multiplicationem imperante; quæ ſi inſtituatur, prodit

$$x = 1280s + 1785s - 320s;$$

& hinc

$$x = 2745s.$$

Tot ergo ſtadiis navis ab inſula in ortum receſſit.

§. 25. Poterat & ſtadium pro vnitate ſumi, atque poni $s = 1$; $m = 32$, $l = 21$, quo facto calculus paullo evaſiſſet brevior, iſte:

$$x = 40 \times 32 + 85 \times 21 - 320,$$

ſive $x = 1280 + 1785 - 320,$

hinc $x = 2745.$

Atque hoc qualicunque compendio in caſibus ſimilibus vti ſemper licet.

§. 26. Cæterum ex hoc exemplo primus patet vſus litterarum in eiusmodi calculis, qui in eo conſiſtit, vt diſtinguantur diverſa, quæ autem diverſa non ſunt, eorum tanto promptius perſpiciatur convenientia. Quem in finem quantitates æquales iisdem litteris ſignandæ ſunt; inæquales autem, vel quarum æqualitatem non perſpicimus, aut non ſupponimus ob quamcunque rationem, diverſis. Quænam

eæ

eæ litteræ ſint, vel quæ ſigna alia, parum intereſt.

§. 27. Quod autem ad multiplicationem attinet, hæc non ſemper eo ſigno indicatur, quo hic vſi ſumus. Sæpe eius loco punctum adhibetur, poſitum vt in hoc exemplo: $5.7=35$. Litteris autem ſi numeri exprimantur, in ſe mutuo ducendi, hæ plerumque nulla omnino nota interpoſita deinceps ſcribuntur, vt ab vel ba factum notet ex a & b numeris, aa factum ex a in a ducto, vel quadratum numeri a. Sic & abc vel bac vel cba factum notat, quod prodit numerum a multiplicando per b, & quod ita producitur, ab, per c, vel quocunque alio ordine aliquem numerorum a, b, c ducendo in alium, & quod ita efficitur, multiplicando in tertium. *Arith.* §. 94. Non aliter explicanda ſunt $5a$, $7ab$, $12abc$. Solent enim notæ numerorum, ſi inter factores occurrant, reliquis, qui per litteras denotantur, præſcribi.

§. 28. Eodem modo aab notat id, quod fit quadrato numeri a ducto in b. Et aaa deſignat cubum numeri a. Neque aliter $abcd$, $aabc$, $abbc$, $aaccc$, $aabbbc$, & quæ ſunt huius modi alia, explicantur. Sed $a\times(b-c)$ vel $a.(b-c)$ aut $a(b-c)$ notat factum, cuius factores ſunt a & differentia $(b-c)$. Et $a\times(b+c)$ vel $a.(b+c)$ aut $a(b+c)$ factum,

cuius

cuius factores ſunt a & ſumma $b+c$, & ita in aliis huiusmodi.

§. 29. Hinc vero ſequitur, ſi factum dividendum fuerit per aliquem eius factorem, vel per aliquos, quotum fore factum ex factoribus reliquis. Sic ab ſi dividatur per a, quotus eſt b, ſin per b dividatur ab, quotus eſt a. Sed $abcd$ ſi dividatur per ac, quotus eſt bd, ſi per cd dividatur, quotus eſt ab, ſi vero dividatur per acd, quotus prodit b. Semper factores illi, per quos factum dividendum eſt, deleti, quotum relinquunt.

§. 30. Vnitas ſemper intelligi poteſt, inter factores cuiuscunque facti, etiamſi ſcribi non ſoleat, eſtque $ab = 1ab$; $abc = 1abc$, & ita in reliquis. Hoc obſervato ex dictis deducitur, quod aliunde notum eſt, numero quocunque per ſe ipſum diviſo, vnitatem produci.

§. 31. Porro facta, quæ oriuntur, ſi numerus aliquis a in ſe ipſum ducatur, quod ita productum eſt aa denuo per eundem numerum multiplicetur, isque labor, quoties velis, repetatur, ſemper eundem vſurpando numerum: cum ita ſignari poſſint aaa, $aaaa$, $aaaaa$, ſolent compendii atque facilioris comprehenſionis gratia *numeri Indices* adhiberi ſic, vt

pro *aa* ſcribatur a^2
aaa . . . . a^3
aaaa . . . . a^4
aaaaa . . . . a^5

& ita porro. Numeri, qui pro indice eſt, vnitates tot ſunt, quoties eadem littera repetitur in facto; ſolentque indices iſti litteræ ad dextram partem ſuperne adiungi.

§. 32. Si loco litteræ ſit aliqua notarum, quibus numeros determinatos exprimimus, idem vſurpari poteſt, atque loco 7.7 ſcribi 7^2, loco 7.7.7 vero 7^3, & ſic porro, vt 7^2 denotet quadratum numeri 7, qui eſt 49, & 7^3 eius cubum 343.

§. 33. Quare, ſi a^3 multiplicandus ſit per a^2, productus notabitur per a^5; eſt enim $a^3 \times a^2 = aaa \times aa, = aaaaa$, idem quod a^5. Eodem modo in omnibus eiusmodi caſibus procedetur, ſi litteræ, ad quos indices referuntur, vel notæ numerorum, eædem fuerint. Addentur exponentes, fietque ſumma exponens facti. Sic $7^5 \times 7^3 = 7^8$, & generatim $a^m \times a^n = a^{m+n}$, quoscunque numeros rationales integros notaverint m & n.

§. 34. Hinc autem viciſſim ſequitur, ſi a^5 dividatur per a^2, quotum fore a^3; ſi a^7 dividatur per a^3, quotum fore a^4, & ſi a^3 dividatur

per

per a^2 proditurum a. Generatim ſcilicet tot vnitatibus multandus eſt index dividendi, quot vnitates index diviſoris continet, vt quoti index fiat differentia indicum dividendi & diviſoris. Si a^{m+n} dividendus ſit per a^n, quotus notabitur per a^m.

§. 35. Si his modis diviſio quantitatis per litteras denotatæ inſtitui non poſſit, nihil reſtat, quam vt ea ſolum indicetur; quod fieri ſolet dividendo diviſorem eo modo ſubiiciendo, quo fracti denominator numeratori ſubiicitur. Vt ſi a numerus dividendus ſit per b, quotus notabitur hoc modo $\frac{a}{b}$: atque, ſi ſumma numerorum a & b dividenda ſit per c, quotus ita ſignabitur: $\frac{a+b}{c}$. Aliquando etiam dividendo diviſor in eadem linea adiungetur, duobus interpoſitis punctis, hoc modo $a:b$, vel $(aa-ab):c$. Sed hoc rarius.

§. 36. Vtrovis modo quotus exprimatur, ſi dividendo cum diviſore aliquis factor communis fuerit, eo vtrinque deleto, quotus exprimetur ſimplicius, atque pro $\frac{abc}{ce}$ ſcribetur $\frac{ab}{e}$,

$\frac{ab}{e}$, pro $\frac{a^3b^2c}{abe}$ ponetur $\frac{a^2bc}{e}$, pro $\frac{6a^2b^3}{3ac}$ vero $\frac{2ab^3}{c}$, & pro $\frac{8a^2bc}{6abe}$ vel $\frac{2.4aabc}{2.3abe}$ iſte $\frac{4ac}{3e}$.

§. 37. Cæterum quotus quilibet per modum numeri fracti ſcriptus, ipſe quoque vt factus ex fractis aliis conſiderari poteſt, idque multis modis. Fractus $\frac{4a^2b}{3ce}$ ſolvi ita poteſt vt ſit $\frac{4}{3}\times\frac{a^2b}{ce}$, vel $\frac{4a^2}{c}\times\frac{b}{3e}$, vel $\frac{4}{3}\times\frac{aa}{c}\times\frac{b}{e}$, vel $4aa\times\frac{b}{3ce}$, & pluribus aliis modis, maxime ſi & in numeratorem & in denominatorem novos aliquos factores inferre velis, atque pro eo, qui initio ſumptus fuit $\frac{4aab}{3ce}$, ſcribere verbi gratia $\frac{4aabmn}{3cemn}$. Semper enim numeri, in quos fractus datus ita ſoluitur, in ſe invicem ducti, illum reſtituent. *Arith.* §. 96. Quod niſi fiat, id ipſum indicio eſt, non recte ſolutum eſſe.

§. 38. Si facti cuiuscunque ſignandus ſit quadratus, quilibet factorum, qui in eo occurrunt, bis ponendus, vel quod eodem redit, eius index duplicandus erit. Multiplicato enim *abc* in *abc* fit *aabbcc* vel $a^2b^2c^2$, & in vltima expreſſione duplicati ſunt indices, qui in *abc* intelligi debent vnitates eſſe, quæ neque hic ſcribi ſolent. Sed a^3b^2c in ſe ipſum ducto, fit $a^3a^3b^2b^2cc$, id eſt $a^6b^4c^2$. Et ſi $\frac{a^2b}{c}$ in $\frac{a^2b}{c}$ multiplicetur, quadratus prodit $\frac{a^4b^2}{c^2}$.

§. 39. Eodem modo patet, ſi facti alicuius cubus capiendus ſit, triplicandos fore indices omnium eius factorum. Si enim factor *abc* multiplicetur in quadratum ſuum *aabbcc* fit *aaabbbccc*, ſive $a^3b^3c^3$. Sed a^3b^2c in quadratum ſuum $a^6b^4c^2$ ducto, cubus prodit $a^9b^6c^3$. Idem & ad reliquas huius generis multiplicationes extendere facile eſt.

§. 40. Ergo viciſſim cuiuscunque facti radix quadratica facile ſiſtetur, ſiquidem indices, quicunque in eo occurrunt, per ^{2} dividi poſſint; & radix cubica, ſi iidem indices dividi poſſint per numerum ^{3}. Sic radix quadratica ex $a^2b^2c^2$ elicitur hæc *abc*, & ex $a^6b^4c^2$ iſta a^3b^2c, atque ex $\frac{a^4b^2}{c^2}$ prodit $\frac{a^2b}{c}$. Sed ex $a^3b^3c^3$ radix cubica *abc* extrahitur eodem modo, nec aliter ex cubo $a^9b^6c^3$ radix a^3b^2c prodit.

§. 41. Vbi hoc modo radix exhiberi non poteſt, propterea, quod numeri, per quos indices dividendi erant, hos non metiuntur: radicem poſtulari, hoc ſigno $\surd$, notis numerorum vel quantitatum præſcripto, indicatur, nudo quidem, ſi radix ſit quadratica; ſed cum numero 3 vel alio inſcripto, ſi radix cubica ſit, vel hac quoque ſuperior. Hoc modo: $\surd 2$, $\surd a$, $\surd ab$, $\surd(ab + bb)$ ſi radix quæratur quadratica; vel $\sqrt[3]{}5$, $\sqrt[3]{}72$, $\sqrt[3]{}a$, $\sqrt[3]{}ab$, $\sqrt[3]{}(a^3a^2b)$ ſi radix cubica deſideretur, & ſic in reliquis. Sed hæc quidem in poſterum maiori cura retractanda erunt.

PROBLEMA III.

§. 42. *Navis ab inſula provecta, abſolvit primo die viam* a *in orientem. Altera die pariter in orientem navigavit, ſed quantitas viæ ignoratur. Tertia die in occidentem reiicitur per ſpatium* b, *quod poſtquam abſolvit, eſt in conſpectu inſulæ, e qua colligit, ſe a priore in occidentem receſſiſſe intervallo* c. *Quæritur via ſecundæ diei?*

PRÆPARATIO.

§. 43. Navis per omnes curſus ſuos, ab inſula, a qua primum digreſſa eſt, in occaſum remota eſt intervallo c, quod e viis illis trium dierum elicere facile foret, ſi hæ omnes daren-

darentur. Si enim via ſecundæ diei dicatur x, tracteturque tanquam data, ac quia in orientem directa eſt, reliquæ etiam viæ in orientem habeantur pro poſitivis, ac pro negativis illæ, quæ in occaſum directæ ſunt, fit

$$a+x-b=-c.$$

Nunc quia non c ex reliquis quæritur, ſed x, æquatio quæſitum exhibere non poteſt, niſi modus detur, omnia, quæ præter x in priori æquationis membro inſunt, transferendi in membrum alterum. Sed in hoc parum difficultatis eſt.

SOLVTIO.

§. 44. Sumpta æquatione,

$$a+x-b=-c$$

formetur alia ex terminis a, b, qui in alterum æquationis membrum transferendi ſunt, ſignis inverſis hunc in modum

$$b-a=b-a.$$

Huius æquationis membra, membris illius iungantur, vt fiat

$$a+x-b+b-a=b-a-c$$

quia ergo, quæ præter x in primo æquationis membro inſunt, ſeſe deſtruunt:

$$\text{fit } x=b-a-c.$$

Scholion.

§. 45. Problema ſolutum cenſetur, etiamſi non ipſa quantitas x detecta ſit, ſed modus tantum

tum hanc ex datis eliciendi; quia quæſiti x inventio expedita admodum eſt, ſi b, a & c dentur, poſtquam detecta eſt formula laborem dirigens. Sit $b = 47$, $a = 19$, $c = 13$, erit $x = 47 - 19 - 13 = 15$. Sed hæc diſtinctius conſiderandi ſæpe recurret occaſio.

§. 46. Alius iam vſus patet eius rei, quod quantitates deſignentur per litteras, tanquam ſpecies, quod ſcilicet ea re breuiter & quam clariſſime exponatur quantitatum, circa quas quæſtio occupatur, connexio, atque aliarum ab aliis dependentia. Sic æquatio reperta

$$x = b - a - c$$

indicat, viam quæſitam ita pendere a via in occaſum b, a via in ortum a, atque ab intervallo inter inſulas c, vt relinquatur, ſumma duorum a & c a via b ſubtracta; atque hinc b maiorem eſſe debere ſumma reliquorum, ſiquidem omnia ita ſeſe habere debeant, quemadmodum in problemate proponuntur. Qua re ſane comprehenſio mirum in modum iuvatur, efficiturque vt nullo fere labore perſpiciamus, quæ ſi vocabulis exprimenda forent, vel patientiſſimum fatigarent.

§. 47. Ipſa vero huius quæſtionis ſolutio ſequentem in modum peracta eſt. Diſtincta primum ſunt data a quæſitis, eo quod data prioribus alphabethi litteris ſignata ſint, quæſitum autem aliqua ex vltimis. Deinde nullo inter data & quæſitum diſcrimine facto, ex datis a, b & quæſito x compoſita eſt quantitas, $a+x-b$, quantitati datæ $-c$ æqualis. Quæ ita orta eſt æquatio viam monſtravit, cognita ab ignoto ſeparandi: qua quidem ſeparatione problema ſolutum eſt.

§. 48. Separatio autem hæc cognitorum a quæſito, ſola eorum translatione ex vna æquationis parte in alteram hic peracta eſt; quæ translatio, cum novæ æquationis eo modo formatæ, quo hic vſi ſumus, adpoſitione abſolvi ſemper poſſit, facilius etiam perficitur, ſi quodlibet membrum, quod in alteram æquationis partem transferendum eſt, in ea ſcribatur cum ſigno illi, quo in priore adfectum fuit, contrario. Vt ſi in vna æquationis parte ſit $+a$, eius loco in altera ſcribatur $-a$, & ſi ibi fuerit $-a$, hic ponatur $+a$. Quem expeditum transferendi modum vbique locum habere, qui ad ſolutionem attenderit, facile perſpiciet.

§. 49. Verum & ea æquationum coniunctio, quam hic adhibuimus, expedita ſatis eſt, & ſæpe commode adhibetur. Dicuntur autem membra æquationum ita iunctarum addita eſſe, vel alterum ab altero ſubtractum: quorum vocabulorum ſenſus diſtinctius declarandus eſt.

DEFI-

DEFINITIO III.

§. 50. *Additio vniverſalis*, vel *vnio* quantitatum vtcunque expreſſarum, eſt ſimplex earum aggregatio, quemadmodum ſignatæ ſunt; cum qua plerumque coniungitur reductio aggregati ad terminos, quibus exprimi poteſt, pauciſſimos.

Scholion.

§. 51. Sic ſumma quantitatum per a & b denotatarum eſt $a+b$, ſumma autem earum, quæ denotantur per a & $-b$ eſt $a-b$. Summa iſtarum $3a$ & $2a$ eſt $3a+2a$, vel brevius $5a$. Harum autem, $5a$ & $-2a$ ſumma eſt $5a-2a$, & brevius $3a$. Verum harum $2a$ & $-5a$ ſumma eſt $2a-5a$, brevius $-3a$.

§. 52. Ad normam horum exemplorum omnis vnio vel additio facile abſolvitur, quantumvis ſigna quantitatum complicata ſint.

Sic ſi ad $ab+2bc$ addatur $ab-bc$ ſumma fit $2ab+bc$

Si ad $ab-3bc$ addatur $cd-ab+cc$ fit ſumma $cd-3bc+cc$.

Si ad $2a^2-2b^2$ addatur $3a^2+b^2-ca$, fit ſumma $5a^2-b^2-ca$.

Si ad $3a^3-4a^2b$ addatur $2a^2b-3a^3$, fit ſumma $-2a^2b$.

Sic & fractiones $\frac{ab}{c} + \frac{2bb}{a}$ cum his $\frac{2ab}{c} - \frac{bb}{a}$ vnitæ, dant $\frac{3ab}{c} + \frac{bb}{a}$.

Porro ad $\sqrt{ab} - \sqrt{bc}$ ſi addatur $\sqrt{bc} - \sqrt{cd}$, fit ſumma $\sqrt{ab} - \sqrt{cd}$.

Et ſi ad $2\sqrt{ab} - 3\sqrt{bc}$ addatur $2\sqrt{bc} - \sqrt{cd}$, fit ſumma $2\sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{cd}$.

Nec aliter, ſi $a.(bc - cd) + b.(ac + bd)$ addendum ſit huic $3a.(bc - cd) - 2b.(ac + bd) - a^3$, ſumma colligitur $4a.(bc - cd) - b.(ac + bd) - a^3$. §. 28.

Eodemque modo, ſi ad $\frac{2ab - bb}{c}$ addatur $\frac{3bc + bb - cc}{c}$ prodit $\frac{2ab + 3bc - cc}{c}$.

Atque harum quantitatum $2\sqrt{(ab + bb)} - 3\sqrt{(bc - cc)} + 2\sqrt{bc}$, & $5\sqrt{(ab + bb)} + 2\sqrt{(bc - cc)} + \sqrt{ab} - \sqrt{bc}$, ſumma eſt $7\sqrt{.(ab + bb)} - \sqrt{(bc - cc)} + \sqrt{ab} + \sqrt{bc}$.

§. 53. Ex his facile perſpicitur, additionem, quam Vniverſalem dicimus vel Vnionem, cum additione, quæ definitur in Arithmeticis, vſurpaturque etiam in Geometria, eo ſolo caſu convenire, quo quantitatum, quæ vniendæ ſunt, omnium idem ſignum eſt. Si enim diverſa ſint quantitatum illarum ſigna, vnio earum

rum ſemper vel ſubtractionem ſolam, vel operationem ex additione atque ſubtractione compoſitam, exigit. Producitur adeo ſæpe per vnionem hanc non ſumma quantitatum, ſed veri nominis differentia, quæ tamen, quia per id quæſita eſt, quod hic additionem vocamus, *Summa* dici nihilominus ſolet, quæ, vbi diſtinguenda eſt a veri nominis ſumma, *Summa algebraica* commode dicetur.

DEFINITIO IV.

§. 54. *Vniverſalis Subtractio* quantitatis B a quantitate A eſt, inveſtigatio quantitatis tertiæ, cui ſi addatur ſubtracta B, redeat A.

Scholion.

§. 55. Reperitur quantitas, quæ hic quæritur, mutato ſigno quantitatis ſubtrahendæ B, $+$ in $-$, & $-$ in $+$, atque hac quantitate ad illam A, a qua B ſubtrahenda eſt, addita. Manifeſtum enim eſt, ſi ab A ſubtrahendum ſit $+B$, quantitatem $A-B$ fore eam, cui ſi addatur $+B$, prodit A; & ſi ab A ſubtrahendum ſit $-B$, fore $A+B$ quantitatem eam, cui ſi vniatur $-B$, nunc quoque A redit.

§. 56. Atque in hac re ſubtractio vniverſalis cum ſubtractione arithmetica vel geometrica convenit. Nam & hic ſi reſiduum addatur quantitati ſubtractæ, redit ea, a qua hæc ſub-

ſubtracta fuit. Verum in eo vniverſalis ſubtractio ab arithmetica differt, quod, cum per hanc ſemper datarum quantitatum differentia veri nominis reperiatur, vniverſalis ſubtractio ſæpe ſummam quantitatum arithmeticam exhibeat: quam tamen propterea, quod e ſubtractione nata eſt, hic plerumque nominamus differentiam. Quare ne *algebraica* hæc cum veri nominis *Differentia* confundatur, ſollicite cavendum erit.

§. 57. Ipſa autem operatio nihil difficultatis habet, cum ab additione eo ſolo differat, quod quantitatis ſubtrahendæ omnia ſigna mutanda ſint, antequam illi addatur, a qua ſubtrahenda eſſe dicitur.

Si ab $a-b$ ſubtrahenda ſit $a+b-c$, fac $-a-b+c$, atque adde ad primum. Quod prodit $c-2b$ eſt differentia, quæ quæritur, cui ſi quantitas ſubtracta addatur, redit $c-2b+a+b-c$ id eſt, $a-b$.

Sic ſi ab $2aa-ab+cc$ ſubtrahatur $aa+ab-bc$, prodit $2aa-ab+cc-aa-ab+bc$, quod breuius ita ſcribitur $aa-2ab+bc+cc$. Nam & hic omnia ad maximam, qua exhiberi poſſunt, ſimplicitatem reducenda ſunt.

PROBLEMA IV.

Fig. 1. §. 58. Punctum A in linea recta BC verſus punctum B vrgetur a viribus datis α, β, & verſus

verſus partem oppoſitam C, a viribus itidem datis *a*, *b*, *c*. Quæritur, quæ vis illis addenda ſit, vt punctum in æquilibrio conſtitutum quieſcat, & verſus quam partem.

PRÆPARATIO.

§. 59. Notum eſt ex mechanicis, æquilibrium fore, ſiquidem ſumma virium abſolute ſpectatarum, quæ verſus B agunt, æqualis fuerit ſummæ earum, quæ agunt verſus C. Si autem vires ſpectentur cum directionibus ſuis, æquilibrium erit, ſi ſumma omnium algebraica fuerit nihilum.

SOLVTIO.

§. 60. Vis quæſita, quæ prioribus addenda eſt, dicatur x, ponaturque agere verſus partem B, erit ex primo

$$\alpha+\beta+x=a+b+c.$$

Si autem altero vti velis, pone vires verſus B agentes poſitivas eſſe, reliquas negativas, erit

$$\alpha+\beta+x-a-b-c=0$$

quarum æquationum quævis & ex altera prompte ſequitur, terminis tranſpoſitis. Ex vtraque, alia terminorum tranſpoſitione, fit

$$x=a+b+c-\alpha-\beta.$$

Scholion.

§. 61. Eſt ergo x æqualis exceſſui ſummæ virium $a+b+c$ ſupra ſummam $\alpha+\beta$, vel huius ſupra illam. Sique prior ſumma poſteriori maior fuerit, x affirmativa erit, quemadmodum ſumpta eſt. Si vero ſumma virium $\alpha + \beta$ maior fuerit ſumma reliquarum, reperietur x negativa, vtpote quantitati negativæ æqualis: ergo verſus partem B directa eſſe non poteſt, ſed dirigenda eſt verſus C. Præter hæc ex formula deduci nihil poteſt, niſi forte addere velis, x fore nullam, vbi $a+b+c=\alpha+\beta$, atque ſi diverſæ fuerint hæ virium ſummæ, tanto maiorem fore x, quo magis ſummarum vna alteram exceſſerit.

§. 62. Hæc & ſimilia æquationes litterales, vbi convenienter reductæ ſunt, docent, eaque re methodum oſtendunt, quæſitum ex iis, quæ per litteras denotantur, quæ datorum loco ſunt, eliciendi. Cumque id vel arithmetice fieri poſſit, ſi data expreſſa ſint per numeros, vel geometrice, ſi per lineas rectas, vel alia entia geometrica, exhibeantur, arcus puta, angulos, ſuperficies vel ſolida: æquatio, qua exhibetur x a reliquis ſeparata, ſi recte intelligatur, vtrumque laborem æque dirigit. Neque enim ad Arithmeticam magis quam ad Geometriam reſtricta eſt.

§. 63. Sit $a=5$, $b=6$, $c=3$; ſed α ſit $=7$ & $\beta=2$, erit $x=5+6+3-7-2=5$, ergo affirmativa, & vis $=5$ dirigenda verſus B.

Sit vero $a=5$, $b=3$ & $c=1$, ſed α vt prius $=7$ & $\beta=2$, erit $x=5+3+1-7-2=0$. Hoc ergo caſu cum vires datæ ipſæ ſint in æquilibrio, nulla vi ſuperaddita opus erit.

Denique ſi fuerit $a=4$, $b=3$ & $c=2$; ſed $\alpha=7$ & $\beta=8$, erit $x=4+3+2-7-8=-6$: debebitque vis $=6$ verſus partem C dirigi, vt æquilibrium reſtituatur. Hoc modo calculus per formulam dirigitur.

§. 64. Si vero vires a, b, c & reliquæ, per F. 2.
lineas rectas dentur, debeatque x geometrice reperiri: a puncto quocunque A duc rectam BC vtrinque in infinitum; atque pone lineas affirmativas eſſe eas, quæ a parte A protenduntur verſus B; negativas autem, quæ a parte A protenduntur verſus C. Tum ſi vires exhibeantur per lineas, quibus adſcriptæ ſunt litteræ a, b, c, α, β, a puncto A verſus B pone AD$=a$, & a puncto D itidem verſus B pone DE$=b$, atque a puncto E verſus eandem partem loca EF$=c$, erit AE$=a+b$, & AF$=a+b+c$. Hinc ita perge, vt a puncto F verſus partem oppoſitam C ponas FG$=\alpha$, quia hæc α negativa eſt: a puncto autem G pariter verſus C colloca GH$=\beta$, quia hæc itidem eſt negativa. Erit AG$=a+b+c-\alpha$, quæ quidem linea itidem affirmativa eſt, ſed AH$=$

$a+b+c-\alpha-\beta$ erit negativa, quia ab A verſus C protenditur. Et hæc AH erit in hoc caſu quæſita x, quæ nihilum ſit, ſi mutatione datorum efficiatur vt H cadat in A, affirmativa vero, ſi ita mutentur data, vt H cadat inter A & B.

§. 65. Similem in modum procedetur, ſi data per arcus exhibeantur circulares, vel angulos, vel ſuperficies, vel ſolida. Verum cum linea recta ſimpliciſſima ſit quantitatum, quæ in Geometria conſiderantur, atque omnium facillime tractetur; quandocunque problema per lineas rectas ſolvi poteſt: arcus, anguli, ſuperficies, & quæ ſunt huiusmodi, merito ſeponuntur.

PROBLEMA V.

§. 66. Data ſumma atque differentia duarum quantitatum, invenire quantitates.

SOLVTIO.

67. Sint quantitates x & y, earum ſumma s, differentia d, erit

$$x+y=s$$

$$x-y=d$$

additis harum æquationum membris iis, quorum alterum ſcriptum eſt ſub altero, fit

$$2x=s+d$$

inſeinferioribus autem a ſuperioribus ſubtractis, relinquitur

$$2y = s - d. \text{ §. 57.}$$

Scholion.

§. 68. Prodit ergo prioris quantitatis vel numeri duplum, differentia ad ſummam addita; poſterioris autem duplum relinquitur, differentia a ſumma ſubtracta: vnde facile eſt ipſas quantitates reperire vel numeros.

Sit $s = 15$, $d = 7$, erit $2x = 22$, hinc $x = 11$, & $2y = 8$, & $y = 4$.

§. 69. Si loco ſummæ, dimidia numerorum ſumma, & loco differentiæ, dimidia differentia ſumatur: iisdem operationibus ipſi numeri x & y producuntur. Solvendi autem modum, quo hic vſi ſumus, facile reperit, qui ad æquationes attendit; qua re & alias ſæpe ſingulares ſolvendi viæ deteguntur, quæ calculum vehementer contrahunt.

SECTIO II.

DE
MVLTIPLICATIONE
ET
DIVISIONE.

DEFINITIO V.

§. 70.

Si fuerit $A : B = C : D$, habeatur autem A pro vnitate, quæ, memoria comprehenſa, adhibeatur vbi opus eſt, vel ſumatur pro arbitrio, vbi nihil mutatum iri prævidemus quomodocunque ſumatur; D generatim *Factum* dicitur ex quantitatibus B & C; operatio autem, qua D producitur, quæcunque ea fuerit, dicitur *Multiplicatio* quanti C per quantum B.

§. 71. Sed ſi, iisdem poſitis, B habeatur pro vnitate, D *Quotus* dicitur quanti C per A diviſi; & operatio, quæcunque ea fuerit, qua detegitur D, vocatur *Diviſio*.

Scholion.

§. 72. Si quantitates A, B, C eiusdem ſint generis, & $A:B=C:D$, eſt quoque $A:C=B:D$. *Ar.* §. 166. Quare eadem hoc caſu producitur D, ſive B multiplicetur per C, ſive

ſive C per B. Sic & idem eſt quotus D, ſive fiat vt A ad B pro vnitate ſumptam, ſic C ad D, ſive vt A ad C, ſic B pro vnitate ſumpta, ad D.

§. 73. Si vero primo fiat $1:B = C:D$, id eſt, ſi C per B multiplicata, producatur D, deinde vero $B:1 = D:Q$, id eſt, ſi id quod illa multiplicatione productum fuit, deinde dividatur per multiplicatorem B, ſit quotus Q quantitati multiplicatæ æqualis. Eſt ergo multiplicationi diviſio, & illa huic, ita contraria, vt quod per vnam harum operationum fit, per alteram iterum ad id redigatur, ex quo productum eſt.

§. 74. Si A, B, C numeri fuerint dati, reperitur quartus proportionalis D multiplicando C per B, & factum dividendo per A. Si vero A vnitas fuerit, ſola multiplicatione opus erit, quia vnitas non dividit, & ſi B fuerit vnitas, ſola diviſione, quia vnitas neque multiplicat. Ea res vocabulo in ſenſum a nativo alienum traducendo occaſionem dedit. Proprie enim neque multiplicatio neque diviſio aliter quam per numerum fieri poteſt, eumque integrum.

§. 75. Et quia tribus numeris a, b, c proportionalis quartus, per dicta ita ſignari debet:

$\frac{b\times c}{a}$, vel $\frac{b}{a}\times c$ vel $\frac{c}{a}\times b$ aut $\frac{bc}{a}$; ſolet eadem ratione & quantitas quælibet datis tribus quantitatibus a, b, c proportionalis exprimi. Vnde factum ex duabus quantitatibus b & c ita bc, quotus autem, qui provenit c per a diviſo, hoc modo $\frac{a}{c}$ ſcribetur, quia vnitas ſcribi non ſolet.

§. 76. Si ergo faciendum fuerit

$$\begin{array}{ccccccc} a & : & b & = & c & : & \alpha \\ d & : & e & = & \alpha & : & \beta \\ f & : & g & = & \beta & : & \gamma \\ h & : & i & = & \gamma & : & \delta \end{array}$$

erit ex prima analogia $\alpha = \frac{bc}{a}$, quod ſi in ſecunda analogia ſurrogetur in locum litteræ α, patet β exprimi ita debere, $\frac{ebc}{da}$. Hoc autem, ſi iterum in tertia analogia loco β ſcribatur, γ exprimitur hoc modo $\frac{gebc}{fda}$. Quo ſi vtamur eodem modo, fit $\delta = \frac{igebc}{hfda}$, & ita porro quousque progredi lubet.

§. 77. Quodſi litterarum, quas hic vſurpavimus, aliquæ quantitatem vnitati æqualem nota-

notaverint, exprimetur δ aliquo horum modorum: $\frac{igebc}{fda}$, vel $\frac{igebc}{da}$, vel $\frac{igebc}{a}$ vel $igebc$: vel etiam $\frac{gebc}{hfda}$ vel $\frac{ebc}{hfda}$, vel $\frac{bc}{hfda}$, vel $\frac{c}{hfda}$, vel tandem ita $\frac{1}{hfda}$. Scilicet numerus litterarum in loco numeratoris ſcriptarum, numerum litterarum quæ ſcriptæ ſunt in loco denominatoris, vtcunque ſuperare, vel ab hoc ſuperari poteſt.

§. 78. Hinc autem viciſſim, quemadmodum quantitas δ aliquo iſtorum modorum expreſſa, ex datis a, b, c &c. reperienda ſit, facile perſpicitur. Sit $\delta = \frac{bc}{hfde}$.

Fac
$$\begin{aligned} h : b &= c : \alpha \\ f : 1 &= \alpha : \beta \\ d : 1 &= \beta : \gamma \\ e : 1 &= \gamma : \delta. \end{aligned}$$

id eſt, quære ad h, b & c quartum proportionale α, ad f, 1 & α repertum, iterum quartum proportionale quære β, & ita perge, donec omnes litteras abſolveris, litteris, quæ in quantitate per modum fractionis expreſſa, ſunt ſub linea, pro antecedentibus, quæ vero ſupra, pro conſequentibus rationum terminis aſſumptis, atque vnitatibus vbique loco litterarum deficientium adhibitis.

§. 79. Vel quia in ſchemate §. 76. generali, ratio $c : \delta$ componitur ex rationibus $a : b$, $d : e$, $f : g$, $h : i$; ſi ratio ex his rationibus compoſita, vtcunque reperta ſit, dicaturque $m : n$, fac $m : n = c : \delta$.

§. 80. Hinc quoque ſequitur, ſi ſit verbi gratia $\delta = \frac{igebc}{hfda}$, ſitque ex datis a, b, c & reliquis eius generis, quantitas δ reperiunda; nihil intereſſe, quo ordine litteræ datas quantitates vel rationes notantes in ſe invicem ducantur; atque ſi loco eius, quod ſupra vſurpavimus, ponatur

$$\begin{aligned} d : c &= g : \alpha \\ f : i &= \alpha : \beta \\ h : b &= \beta : \gamma \\ a : e &= \gamma : \delta, \end{aligned}$$

fore quantitatem, quæ ita vltimo producitur δ, eandem cum δ, quæ prodiit, terminis priori illo ordine collocatis. Si enim ponamus eo ordine, quo hic ſcriptæ ſunt, primum vſurpari litteras; manente autem ſuo loco g, antecedentium d, f, h, a ordinem inter ſe vtcunque turbari, vt & conſequentium c, i, b, e, conſtat ex Proportionum doctrina *Ar.* §. 173., ea re quantitatem, quæ vltima prodit, δ non mutari,

tari, etiamſi mutari poſſint omnes reliquæ, quæ deſignantur per α, β, γ. Si vero iam & g littera cum ea permutetur, quæ ſucceſſit in locum litteræ c, hac re ne α quidem maior vel minor quam antea prodit *Ar.* §. 166. Ergo nec in quantitatibus β, γ nec in vltima δ aliquid mutatur.

§. 81. Ex iisdem perſpicitur, ſi ex aliquibus rationum ita datarum, vt $d:c$ & $f:i$ compoſita ſit ratio $m:n$, & ex reliquis vel aliquibus reliquarum alia $p:q$, his rationibus loco earum, e quibus componuntur, vſurpatis, laborem quo reperitur δ, vehementer poſſe contrahi. Si ratio $p:q$ compoſita ſit ex rationibus $h:b$ & $a:e$
fac $m:n = g:\alpha$
& $p:q = \alpha:\beta$, erit quantum β idem cum δ, quod per diffuſiorem laborem reperitur, quo ſcilicet loco rationum $m:n$ & $p:q$ vſurpantur eæ, e quibus hæ componuntur. Atque hinc patet, quam multiplex via ſit quantitatem δ per modum fractionis expreſſam, cuius & numerator e pluribus factoribus conſtat, & denominator, datis his factoribus, reperiundi.

§. 82. Solet autem quantitas per modum fractionis expreſſa, & ipſa in his *Fractio* vocari, vocabulo iterum & in geometriam & in alias diſciplinas introducto, quibus nihil proprie cum fractionibus negotii eſt. Eſt ea in vocabulo commoditas, quod nos moneat, quæ apud expreſſiones eius generis mutanda ſunt, per regulas, quas de fractionibus tradunt arithmetici, mutari poſſe; neque opus eſſe, vt ad proportionum doctrinam vbique recurramus. Vt, ſi $\frac{aabc}{abe}$, brevius ſcribendum ſit, id abſolvetur conſiderando quantitatem ita expreſſam tanquam fractionem, cuius termini per eandem quantitatem *ab* dividi poſſunt, quo facto, quod quæritur $\frac{ac}{e}$ prodit nullo negotio: cum, ſi ad compoſitiones rationum rem reducere velimus, dicendum ſit, terminos *a* & *b*, qui & inter antecedentes rationum componendarum terminos, & inter conſequentes occurrunt, omitti debere. *Ar.* §. 174.

§. 83. Eodem modo, quæ apud fractiones præterea mutari ſolent, earumque additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio, & quæ ſunt reliqua, e proportionum doctrina facile repetentur, exprimenturque operationes eo ſpectantes, per vocabula eius doctrinæ, quæ omni quantitatum generi æque conveniunt, non vt ea, quæ hic vſurpamus, proprie ad ſolos numeros ſunt reſtricta.

§. 84. Generatim ratio ita expreſſa $\frac{abc}{pq} : \frac{fgh}{mn}$ notat rationem compoſitam ex rationibus $a : f$, $h : g$, $c : h$ directe, atque ex rationibus $p : m$, $q : n$ inverſe ſumptis, hoc modo $m : p$, $n : q$. Si enim fiat

$$p : a = b : \alpha$$
$$\& \quad q : c = \alpha : \beta,$$

atque ex alia parte:

$$m : f = g : \gamma$$
$$\& \; n : h = \gamma : \delta,$$

eſt vtique $\frac{abc}{pq} : \frac{fgh}{mn} = \beta : \delta$, quia β priori, δ vero poſteriori harum fractionum æqualis eſt. Aliter autem diſpoſitis his proportionibus poteſt ratio $\beta : \delta$ per compoſitionem reperiri ſecundum hoc ſchema:

$$\begin{aligned} c : q &= \beta : \alpha \\ a : p &= \alpha : b \\ b : g &= b : g \\ m : f &= g : \gamma \\ n : h &= \gamma : \delta \end{aligned}$$

in quo & antecedentes rationum componendarum terminos, & conſequentes vtcunque invicem permutare licet. Hoc autem facto rationes, quæ compoſitæ dant $\beta : \delta$, ad eas, quas initio poſuimus, $a : f$, $b : g$, $c : h$, $m : p$, $n : q$ reduci poſſe, mox apparet. *Ar.* §. 173.

§. 85. Hinc ſequitur per $abcmn:fghpq$ indicari rationem ex iisdem compoſitam, quas modo diſtincte poſuimus, atque adeo hanc quantorum expreſſionem eiusdem valoris eſſe cum priori, ſcilicet $abcmn:fghpq = \frac{abc}{pq} : \frac{fgh}{mn}$. Fit autem & harum expreſſionum vna ex altera, per regulas, quibus fractiones tractantur. Si enim vtrique terminorum rationis antecedentis ſubiiciatur communis denominator $mnpq$, reducanturque fractiones ita ortæ ad denominationem, qua vniverſaliter exprimi poſſunt, minimam, fit $abcmn:fghpq = \frac{abcmn}{mnpq} : \frac{fghpq}{mnpq} = \frac{abc}{pq} : \frac{fgh}{mn}$. Ex fractionibus autem his, antecedentis illius rationis termini oriuntur, vtraque fractionum per $pqmn$ multiplicata, quo fit $\frac{abcpqmn}{pq} : \frac{fghpqmn}{mn} = abcmn:fghpq$. Idemque & per regulam, qua fractiones ad communem denominatorem reducuntur, efficitur.

§. 86. Hinc quoque ſequitur, ſive a^2, b^2, a^3, b^3, & reliquæ huiusmodi, numeros notaverint, ſive quanta quæcunque alia, per $a^2 : b^2$ notari rationem duplicatam rationis $a:b$, per $a^3:b^3$ eiusdem rationis triplicatam, per $a^4:b^4$ quadruplidruplicatam & ſic porro; poſſeque rationem $a^2 : b^2$ exhiberi per duo quælibet quanta, quarum prius ad poſterius eſt in duplicata rationis $a : b$, id eſt per lineas, ſuperficies cuiuscunque figuræ, ſolida vtcunque figurata, vel per quantaquæcunque alia: rationem autem $a^3 : b^3$ per quæcunque quanta, quarum ratio triplicata eſt rationis $a : b$ & ita porro.

§. 87. Sic & $a^3b^2 : c^2$ rationem notat compoſitam ex triplicata rationis $a : 1$, & ex duplicata rationis $b : c$; debet enim vnitas hic quoque ſuppleri vbicunque terminus rationis deficit. Eſt autem $1 = 1^2 = 1^3 = 1^4$, quia vnitate in ſeipſam ducta, præter vnitatem, nihil producitur. Verum eadem ratio $a^3b^2 : c^2$ etiam ex aliis componi poteſt multis modis, vt ex his $a^2 : c^2$ & $ab^2 : 1$, vel ex iſtis $ab : c$ & $a^2b : c$.

§. 88. Hinc ſeries ita ſcripta,

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5;\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9$$

notabit progreſſionem geometricam, cuius terminus primus eſt quantitas, quæ dicta eſt 1, alter autem terminus, quantitas eiusdem generis, quam indicat a. Eſt enim $1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3 = a^3 : a^4$, atque quantitatum conſequentium quælibet oritur, illa, quæ eam præcedit, per a multiplicata. Si ergo a quocunque termino a^2 retrorſum verſus vnitatem, & inde porro, continuantinuanda fuerit, progreſſio, eadem lege ſervata, hoc modo ſignanda erit;

a^3, a^2, a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}

notabitque a^0 eum terminum progreſſionis, qui pro vnitate ſumptus eſt, quo ſi a maior fuerit, tanto magis a^2, a^3 & reliqui eius generis termini vnitate maiores erunt, atque a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} & eius generis reliqui vnitate minores. Contra ſi a minor fuerit vnitate, a^2, a^3 &c. vnitate minores erunt, & a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} vnitate maiores.

§. 89. Cæterum quod dictum eſt §. 70, 71. quamlibet quantitatem pro vnitate ſumi poſſe, nihil difficultatis habet. Vbi in comparandis rebus verſamur, earum quælibet ab omnibus reliquis diſtingui debet. Sed quo ſigno id fiat, vel quo vocabulo, nihil intereſt. Quare nec vnitatis vocabulum vel nota ab hoc vſu excludi poteſt. Sed hoc caſu, quod vnum diximus in aliqua quæſtione, determinatum eſt; in aliis ab arbitrio noſtro pendet quantam vnitatem velimus aſſumere. Vt ſi agri longitudo cum eius latitudine comparanda ſit, nihil intereſt, quanam menſura vtare, dummodo eam quam primum adhibueris, deinde non mutes. Talis quantitas, qua vtcunque ſumpta non mutantur reliqua, ſi in quæſtione quadam vel in aliquo theoremate occurrat, ea vnitatis nomine commode deſignatur, vtpote quæ natura ſua

eſt

eſt arbitraria. Solet autem Vnitas ſemper poſitiva ſumi.

THEOREMA I.

§. 90. Si duorum quantorum, quorum vnum multiplicandum eſt per alterum vel dividendum, eadem ſint ſigna, facti ſignum vel quoti eſt +, ſin contraria, ſignum facti eſt —, idemque ſignum quoti.

DEMONSTRATIO.

Si quanta, quorum vnum multiplicandum eſt per alterum vel dividendum, ſint a & b, in proportione autem non abſolutæ tantum quantitatis, ſed eius ſimul conditionis, quæ per ſigna + & — denotatur, habeatur ratio, patet eſſe

$$\begin{array}{l} +1 : +a = +b : +ab \\ +1 : +a = -b : -ab \\ +1 : -a = +b : -ab \\ +1 : -a = -b : +ab \end{array}$$

atque
$$\begin{array}{l} +a : +1 = +b : +\frac{b}{a} \\ +a : +1 = -b : -\frac{b}{a} \\ -a : +1 = +b : -\frac{b}{a} \\ -a : +1 = -b : +\frac{b}{a} \end{array}$$

His

His autem proportionibus omnes ſignorum combinationes continentur, quæ apud multiplicationem vel diviſionem obvenire poſſunt, quia vnitas ſemper affirmativa ſumitur: vnde propoſitum manifeſte patet.

Scholion.

§. 91. Idem & ex conſtructione, qua Geometria datis tribus rectis quartam proportionalem reperire docet, clare ſequitur. Poteſt ea conſtructio hunc in modum generaliter abſolvi. F. 3. 4. 5. 6. Per punctum A duc duas rectas infinitas, quarum vna alteri ad angulum rectum ſit. Pone rectas, quæ ab A protenduntur verſus B, affirmativas eſſe, eas, quæ ab eodem puncto A verſus C protenduntur, negativas. Si vero linea recta ab A ſecundum DE excurrat, eam affirmativam pone, ſi protenditur verſus D, & negativam ſi verſus E tendat. Iam ſi ad tres F. 3. lineas datas, $+a$, $+b$, $+c$ quarta proportionalis exhibenda ſit, fac $AF = a$, & $AG = b$, connecte FG. Deinde fac $AH = c$, & duc HK ad FG parallelam. Erit AK quæſita, quam affirmativam eſſe neceſſe eſt, in quemcunque infinitæ AB locum H ceciderit.

F. 4. Si vero ſecundo rectis $+a$, $+b$, $-c$ proportionalis quarta deſideretur, pone nunc quoque $AF = a$ & $AG = b$ vt prius, ac connecte FG, ſed $AH = c$ in partem AC transfer, quia hæc

hæc recta negativa eſt, atque duc HK ad FG parallelam. Erit AK quæſita, manifeſte negativa.

Si tertio rectis $+a$, $-b$, $+c$ proportionalis quarta invenienda ſit, fac nunc quoque AF $=a$, ſed AG $=b$ ab A verſus E colloca, quia b iam negativa ponitur, verum AH $=c$ pone ab A verſus B, quia hæc linea affirmativa eſt. Connexa ergo iterum FG eique per H parallela ducta, erit AK quæſita, nunc quoque negativa. F. 5.

Quarto, ſi rectis $+a$, $-b$, $-c$ proportionalis quarta exhibenda ſit, pone AF $=a$ verſus B, ſed AG $=b$ verſus E colloca, & AH $=c$ verſus C, quia duæ hæ lineæ negativæ ſunt, cum prima nunc quoque ſit affirmativa. Duc FG, & HK illi parallelam. Erit AK quæſita, nunc denuo affirmativa. F. 6.

Si ergo AK vbique dicatur d, de quatuor his caſibus,

$$+a : +b = +c : +d$$
$$+a : +b = -c : -d$$
$$+a : -b = +c : -d$$
$$+a : -b = -c : +d$$

manifeſtum eſt, ſignum quarti d recte locatum eſſe. Reſtant quatuor caſus alii,

$$-a : -b = -c : -d$$
$$-a : -b = +c : +d$$
$$-a : +b = -c : +d$$
$$-a : +b = +c : -d$$

in quibus ſigna priorum inverſa ſunt. Verum in his ſignum termini quarti recte poſitum eſſe, per easdem figuras oſtenditur, ſi ita inverſæ ponantur, vt iam pars rectæ infinitæ AB habeatur pro regione negativorum, & AC pro affirmativorum regione, ſimiliterque AD regio negativorum fiat & AE affirmativorum. Hoc enim facto quatuor figuræ deſcriptæ poſterioribus his quatuor proportionibus ordine reſpondebunt: plures autem his octo ſignorum combinationes fieri non poſſunt.

DEFINITIO VI.

§. 92. Quidquid notaverit *a*, ſi ab vnitate a^0 vtrinque in infinitum excurrat progreſſio geometrica

$$a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5$$

terminus *a* dicitur *Radix* omnium reliquorum; hi autem eius *Dignitates* vocantur, diſtinguunturque denominatione petita ab indice termini. Per eundem numerum & radix denominatur, prout ad hanc vel illam dignitatem refertur.

Scholion.

§. 93. Hinc a^2 vocabitur dignitas *ſecunda* radicis a, & hæc, radix *ſecunda* dignitatis eius a^2. Sed a^3 erit dignitas *tertia* radicis a, & hæc a radix *tertia* dignitatis a^3 & ſic in reliquis. Poteſt adeo & a^1 dignitas prima eius radicis a vocari, a qua non differt, & a^0 ſive 1, eiusdem dignitas nulla Sed a^{-1} dici poſſet radicis a dignitas *ſubprima*, a^{-2} *ſubſecunda* & ita porro. Verum magis receptum eſt ipſos tantum nominare numeros indices, & verbi gratia, a^{-5} dicere eam dignitatem radicis a, cuius exponens eſt -5.

§. 94. Dicitur etiam a^2 *quadratum* quantitatis a; & a^3 eiusdem *cubus*, a^4 *biquadratum*, & ita porro, quia ſcilicet ratio $a^2 : 1$ eſt duplicata rationis $a : 1$, quæ itidem eſt ratio quadratorum, quarum a & 1 notant latera, & ratio $a^3 : 1$ triplicata rationis $a : 1$, adeoque ratio cuborum, quorum latera ſunt in eadem ratione $a : 1$. Sic & radix ſecunda dicitur quoque radix *quadratica*, tertia vero *cubica*, & ita porro. Verum in altioribus dignitatibus vel radicibus deſignandis horum vocabulorum vſus hodie fere exolevit.

§. 95. Cæterum, quod dictum eſt his denominationibus locum fore quidquid notaverit a, ita intelligi debet; ſi fuerit $a = b^n$, fore

$(b^n)^2$

$(b^n)^2$ huius a vel b^n dignitatem ſecundam, $(b^n)^3$ tertiam, & ita porro: vel ſi $a = \sqrt{b}$, fore $(\sqrt{b})^2$ huius a vel $\sqrt{b}$ dignitatem ſecundam, $(\sqrt{b})^3$ tertiam, & ſic reliquas. Sic & ſi ponatur $a = (bcc + c^3)$, erit $(bc^2 + c^3)^n$ huius a ſive $(bc^2 + c^3)$ dignitas ordinis n, ſimilemque in modum idem de radicibus omnium ordinum explicabitur.

Corollarium I.

§. 96. Quia in qualibet progreſſione geometrica, quilibet terminus eſt ad alium quemlibet eiusdem progreſſionis terminum, vt tertius quilibet, ad quartum, qui a tertio eodem intervallo diſtat, quo ſecundus diſtat a primo & verſus eandem partem: ſi progreſſionis aſſumptæ quilibet terminus multiplicandus ſit per quemlibet alium, factum vel quotus ſemper erit aliquis terminorum eiusdem progreſſionis, qui, a termino tertio prorſum vel retrorſum numerando, facile reperitur. Sic $a^2 \times a^3 = a^5$, & $a^{-1} \times a^4 = a^3$, & $a^{-1} \times a^{-2} = a^{-3}$. Similiterque $\frac{a^3}{a^2} = a$, & $\frac{a^5}{a^3} = a^2$, atque $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$.

Corollarium II.

§. 97. Hinc ſequitur eiuſdem radicis dignitatibus quibuslibet in ſe invicem ductis, fa-

ctum

ctum eſſe dignitatem eiusdem radicis, cuius exponens eſt ſumma exponentium earum dignitatum, quarum altera in alteram ducitur: ſi vero quæcunque dignitas per aliam eiusdem radicis dignitatem dividenda ſit, quotum eſſe dignitatem eiusdem radicis, cuius exponens relinquitur, exponente diviſoris ab exponente dividendi vniverſaliter ſubtracto. Sit a^m multiplicandum in a^t, erit exponens facti $m + t$, quoscunque numeros notaverint litteræ m & t. Si vero prior dignitas per poſteriorem dividenda ſit, exponens quoti erit $m - t$.

Corollarium III.

§. 98. Ex eo autem quod $a^{-3} = \frac{a^2}{a^5}$, ſi vterque fractionis terminus per a^2 dividatur, ſequitur eſſe $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, & generatim $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Idem & ex genio progreſſionis geometricæ facile perſpicitur. Apparet enim vel ex hoc exemplo

$$\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{8}{1}, \frac{16}{1}, \frac{32}{1},$$

terminos ab vnitate eodem intervallo, ſed ad diverſas partes, remotos, fractionibus exprimi, quarum altera alterius inverſa eſt.

Corollarium IV.

§. 99. Et quia generatim $a^{m} \times a^{t} = a^{m+t}$, ſi $m = t$; fit a^{2m} quantitatis a^{m} dignitas ſecunda, quæ ſi iterum multiplicetur per a^{m}, oritur eiusdem a^{m} dignitas tertia a^{3m}, & ſic porro; ac generatim quæcunque dignitas a^{m}, tanquam radix ſpectata, ad aliam quamcunque dignitatem, cuius exponens deſignatur per n, evehitur, exponente m per hunc dignitatis indicem n multiplicato, vt fiat dignitas quæſita a^{mn}. Idem rurſus ex natura progreſſionis geometricæ clare perſpicitur. Apparet enim, quicunque numerus integer denotetur per m, terminos

$$1 \;.\;.\; a^{m} \;.\;.\; a^{2m} \;.\;.\; a^{3m} \;.\;.\; a^{4m} \;.\;.\; a^{5m}$$

eodem in progreſſione, cuius ſecundus terminus eſt a^{m}, intervallo a ſe mutuo diſtare, ac totidem eius progreſſionis terminos exiſtere inter 1 & a^{m}, quot ſunt inter a^{m} & a^{2m}, inter a^{2m} & a^{3m} & ita porro. Ergo hi quoque termini 1, a^{m}, a^{2m}, a^{3m} &c. geometrice progrediuntur; atque a^{2m} quadratus erit termini a^{m}, & a^{3m} eius cubus, & ita porro.

Corollarium V.

§. 100. Ergo inverſe, ſi index dignitatis cuiuscunque a^{m} dividatur per 2, ſumaturque quotus pro indice novæ dignitatis, erit $a^{\frac{1}{2}m}$

radix

radix quadratica illius dignitatis, ſi per 3 dividatur, $a^{\frac{1}{3}m}$ notabit eiusdem radicem cubicam, & generatim, ſi index ille dignitatis dividatur per indicem ordinis radicis n, $a^{\frac{m}{n}}$ notabit dignitatis a^m radicem ordinis n. Si enim n diviſerit m, ex dictis patet, $a^{\frac{m}{n}}$ evectam ad dignitatem, cuius index eſt n, fieri a^m; ſi autem n non dividat m, etſi $\frac{m}{n}$ numerus integer eſſe non poſſit, tamen $a^{\frac{m}{n}}$ nihil aliud notabit, quam $\sqrt[n]{a^m}$, quidquid fuerit a.

Corollarium VI.

§. 101. Sit $a = \frac{b^r d^t}{c^s}$, erit *Ar.* §. 179.

$$a^2 = \frac{b^{2r} d^{2t}}{c^{2s}},$$

$$a^3 = \frac{b^{3r} d^{3t}}{c^{3s}}, \text{ \& generatim}$$

$$a^m = \frac{b^{rm} d^{tm}}{c^{sm}}.$$

Vnde viciſſim, ſi fuerit $a^m = \frac{b^r d^t}{c^s}$, ſitque ex a^m extrahenda radix ordinis n, quilibet exponentium r, t, s per n dividendus erit, vt fiat

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{b^{\frac{r}{n}} d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

quare expreſſiones iſtæ:

$$\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}} \quad \& \quad \frac{\sqrt[n]{b^r} \times \sqrt[n]{d^t}}{\sqrt[n]{c^s}}$$

ſemper æquipollebunt, atque radix cuiuscunque ordinis n termini a^n, quarti proportionalis ad c^s, b^r, d^t, erit quarta proportionalis, ad horum c^s, b^r, d^t radices eiusdem ordinis. *Ar.* §. 180.

Corollarium VII.

§. 102. Si vero fuerit $a^m = \frac{a^r a^t}{a^s}$, erit $m = r + t - s$. Quare vtrinque radice ordinis n ſumpta, ſi fiat $a^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{r}{n}} a^{\frac{t}{n}}}{a^{\frac{s}{n}}}$, erit $\frac{m}{n} = \frac{r + t - s}{n} = \frac{r}{n} + \frac{t}{n} - \frac{s}{n}$. Fit ergo exponens $\frac{m}{n}$ ex fractis $\frac{r}{n}$, $\frac{t}{n}$, $\frac{s}{n}$ eodem modo, quo exponens termini a^m, in proportione $a^s : a^r = a^t : a^m$ quarti,

quarti, ex integris terminorum antecedentium exponentibus colligitur, addendo ſcilicet exponentes dignitatum radicis a, quarum altera multiplicanda eſt per alteram, & a ſumma ſubtrahendo exponentem diviſoris. Quare ſi exponentes fracti fuerint, eodem calculo exponens facti vel quoti detegetur, qui apud integros locum habet.

Corollarium VIII.

§. 103. Eritque a^{2m} quadratum dignitatis a^{m}, & a^{3m} eius cubus & ita porro, ſive m integer fuerit ſive fractus; atque ad quamlibet harum ſuppoſitionum

$$a^{0},\ a^{m},\ a^{2m},\ a^{3m},\ a^{4m},\ a^{5m}\ \ldots\ a^{nm}$$

progreſſionem geometricam exprimet, in qua ab vnitate a^{0} ad terminum a^{nm}, ſunt termini numero n, ſecundus autem progreſſionis terminus eſt a^{m}.

Scholion.

§. 104. Per has regulas ſigna radicum, ſi quæ in aliqua expreſſione inſint, facile tollentur; ſique præterea in ea expreſſione, quæ tanquam alicuius æquationis membrum ſpectari poteſt, neque quantitates infuerint, ex aliis complexæ per copulam vnitis, ſemper ad ſimilem huic formam reduci poterit

$$a^{m}b^{n} + 3ab^{m}c^{-r} - 5a^{t}b^{-s}c^{n}$$

in qua ſcilicet quodlibet ſignum ſingulare aliquod factum adficit, ex dignitatibus compoſitum, quarum exponentes integri ſunt vel fracti, poſitivi vel negativi Huius generis expreſſiones intelligemus, ſi *diſtinctas* nominaverimus, atque *radicalia nulla* continentes.

THEOREMA II.

§. 105. *Si* $a+b-c$ *multiplicandum fuerit per* $+d$, *erit factum* $da+db-dc$; *ſi eadem quantitas multiplicetur per* $-d$, *factum prodit* $-da-db+dc$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $1 : d = +a : +da$

& $1 : d = +b : +db$

& $1 : d = -c : -dc$

ergo *Arith.* §. 162. $1 : d = a+b-c : da+db-dc$, quod erat primum. Hinc autem ſequitur inverſis in proportione ſignis quanti ſecundi & quarti, §. 90. fore

$$1 : -d = a+b-c : -da-db+dc,$$

quod erat alterum.

Corollarium I.

§. 106. Factor ergo complexus $a+b-c$, ſi per ſimplicem $+d$ vel $-d$ multiplicandus ſit, factum producitur, multiplicatore in ſingulos multiplicandi terminos ducto, atque factis,

quæ

quæ ita prodeunt, per ſigna diſtinctis, cum quibus prodierunt.

Corollarium II.

§. 107. Hinc vero ratio deducitur factorem complexum per alium factorem complexum multiplicandi. Sit $a+b-c$ multiplicandus per $d-e+f$. Si ergo multiplicator tractetur, quaſi ſimplex foret, eſt factum $=a(d-e+f)+b(d-e+f)-c(d-e+f)$. Verum hæc facta, ſi iam factor $d-e+f$ ſpectetur tanquam complexus, huiusmodi fiunt

$$+a(d-e+f)=ad-ae+af$$
$$+b(d-e+f)=bd-be+bf$$
$$-c(d-e+f)=-cd+ce-cf.$$

Producíturque adeo factum huiusmodi, ſingulis cuiusque factoris terminis multiplicatis in ſingulos terminos alterius, atque factis, quæ ita prodeunt, per ſigna diſtinctis, cum quibus prodierunt.

Scholion.

§. 108. Hinc facile abſolvitur multiplicatio quantitatis complexæ per aliam eiusmodi quantitatem, ſiquidem vtraque diſtincta fuerit, & absque radicalibus. Primo multiplicantur numeri, deinde ſignantur facta e quantitatibus per litteras expreſſis; cumque in his litterarum ordo arbitrarius ſit, plerumque obſervatur ordo, quo litteræ in alphabeto poſitæ ſunt, quia per id promptius apparet, quæ facta eadem ſint, quæ diverſa. Reperta ita facta ſimpliciora, e quibus id componitur, quod quærimus, vnienda ſunt, vt quæſitum quam ſimpliciſſime exhibeatur.

Exemplum I.

$$\begin{array}{l}
\quad a + 2b - c + 3d \\
\quad 2a - b + c \\
\hline
\quad 2aa + 4ab - 2ac + 6ad \\
- ab - 2bb + bc - 3bd \\
\quad ac + 2bc - cc + 3cd \\
\hline
2aa + 3ab - ac + 6ad - 2bb + 3bc - 3bd - cc + 3cd.
\end{array}$$

Exemplum II.

$$\begin{array}{l}
\quad 2ab - 3ac + bc \\
\quad ac - 2bc \\
\hline
\quad 2aabc - 3aacc + abcc \\
- 4abbc + 6abcc + 2bbcc \\
\hline
2aabc - 3aacc + 7abcc - 4abbc + 2bbcc.
\end{array}$$

Exemplum III.

$$\begin{array}{r} a^3 + 2ba^2 - 3bca \\ 2a^2 + 3ba \\ \hline 2a^5 + 4ba^4 - 6bca^3 \\ + 3ba^4 + 6b^2a^3 - 9b^2ca^2 \\ \hline 2a^5 + 7ba^4 - 6bca^3 + 6b^2a^3 - 9b^2ca^2. \end{array}$$

Exemplum IV.

$$\begin{array}{r} a^{m} + 2a^{m-n}b^{-t} - 3a^{-m}b^{n} \\ 3a^{n} + b^{t} \\ \hline 3a^{m+n} + 6a^{m}b^{-t} - 9a^{n-m}b^{n} \\ a^{m}b^{t} + 2a^{m-n}b - 3a^{-m}b^{n+t} \end{array}$$

Hæc autem contrahi non poſſunt.

Exemplum V.

Si in exemplo præcedente m, n & t numeros fractos notaverint, fueritque, verbi gratia, $m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, & $t = \frac{1}{3}$, erit $m + n = 2$, $n - m = -1$, $m - n = 1$, $n + t = \frac{5}{6}$, quibus in facto in locum litterarum ſurrogatis, id ad hunc caſum accommodabitur; eodemque modo procedetur, vniendo fractiones, ſi hæ per litteras expreſſæ fuerint.

Scholion.

§. 109. Atque ſecundum hæc ſchemata omnes multiplicationes quantitatum diſtincte expreſſarum, in quibus radicalia nulla ſunt, abſolventur. Cæterum factum ita repertum commode ſecundum dignitates alicuius litterarum, quæ in ea inſunt, ſic ordinabitur, vt præcedant eius litteræ dignitates altiores, reliquæ gradatim deſcendendo ſequantur.

PROBLEMA VI.

§. 110. *Quantitatis cuiuscunque diſtincte expreſſæ & ſine radicalibus, per aliam eiusmodi quantitatem diviſæ, quotum quam fieri poteſt ſimpliciſſime exhibere.*

SOLVTIO.

§. 111. Sit quotus $\frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{a + b}$, cuius vterque terminus ſecundum eandem litteram a ordinatus eſt, ſimplicius exhibendus. Multiplica diviſorem $a + b$ per factorem ſimplicem eum, qui primum dividendi terminum producat, qui quidem in hoc exemplo eſt a^2. Factum $a^3 + a^2b$ a dividendo ſubtrahe, notato reſiduo, $-2a^2b - ab^2 + b^3$. Erit quotus $a^2 + \frac{b^3 - ab^2 - 2a^2b}{a + b}$, aliquanto ſimplicius expreſſus, quam antea.

Hac quoque ſimpliciorem quoti expresſionem ſi velis, fractionem ita productam tracta eodem modo. Dividendus iam eſt $-2a^2b - ab^2 + b^3$, diviſor autem prior $a + b$, quo in in $-2ab$ ducto fit $-2a^2b - 2ab^2$, hoc autem facto a diviſore ſubtracto, relinquitur $ab^2 + b^3$. Vnde iam quotus eſt $a^2 - 2ab$ $+ \frac{ab^2 + b^3}{a+b}$.

Simpliciſſima autem quoti expreſſio prodibit, ſi diviſorem multiplicaveris per b^2, atque factum $ab^2 + b^3$ ſubtraxeris a dividendo vltimæ fractionis. Eo cum totus iſte diviſor deſtruatur, id indicio eſt, quotum eſſe $a^2 - 2ab + b^2$.

§. 112. Solemus autem in hoc labore vna ſerie pergere, quamdiu ita partes quoti non fractæ prodeunt, quod ſecundum ſchemata adiecta fit expeditiſſime, in quo productorum, quæ ſubtrahi debent, ſigna in contraria mutata ſunt, quo ſubtractio additione abſolvi poſſit

$$\begin{array}{c|r|l}
\textit{Diviſor} & \textit{Dividendus} & \textit{Quotus} \\
a+b & a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 & a^2 - 2ab + b^2 \\
 & -a^3 - a^2b \qquad\qquad & \\ \cline{2-2}
 & -2a^2b - ab^2 + b^3 & \\
 & +2a^2b + 2ab^2 \qquad & \\ \cline{2-2}
 & ab^2 + b^3 & \\
 & -ab^2 - b^3 & \\ \cline{2-2}
 & 0 \qquad &
\end{array}$$

Aliud Schema.

Diviſor	Dividendus	Quotus
$a^3+3abc-b^2c$	$2a^5+a^3bc-2a^2b^2c-15ab^2c^2+5b^3c^2$	$2a^2-5bc$
	$-2a^5-6a^3bc+2a^2b^2c$	
	$-5a^3bc-15ab^2c^2+5b^3c^2$	
	$+5a^3bc+15ab^2c^2-5b^3c^2$	
	0	

§. 113. Verum cum eiusmodi ſubtractionibus diviſor ad nihilum redigi non ſemper poſſit; niſi totam fractionem, quemadmodum initio poſita eſt, relinquere velis, id reſtat, vt ex reſiduo & diviſore nova fractio fiat, ſiat, parti quoti non fractæ ſubiungenda. Sit $a^3+2a^2b-ab^2$, dividendum per $aa+ab$. Erit ſchema huiusmodi:

$$\begin{array}{r|l|l}
\textit{Diviſor} & \quad\textit{Dividendus} & \textit{Quotus.} \\
aa+ab & a^3+2a^2b-ab^2 & a+b \\
 & \underline{-a^3-a^2b} & \\
 & \quad a^2b-ab^2 & \\
 & \underline{\;-a^2b-ab^2} & \\
 & \quad -2ab^2 &
\end{array}$$

ac quotus erit $a+b-\frac{2ab^2}{aa+ab}$.

Attamen fractio, per quam vel quotus omnis, vel eius pars exhibetur, ad minime complicatum denominatorem reduci debet, factoribus, qui numeratori cum denominatore communes ſunt, omiſſis. Hoc ad ſuperiora addito, quotus $\frac{a^3+2a^2b-ab^2}{aa+ab}$ ſimplicius ita ſcribetur, $\frac{aa+2ab-bb}{a+b}$, is autem, qui diviſione productus eſt, hoc modo, $a+b-\frac{2bb}{a+b}$.

DEMONSTRATIO.

Recte ſecundum has regulas in diviſione procedi facile perſpiciet, qui eas cum regulis multi-

multiplicandi contulerit. Eſt enim diviſio multiplicationi ita adverſa, vt hæc ex facto & vno factore producat factorem alterum, qui cum priori illo factum effecerat. §. 73.

Scholion.

§. 114. Fractus, qui forte partem quoti exhibet, hic omitti non ſemper poteſt, quemadmodum numeri fracti, qui cum aliis pro quoto prodeunt, ſi numerus dividatur per numerum, errore admodum parvo ſubinde negliguntur. Sic, ſi in vltimo exemplorum adductorum b quantitas admodum magna ſit præ a, $a + b$ vix maior eſt quam b; vnde $\frac{2bb}{a+b}$ nonniſi paullo minor quantitate $2b$, quæ prodit $2bb$ per b diviſa. Si ergo negligeretur $\frac{2bb}{a+b}$, plus in hac ſuppoſitione negligeretur parte quoti reliqua $a + b$. Contra, ſi in eadem fractione a ingens ſit reſpectu b, fit $\frac{2bb}{a+b}$, admodum parvum, poteſtque, vbi id tantum quæritur, quod vero proximum eſt, tuto negligi.

§. 115. Cæterum ex iisdem perſpicitur, quam multiplex modus ſit, datæ quantitatis per datam diviſæ, quotum exhibendi. Nam & ea fractio, in qua in diviſione vltima acquievimus, evolvi vlterius poteſt, hunc in modum :

$$\begin{array}{r|r|l}
a+b & 2bb\ \ldots\ldots & \frac{2bb}{a}-\frac{2b^3}{a^2}+\frac{2b^4}{a^3} \\
\multicolumn{2}{r}{-2bb-\frac{2b^3}{a}} & \\
\cline{1-2}
\multicolumn{2}{r}{-\frac{2b^3}{a}} & \\
\multicolumn{2}{r}{+\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^4}{a^2}} & \\
\cline{2-2}
\multicolumn{2}{r}{\frac{2b^4}{a^2}} & \\
\multicolumn{2}{r}{-\frac{2b^4}{a^2}-\frac{2b^5}{a^3}} & \\
\cline{2-2}
\multicolumn{2}{r}{-\frac{2b^5}{a^3}} &
\end{array}$$

quod ſi vſurpetur, fit quotus vniverſus

$$a+b-\frac{2bb}{a}+\frac{2b^3}{a^2}-\frac{2b^4}{a^3}+\frac{2b^5}{a^4(a+b)}$$

Nam & hic fractio ex reſiduo & diviſore negligi non debet, niſi de eius parvitate conſtet. Erit autem & in præſenti caſu $\frac{b^5}{a^4(a+b)}$ tanto minor, quo minor b ſuerit præ a, atque tanto maior, quo magis b quantitatem a exceſſerit.

§. 116. Quod reliquum eſt, facile regulæ iſtæ ad eas quantitates applicabuntur, quæ dignitates continent, quarum exponentes ſunt litteræ, ſive eæ numeros integros notaverint, ſive fractos.

§. 117. Omnibus autem coniunctis multiplicatio fracti per fractum atque diviſio non difficilius abſolventur, ſiquidem termini fractorum diſtincti fuerint, & radicalibus caruerint. Sit enim $\frac{a}{b}$ multiplicandus vel dividendus per $\frac{c}{d}$, erit factum $\frac{ac}{bd}$: & quotus $\frac{ad}{bc}$. Sed & per diviſionem abſolvi vtraque operatio poterit, quæ ſi iam per (:) deſignetur, factum erit $\frac{a:d}{b:c}$ & quotus $\frac{a:c}{b:d}$. *Ar.* §. 82.

Vnde ſi $\frac{a^3b^2c}{e^4}$ multiplicandus fuerit per $\frac{ce^2}{ab}$, ac dividendus, factum erit $\frac{a^3b^2c^2e^2}{abe^4}$, & quotus $\frac{a^4b^3c}{ce^6}$, quarum fractionum vtraque ad minorem

norem denominationem reducitur. Poteſt enim prior ita ſcribi, $\frac{a^2bc^2}{e^2}$, poſterior autem ſic, $\frac{a^4b^3}{e^6}$.

Sit $\frac{a^mb^n}{c^2e^{n-1}}$ multiplicandus per $\frac{c^ne^3}{ab}$, erit factum $\frac{a^mb^nc^ne^3}{abc^2e^{n-1}} = \frac{a^{m-1}b^{n-1}c^{n-2}}{e^{n-4}}$, vel $a^{m-1}b^{n-1}c^{n-2}e^{4-n}$ vtrumque enim idem denotat: quotus autem qui prodit priori per poſteriorem diviſo, erit $\frac{a^{m+1}b^{n+1}}{c^{n+2}e^{n+2}}$.

Sit $\frac{a^2b+b^3}{a-c}$ multiplicandus per $\frac{a^2-c^2}{ab}$, erit factum $= \frac{(a^2b+b^3)\times(a^2-c^2)}{(a-c)\,ab}$, quæ fractio reducitur factores a^2b+b^3 & ab per b dividendo, a^2-c^2 vero & $a-c$ per hoc ipſum $a-c$, quo producitur quotus $a+c$. Eſt ergo fractio reducta $\frac{(a^2+b^2)(a+c)}{a} = \frac{a^3+ab^2+a^2c+b^2c}{a}$.

§. 118. Reductio hæc fractionis ad denominationem, qua exprimi poteſt, minime complicatam, cognitos ſupponit quantitatum vtcunque expreſſarum diviſores, vel rationem hos detegendi; qui ſi in poteſtate ſint, diviſores numeratoris, qui & denominatorem dividunt, facile ſeliguntur Et offerunt ſeſe diviſores iſti in multis caſibus, ſimplices autem in omnibus. Sic vltro apparet facti $aa + ab$ diviſorem ſimplicem eſſe a, neque multo difficilius perſpicitur facti $aa + ab - ac - bc$, diviſores eſſe $a + b$ & $a - c$. Verum factorum magis compoſitorum diviſores multo difficilius deteguntur, diſtincti etiam & radicalibus carentes; neque huius loci ſunt regulæ, quibus ad eos deducimur. Quare adhuc res tentaminibus relinquenda eſt, quæ eo ſemper multum iuvantur, ſi termini, ex quibus factum componitur, cuius diviſores quærimus, ſecundum dignitates ordinentur alicuius litterarum, quæ in illo inſunt. Eo enim facto plerumque apparet quantitas, quæ illorum terminorum plurimos dividit, poteſtque tentari, an eadem dividat omnes. Communem autem duabus quantitatibus diviſorem, ſi quis ſit, eumque maxime complicatum detegendi, methodus eſt plane ſimilis illi, qua communis duorum numerorum diviſor maximus reperitur.

PRO-

PROBLEMA VII.

§. 119. *Datarum duarum quantitatum diſtincte expreſſarum &c, absque radicalibus, invenire diviſorem communem maxime complicatum.*

Solvtio.

§. 120. I. Sint datæ quantitates A & B. Si ergo alicuius earum A diviſor aliquis appareat, qui ſit δ, quære dividendo, an δ & quantitatem B metiatur. Si metiatur, nota factorem iſtum δ tanquam vnum eorum ex quibus diviſor communis maxime complicatus multiplicando componitur, niſi ipſe δ diviſor iſte fuerit. Si autem diviſor ille δ non metiatur quantitatem B, diviſa per illam A ſi prodeat α, idem erit communis diviſor maximus quantitatum α & B, qui eſt A & B. Sed quia α iam minus complicata eſt, diviſor communis maxime complicatus iam aliquanto facilius detegetur. Poteſt autem & B ita tractari, quo facto ſi prodeat quotus β, idem erit communis diviſor quantitatum α & β, qui eſt priorum A & B. Verum & ſi α multiplicetur per n, quæ non metitur β, & β per m, quæ non metitur α, idem quantitatum $n\alpha$ & $m\beta$ communis diviſor erit, qui eſt quantitatum α & β, vel A & B.

§. 121. II. Si communis diviſor maximus non appareat, ſive ita præparatæ fuerint quantitates A & B, ſive relictæ, quales initio fuere, harum quantitatum eam, cuius termini ex paucioribus factoribus ſimplicibus conſtant, (quam pono eſſe B) multiplica per quamcunque quantitatem Q, quæ non metitur alteram A, verum quam plurimos terminos quantitatis A ea multiplicatione producit. Fac $C = A - BQ$; erit C plerumque minus complicata quam A. Diviſor autem communis quantitatibus C & B idem quoque quantitatibus A & B communis erit, nec vllus alius.

§. 122. III. Si neque quantitatum C & B diviſor communis appareat, tracta has quantitates, quemadmodum tractaſti A & B, eumque laborem repete, donec tandem vel vnitatem, communem omnium quantitatum diviſorem, vel alium nanciſcare.

DEMONSTRATIO.

I. Conſideratis quantitatibus $aabcd$ & $acef$, quorum communis diviſor maximus eſt ac, mox apparet, ſi prior dividatur per b vel d, quæ non metitur poſteriorem, vel multiplicetur, communem diviſorem maximum non mutari; neque id magis contingere ſi poſterior per e vel f dividatur, aut ſi alterutra

terutra harum quantitatum, vel alia quæcunque, quæ priorem non metitur, eam $acef$ multiplicet: diviſorem autem a vtrique quantitati communem, ſemper eſſe factorem diviſoris maxime complicati ac, niſi ipſe fuerit.

II. Si ſit $C = A - BQ$, erit $C + BQ = A$. Quantitas ergo quæ metitur quantitatem B, & quantitatem BQ metietur. Si ergo eadem & quantitatem C metiatur, metietur $BQ + C$, id eſt quantitatem A. Contra quantitas quæ B quidem metitur ſed non C, cum iterum metiatur BQ, non metietur $BQ + C$, ſive A. Ergo maxime complicata earum, quæ metiuntur B & C, etiam maxime complicata erit illarum, quæ B & A metiuntur.

Exemplum.

§. 123. Sit quantitatum

$2qnp^3 + 6np^2q^2 - 4npq^3 - 4nq^4$

& $4mp^2q^2 - 8mp^4 - 2mp^3q + 6mpq^3$ inveniendus communis diviſor maxime complicatus. Vtraque quantitas dividitur per numerum 2, qui ergo vel quæſitus diviſor eſt, vel aliquis ex eius factoribus. Porro ſi prius quantum dividatur per qn, quod non dividit poſterius, hoc autem per pm, quod non dividit prius, quanta prodeunt,

$p^3 + 3p^2q - 2pq^2 - 2q^3$

& $-4p^3 - p^2q + 2pq^2 + 3q^3$

quorum idem eſt communis diviſor maximus, qui datorum. Priori horum multiplicato per -4, prodit

$$-4p^3-12p^2q+8pq^2+8q^3,$$

quo a poſteriori ſubtracto, relinquitur $11p^2q-6pq^2-5q^3$.

Eſt ergo & quantitatum

$$p^3+3p^2q-2pq^2-2q^3$$

$$\& \quad 11p^2q-6pq^2-5q^3,$$

idem diviſor maxime complicatus, qui initio aſſumptarum. Poſterior vero harum quantitatum, ſi per q dividatur, non mutatur diviſor quæſitus, quia q priorem non dividit. Prodit autem hac diviſione

$$11p^2-6pq-5q^2;$$

cuius quantitatis diviſores non difficulter apparent hi $11p+5q$ & $p-q$, quorum priorem non poſſe dividere quantitatem $p^3+3p^2q-2pq^2-2q^3$ mox perſpicitur. Poſterior autem cum vtique dividat, aſſumpto factore ante reperto 2, communis quantitatum ab initio poſitarum diviſor maxime complicatus eſt $2p-2q$.

§. 124. Si ita ſeſe non obtuliſſet communis quantitatum diviſor maxime complicatus, poterant loco earum, quæ poſtremo repertæ ſunt, eadem methodo minus complicatæ ſubſtitui.

Scho-

Scholion.

§. 125. *Arithmeticæ vniverſalis*, cuius elementa tantum non omnia dictis continentur, quæque & *calculus litteralis*, vel *Algorithmus ſpecioſus* dici ſolet, infinitus vſus eſt, non in ſolutione tantum problematum, verum in Syntheſi etiam, cum; quid ex certi generis datis hoc illove modo connexis, ſequatur, lubet perſpicere. Ita mox apparet, ſi $a + b$ ducatur in $a + b$, quadratum fore $aa + 2ab + bb$; ſi vero $a - b$ in $a - b$ multiplicetur, fore quadratum $aa - 2ab + bb$; ſed ſi $a + b$ ducatur in $a - b$, factum prodire $aa - bb$, quæ differentia eſt quadratorum ex a & b. Sunt plurima alia theoremata, quæ eadem facilitate deteguntur, vel ſola multiplicatione adhibita, & inter hæc maxima pars eorum, quibus conſtat Elementum II. *Euclidis*; cuius rei exempla abunde occurrent in ſequentibus.

SECTIO III.

DE SOLVTIONE PROBLEMATVM SIMPLICIVM ARITHMETICORVM.

PROBLEMA VIII.

§. 126.

Quæritur numerus, cuius triplo ſi addatur eiusdem numeri quadruplum, ſumma numerum illum excedat vnitatibus octo.

PRÆPARATIO.

§. 127. Æquatio fit facile, ſi numerus quæſitus dicatur x, ac, quaſi x datus eſſet, quæ in quæſtione per vocabula enunciantur, exprimantur per ſigna adhuc expoſita quocunque modo. Eſt nempe triplum numeri quæſiti $3x$, quadruplum $4x$.

SOLVTIO.

§. 128. Per conditionem vero problematis

eſt $3x + 4x = x + 8$

hinc $3x + 4x - x = 8$

id eſt $6x = 8$

Ergo $x = \frac{8}{6}$ ſive $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Huius

Huius enim numeri $\frac{4}{3}$ triplo 4 ſi addatur quadruplum $\frac{16}{3}$ ſive $5\frac{1}{3}$ ſumma fit $9\frac{1}{3}$, quæ numerum $1\frac{1}{3}$ vnitatibus octo excedit.

Scholion.

§. 129. Tranſpoſitis in vnam æquationis partem omnibus terminis, quibus ineſt x, reliquis in alteram, hi termini vniti ſunt. Sic repertum eſt ſextuplum quæſiti $= 8$, cuius diviſione per numerum 6 prodiit x.

PROBLEMA VIIII.

§. 130. *Propoſitum numerum* a *in duos partiri, quorum prior per datum numerum* n *multiplicatus, factum exhibeat excedens alterum numero dato* b.

PRÆPARATIO.

§. 131. Si pars prima numeri a fuerit x, erit altera $a - x$; illa per n multiplicata, prodit nx, quod factum æquale ſtatuitur parti $a - x$ auctæ numero b.

SOLVTIO.

Eſt ergo $nx = a - x + b$

hinc. $nx + x = a + b$

ſive $(n+1)x = a + b$

Et $x = \frac{a+b}{n+1}$.

Scholion.

§. 132. Problema eodem modo ſolutum eſt, quo præcedens, transpoſitione, vnione, diviſione. Sed vnio aliter fieri non potuit, quam quærendo factorem complexum, qui x multiplicans, produxit $nx+x$.

§. 133. Si iam numeri dentur, quorum loco ſunt litteræ problematis, nulla in ſolutione arithmetica difficultas eſt. Sit $a=80$, $b=40$, $n=11$, erit $x=\frac{80+40}{12}=\frac{120}{12}=10$, & hinc $a-x=70$. Et patet factum nx quod ſecundum hæc eſt 110, excedere numerum 70 vnitatibus 40.

PROBLEMA X.

§. 134. *Datum numerum* a *in duos partiri, quorum prior ſi dividatur per numerum datum* m, *alter autem per* n *itidem datum, ſumma quotorum ſit* b.

PRÆPARATIO.

§. 135. Parte prima nunc quoque per x, altera per $a-x$ deſignata, prior quotus fit $\frac{x}{m}$, alter $\frac{a-x}{n}$.

SOLV-

SOLVTIO.

§. 136. Eſt adeo $\frac{x}{m} + \frac{a - x}{n} = b$. Huius æquationis termini omnes ſi multiplicentur per n, fit $\frac{nx}{m} + a - x = nb$, atque huius terminis in m ductis, prodit

$$nx + ma - mx = mnb;$$

hinc

$$nx - mx = mnb - ma$$

$$(n - m)\,x = mnb - ma$$

$$x = \frac{mnb - ma}{n - m}.$$

Scholion.

§. 137. Termini æquationis, in quibus x continebatur, in vnam partem ſoli tranſponi non poterant, propterea quod in termino complexo $\frac{a - x}{n}$, x quantitati a iuncta fuit. Tollendum ergo fuit vinculum iſtud, multiplicatione per denominatorem fractionis n, qua numeratorem $a - x$ proditurum eſſe, facile fuit prævidere. Hoc facto tranſpoſitio fieri, atque reliqua abſolvi poterant, hunc in modum:

$$\frac{n}{m}x+a-x=nb$$

$$\frac{n}{m}x-x=nb-a$$

$$\left(\frac{n}{m}-1\right)x=nb-a$$

$$x=(nb-a):\left(\frac{n}{m}-1\right)$$

Verum, quæ ita prodit expreſſio quæſiti, impedita eſt fractione fractionis, quam etſi ad fractionem regularem reducere, vtroque termino in m ducto, non eſt difficile; præſtabat tamen denominatore m calculi initio ſublato, non regularitati tantum fractionis, qua quæſitum x exprimeretur, conſulere, verum etiam calculum vniverſum expeditiorem reddere.

§. 138. Vtile tantum non ſemper eſt, denominatores ita auferre, maxime eos, qui quantitatem quæſitam dividunt, & ſæpe neceſſarium. Id autem cum aliis modis effici poſſit, commodiſſime peragitur eo, quem hic vſurpavimus, multiplicando primum omnes æquationis terminos per vnum denominatorum, tum per alterum, deinde per tertium & per reliquorum quemlibet, ſi plures fuerint. Nam & per factum ex omnibus denominatoribus, ſi omnes æquationis termini multiplicentur,

tur, denominatores deinde auferri poſſunt per regulas, quibus fractiones reducuntur; ſed id paullo magis impeditum videtur. Sic ſi in æquatione huius problematis

$$\frac{x}{m} + \frac{a - x}{n} = b$$

termini omnes multiplicentur per mn, fit

$$\frac{mnx}{m} + \frac{mna - mnx}{n} = mnb,$$

& factoribus, qui numeratori cuivis cum ſuo denominatore communes ſunt, ſublatis

$$nx + ma - mx = mnb.$$

§. 139. Atque per has regulas omnes æquationes, in quibus x cum datis non aliter in vnum terminum coaluit, quam quod per horum aliqua multiplicatum ſit vel diviſum, ad formam

$$x = A$$

reducuntur, quæ ſimpliciſſima eſt omnium, quam æquatio habere poteſt, ob eamque rem & *æquatio ſimplex* vocatur. A notat quantitatem ex cognitis vtcunque complicatam. Vniverſa *reductio* TRANSPOSITIONE ea, qua termini, in quibus incognitum ineſt, in vnam æquationis partem transferuntur, ii, in quibus nihil eſt incognitum, in alteram; VNIONE, qua auferuntur quæ ſeſe deſtruunt, reliqua, quantum fieri poteſt, coaleſcunt, multiplicatores

tores eiusdem quantitatis in vnum colliguntur multiplicatorem complicatum; & DIVISIONE per multiplicatorem quantitatis incognitæ, abſolvitur. Nam ad diviſionem & multiplicatio referri poteſt, vtpote quæ eſt diviſio per fractum. Verum transpoſitio atque vnio vt legitime abſolvi poſſint & absque multo labore, copula ſæpe auferenda eſt, & terminus complicatus in ſuos ſimplices ſolvendus, & quilibet denominator tollendus, quo quantitas incognita adficitur.

PROBLEMA XI.

§. 140. *Datis duobus numeris* a *&* b *reperire tertium* x, *qui a datis ablatus*, *reſidua relinquat*, *quorum data ſit ratio*, m : n.

PRÆPARATIO.

§. 141. Reſidua ſunt $a - x$ & $b - x$, quarum ratio cum ſit $m : n$, eſt

$$(a - x) : (b - x) = m : n.$$

Hinc autem æquatio facile fit, multiplicando media atque extrema. *Arith.* §. 169.

SOLVTIO.

§. 142. Nempe $n(a - x) = m(b - x)$

ſive $na - nx = mb - mx$

$$mx - nx = mb - na$$

$$(m-n)x = mb - na$$

$$x = \frac{mb - na}{m - n}.$$

Scholion.

§. 143. Si $a=20$, $b=17$, & $m:n=5:4$, eſt $mb=85$ & $na=80$, hinc $x=5$, qui numerus ſi ſubtrahatur a datis, relinquuntur 15 & 12, quorum vtique ratio eſt 5 : 4.

Si vero $a=7$ & $b=9$, & $m:n=5:6$ eſt $mb=45$ & $na=42$, hinc $x=\frac{3}{-1}=-3$. Hunc autem numerum algebraice ſubtrahere eſt addere, §. 56. quo facto prodeunt numeri 10 & 12, eſtque $10:12=5:6$.

§. 144. Sic problemata ſimplicia, id eſt, quæ ad æquationes ſimplices reducuntur, ſemper poſſibilia ſunt, ſemperque reperitur aliquis valor quæſiti x, plane determinatus, & vnicus, ſed is aliquando poſitivus, aliquando negativus. Horum autem vltimum ſi ſit, ſæpe in problemate aliquid mutandum eſſe apparet, quemadmodum in exemplorum datorum altero, non ſubtrahendus fuit numerus repertus 3 a datis, ſed illis addendus, ſiquidem hæc vocabula non ſenſu vniverſali, ſed vulgari arithmetico ſumantur.

PRO-

PROBLEMA XI.

§. 145. *Invenire tres numeros, quorum primus ſi addatur ſecundo, fiat ſumma* a, *ſi primus addatur tertio, fiat* b, *& ſi ſecundus tertio iungatur*, c.

PRÆPARATIO.

§. 146. Video, quemlibet numerorum reperiri poſſe, data omnium ſumma. Hæc enim ſi ſit x, ponaturque cognita eſſe, eſt $x - a$ numerorum quæſitorum tertius, $x - b$ ſecundus, & $x - c$ primus.

SOLVTIO.

§. 147. Eſt ergo

$$(x-a)+(x-b)+(x-c)=x$$

ſive $x-a+x-b+x-c=x$

hinc $2x=a+b+c$

& $x=\frac{a+b+c}{2}$.

Scholion.

§. 148. Sit $a=20$, $b=40$, $c=30$, erit $x=45$; hinc numerorum quæſitorum primus $x-c=15$, alter $x-b=5$, & tertius $x-a=25$: eſtque $15+5=20=a$; $15+25=40=b$, & $5+25=30=c$.

§. 149. Quæſtio autem ſæpe ad ſimplicitatem reducitur ea via, quam hic ſecuti ſumus,

non

non directe quærendo, quæ inveſtiganda proponuntur, ſed aliud quodpiam x, a quo illa ita pendent, vt hoc cognito latere non poſſint. Hoc artificio quæſita tria ad vnum reducta ſunt, non contemnendo laboris compendio.

PROBLEMA XII.

§. 150. *Eſt aliquis nummorum numerus inter plures æqualiter diſtribuendus, quorum quilibet ſi accipere debeat numerum* a, *deficiunt nummi numero* b; *ſin cuilibet* c *dentur, ſuperſunt nummi* d. *Dicendum eſt, quot ſint nummi, & inter quem hominum numerum diſtribuendi.*

PRÆPARATIO.

§. 151. Duæ ſunt quæſtiones, quarum vnam qui ſoluit, ſolvit & alteram. Dato enim nummorum numero, ſi addatur b, & ſumma dividatur per a; vel ſi ab eodem numero ſubtrahatur d & reſiduum dividatur per c, prodit numerus hominum. Contra numerus hominum multiplicatus per a, dat nummorum numerum, ſi a facto ſubtrahatur b; qui idem prodit, numero hominum per c multiplicato, atque ad factum numero d addito. Eadem hæc modum ſuppeditant, quodlibet horum problematum ſolvendi.

SOLVTIO.

§. 152. Sit numerus nummorum x, erit per primum numerus hominum $\frac{x+b}{a}$, per alterum autem idem numerus hominum erit $\frac{x-d}{c}$, ergo

$$\frac{x-d}{c} = \frac{x+b}{a}$$

$$\frac{ax-ad}{c} = x+b$$

$$ax-ad = cx+bc$$

$$ax-cx = bc+ad$$

$$x = \frac{bc+ad}{a-c}$$

§. 153. Sit numerus hominum inter quos nummi diſtribuendi ſunt, y, erit per primum numerus nummorum $ay-b$, per alterum autem idem nummorum numerus erit $cy+d$, hinc

$$ay-b = cy+d$$

$$ay-cy = b+d$$

$$y = \frac{b+d}{a-c}.$$

Scholion.

§. 154. Sit $a=5$, $b=8$, $c=3$, $d=6$, erit $bc=24$, & $ad=30$, hinc $x=\frac{54}{2}=27$,

& y

& $y = \frac{14}{2} = 7$; patetque, ſi cuilibet horum ſeptem quinque nummi dandi ſint, requiri 35, id eſt octo nummis plures quam 27. Si vero cuilibet dentur 3, tantum impendi 21, & ſex ſupereſſe.

PROBLEMA XIII.

§. 155. *Sunt duæ res miſcendæ. Prioris vncia valet* a, *poſterioris* b. *Quæritur quo pondere prior, quove poſterior ſumenda ſit, vt mixti vnciæ* c *valeant pretium* d.

PRÆPARATIO.

§. 156. Dato pondere prioris rei, quod dico x, datur & pondus poſterioris $c - x$. Pondera autem pretiis proportionalia ſunt: vnde ſi fiat $1 : x = a : ax$, eſt ax pretium quantitatis prioris rei in miſturam aſſumpta; eodemque modo pateſcit $bc - bx$ notare pretium rei poſterioris.

Solvtio.

Hinc autem $ax + bc - bx = d$

$$ax - bx = d - bc$$

$$x = \frac{d - bc}{a - b}.$$

Scho-

Scholion.

§. 157. Sit $a = 32$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 24$ vnc. $d = 480$, erit $bc = 12$, hinc $x = \frac{468}{31\frac{1}{2}} = \frac{936}{63} = \frac{104}{7}$. Pondus ergo alterius rei $c - x$ erit $24 - \frac{104}{7} = \frac{168 - 104}{7} = \frac{64}{7}$, atque ratio horum ponderum $104 : 64 = 13 : 8$.

§. 158. Non autem ad id, quod in problemate quærendum proponitur, æquatio reſtricta eſt: verum quælibet quantitas, quæ in problema ingreditur, ſive dati ſive quæſiti nomine ingrediatur, ex ea reperiri poteſt, ſi id, quod quærendum proponebatur, iam inter data referatur. In problemate, quod præ manibus eſt, hæ quantitates occurrunt:

a, pretium vnciæ prioris rei,
b, pretium vnciæ poſterioris,
c, quantitas mixti, per pondus data,
d, pretium huius quantitatis mixti,
e, quod impoſterum ſcribetur loco x, quantitas prioris rei in miſcelam aſſumpta. Harum quatuor quæcunque ſi dentur, per eandem æquationem, hoc modo expreſſam

$$ae + bc - be = d$$

datur quintum.

§. 159. Sit 1°. ex reliquis quærendum pretium a, erit $ae = d + be - bc$,

$$a = \frac{d + be - bc}{e}$$

Sit 2°. ex reliquis determinandum pretium b, erit $bc - be = d - ae$,

vel $(c - e)b = d - ae$,

hinc $b = \frac{d - ae}{c - e}$

Sit 3°. inveſtiganda quantitas mixti c,

erit $bc = d - ae + be$

$$c = \frac{d - ae + be}{b}$$

Quod 4°. loco fuit, pretium d, per ipſam æquationem $d = ae + bc - be$ datur.

Sed 5°, e in problemate repertum eſt, hoc modo

$$e = \frac{d - bc}{a - b}.$$

§. 160. Sit $a = 2$, $b = 3$, $c = 12$, $d = 30$, hinc $bc = 36$ ex quibus elicitur $e = \frac{-6}{-1} = 6$.

Quodſi iam ex horum quatuor datis reperiundum ſit quintum, erit

Pro 1°, $be = 18$, & $bc = 36$, hinc $a = \frac{12}{6} = 2$.

Pro 2°, $ae = 12$, hinc $b = \frac{18}{6} = 3$

Pro 3°, $ae = 12$, $be = 18$, hinc $c = \frac{36}{3} = 12$.
Pro 4°, $ae = 12$, $bc = 36$, $be = 18$, hinc $d = 30$.
Pro 5°, res acta eſt.

Patet autem numeros hoc modo ex aliis elicitos eosdem eſſe, qui initio aſſumpti ſunt.

§. 161 Ceterum vno problemate ſoluto ingens ſemper aliorum numerus ſolvitur, in quibus ſcilicet quæſita a datis eodem modo pendent. Vt ſi duæ res permiſcendæ ſint tales, quæ, poſtquam miſtæ ſunt, magnitudinem conficiunt ſummæ magnitudinum aſſumptarum æqualem, ſitque iam

a, magnitudo vnciæ prioris rei,
b, magnitudo vnciæ rei poſterioris,
c, pondus mixti,
d, magnitudo mixti,
e, pondus quantitatis prioris rei in miſcelam aſſumptæ:

quaerenda hic sunt pondera
rerum permiscendarum, quarum summa c

eædem æquationes, quibus modo vſi ſumus, ad horum quodvis ex quatuor reliquis eliciendum ſervient; quod facile perſpiciet, qui problema iſtud ſolvere tentaverit. Incidet enim in eandem æquationem, e qua hæ omnes fluxere. Verum duo vel plura problemata hoc modo inter ſe convenire, raro facilius perſpicitur, quam quodlibet eorum ſeorſim ſolvimus.

PRO-

PROBLEMA XIIII.

§. 162. *Viator procedens a termino* A *conficit vna die viam* a. *Elapſo tempore* b *eum per eandem viam ſequitur alius viator, a termino* B, *qui ab* A *verſus eam partem, verſus quam viator* A *tendit, diſtat intervallo* c. *Hic vna die abſolvit viam* d. *Dicendum eſt, quam viam confecturus ſit viator prior, antequam eum alter attingat.*

PRÆPARATIO.

§. 163. Ponitur vtriusque viatoris celeritas æquabilis eſſe, vt viæ confectæ ſint proportionales temporibus, quibus conficiuntur. Sit via quæſita primi x, erit via alterius $x - c$, quia hic initio minus diſtat a termino, verſus quem viator vterque tendit, intervallo c. Dies vna ſit $= 1$. Erit $a : x = 1$ ad tempus, quo prior viator ſolus proficiſcitur, antequam nempe ad eum pertingat alter. Quod ergo tempus erit $\frac{x}{a}$. Sic & $d : (x - c) = 1$ ad tempus, quo alter priorem perſequitur, quod adeo per $\frac{x - c}{d}$ exprimetur. Hoc iam tempus cum priore minus ſit quantitate b, facile fit æquatio.

SOLVTIO.

§. 164. Eſt nempe $\frac{x}{a} = \frac{x-c}{d} + b$

$$\frac{dx}{a} = x - c + bd$$

$$dx = ax - ac + abd$$

$$dx - ax = abd - ac$$

$$x = \frac{abd - ac}{d - a}.$$

Scholion.

§. 165. Sit $a = 4$, $d = 5$, $b = 3$, $c = 10$ erit $abd = 60$ & $ac = 40$, hinc $x = 20$, & $x - c = 10$, patetque, priorem viatorem quinque diebus indigere ad viam 20 conficiendam: hinc alteri duos tantum dies reſtare, quibus eum aſſequi debeat. Duobus autem his diebus viator alter 10 conficit milliaria, atque a termino, a quo prior digreſſus eſt, 20 milliaribus digreditur.

§. 166. Porro, quod apud ſuperius problema notavimus, hic quoque tenendum eſt, ex quatuor quibuslibet eorum, quæ per litteras a, b, c, d, x denotantur, ſi dentur, reperiri quintum poſſe, quod aliquanto minus impeditum ſit, ſi in locum x alia littera e ſurrogetur, quo incogniti notione, quam cum

litte-

littera x iungere conſuevimus, tanto minus turbemur; quo facto æquatio ita ſcribi poteſt:

$$de - ae = abd - ac.$$

§. 167. Non eſt inter ea, quæ per litteras huius æquationis denotantur, tempus, quod prior viator in viam e, alter vero in viam $e - c$ impendit: id autem ex viis iſtis, ſi dentur, facile reperitur, per ea quæ in præparatione dicta ſunt. Si tempus, quod prior viator inſumit, ſit f, eſt $f = \frac{e}{a}$, & $af = e$, atque $a = \frac{e}{f}$ Vnde tempus, quo viam $e - c$ conficit viator poſterior, facile elicitur.

§. 168. Poteſt autem in æquatione loco e ſcribi illi æquale factum af, eaque re nova æquatio produci hæc:

$$adf - aaf = abd - ac,$$

vel, omnibus per a diviſis,

$$df - af = bd - c,$$

per quam ex datis reliquis immediaté reperitur

$$f = \frac{bd - c}{d - a}.$$

Per eandem æquationem, ſi inter data ſit f, reperietur quodlibet reliquorum, quæ per litteras æquationis deſignantur.

§. 169. In hac autem, vel & in priori æquatione, ſi vbique in locum litteræ a ſurrogetur $\frac{e}{f}$, quod vidimus eſſe $= a$, fit æquatio

$$df - e = bd - c$$

quæ f iterum dat per alia, quam per quæ prius dabatur, atque e, quod in præcedenti æquatione non infuit, per eadem exhibet, per quæ præcedens ea æquatio exhibet a.

§. 170. Vt, ſi detur via diurna alterius viatoris d, tempus b, intervallum locorum c, atque via a primo viatore confecta e, reperietur tempus f, quo eam viam abſolvit, æquatione ita reducta:

$$df = bd - c + e,$$

$$f = \frac{bd - c + e}{d}$$

$$\text{vel} \quad f = b + \frac{e - c}{d}.$$

§. 171. Sic & ſi tempus, quo alter viator priorem perſequitur, vocetur g, cum ſit $g = f - b$, itemque $g = \frac{e - c}{d}$, poſſunt per hæc iterum aliæ litteræ ex qualibet æquationum repertarum eliminari, earum loco g in eam introducto, quo facto æquatio ad novas quæſtiones accommodatur, in quibus ſcilicet ea, ea, quæ per litteras denotantur, quæ iam in æquatione inſunt, tanquam data vel quæſita occurrunt.

PROBLEMA XV.

§. 172. *Quæruntur duo numeri, a quorum poſteriori ſi vnitas dematur, addaturque ad priorem, fiat prior alterius duplus; ſi vero a priori detracta vnitas addatur ad poſteriorem, fiant numeri æquales.*

SOLVTIO.

§. 173. Sit prior numerus x, alter y, erit per conditiones problematis,

$$x+1=2(y-1) \quad \& \quad x-1=y+1,$$

vel $x+1=2y-2$.

Quæro ex vna harum æquationum x, quaſi y datus eſſet. Si in eam rem prior vſurpetur, reperio

$$x=2y-3$$

per quam æquationem dato y, vtique datur x. Hunc numeri x valorem infero loco x in æquationum initio repertarum alteram, eodem modo quemadmodum x in hac æquatione ineſt. Fit hoc facto ex æquatione illa

$x-1=y+1$ hæc altera

$2y-3-1=y+1$, in qua non occurrit littera x. Hæc autem reducta dat

$y=1+1+3=5$.

Dete-

Detecto ita numero y, reperitur x in æquatione $x = 2y - 3$ in locum litteræ y ſurrogando eius valorem ita repertum 5, quo fit $x = 10 - 3 = 7$. Sunt ergo numeri quæſiti 7 & 5.

Scholion.

§. 174. Hæc ratio eſt ſolvendi problemata, in quibus duo quærenda proponuntur. Vna in eam rem æquatio non ſufficit, vtpote per quam vnum tantum quæſitorum determinatur ex altero, tanquam dato. Si autem duæ æquationes dentur, repertus hoc modo valor vnius quæſitorum per earum vnam, ſemper inferri poteſt in alteram ſic, vt vna tantum in hac littera relinquatur, quæſitum denotans. Quod ergo, æquatione legitime reducta, dabitur, atque hinc porro quæſitorum alterum reperietur.

§. 175. Cæterum duæ æquationes ita vniri, vt quicunque terminus, qui in vtraque infuit, evaneſcat, & per alias operationes poſſunt, quæ ſuo loco tradentur. Simplicibus enim æquationibus *ſubſtitutionis methodus*, qua hic vſi ſumus, convenientiſſima videtur, neque aliam hic quærendam eſſe. Sed tamen ſæpe non inutile eſt alteram æquationem, ex qua litteram, cuius valor per priorem repertus eſt, eliminare volumus, non nihil præparaſſe, cuius rei exempla mox occurrent.

PROBLEMA XVI.

§. 176. *Invenire duos numeros, a quorum poſteriori ſi dematur datus* a, *addaturque ad priorem, fiat ratio numerorum* m : n. *Si vero a priori dematur idem datus* a, *addaturque ad poſteriorem, numerorum ratio fiat* p : q.

SOLVTIO.

§. 177. Si numeri quærendi dicantur x & y, proportiones problematis ita exponuntur:

$$(x+a):(y-a)=m:n,$$
$$(x-a):(y+a)=p:q.$$

Hinc autem facile fiunt æquationes hæ

$$n(x+a)=m(y-a) \;\&\; q(x-a)=p(y+a)$$

vel $nx+na=my-ma$ & $qx-qa=py+pa$.

Ex priori harum æquationum porro fit

$$nx=my-ma-na$$
$$x=\frac{my-ma-na}{n}$$

Alterius autem æquationis membra ſi dividantur per q, fit ea æquatio

$$x-a=\frac{py+pa}{q}$$

Si iam in æquatione ita præparata in locum x ſubſtituatur eius valor per priorem repertus, prodit

$$\frac{my-ma-na}{n}-a=\frac{py+pa}{q};$$

hinc vero

$$my - ma - na - na = \frac{npy + npa}{q},$$

$$mqy - mqa - 2nqa = npy + npa$$

$$mqy - npy = npa + 2nqa + mqa$$

$$(mq - np)y = npa + 2nqa + mqa$$

$$y = \frac{npa + 2nqa + mqa}{mq - np}.$$

§. 178. His ita factis problema ſolutum eſt: quia, dato per poſtremam hanc æquationem y, vtique datur & x, per æquationem ante repertam

$$x = \frac{my - ma - na}{n}.$$

Si autem x immediate ex datis determinandus ſit, id præſtabitur, in locum litteræ y huius æquationis, vel alicuius earum, e quibus hæc orta eſt, vel in quam vtcunque transformari poteſt, ſubſtituendo valorem litteræ y repertum. Id ſi fiat in æquatione

$$nx = my - ma - na,$$

fit $nx = \frac{mnpa + 2mnqa + mmqa}{mq - np} - ma - na$

& hinc $x = \frac{mnpa + 2mnqa + mmqa}{mnq - nnp} - \frac{ma}{n} - a.$

quæ æquatio numerum x per ea ſola exhibet, quæ initio data fuere.

Scholion.

§. 179. Reſtat, vt valores quæſitorum x & y exhibeantur, quam fieri poteſt, ſimpliciſſime, ne calculus, quem dirigere formulæ repertæ debent, præter neceſſitatem longus & impeditus fiat. Id autem præſtabitur ex earum expreſſionibus auferendo, quæ ſeſe deſtruunt, fractiones per terminos ſimpliciſſimos exhibendo, atque factores, quantum fieri poteſt, ſeparando. Quæ autem ſeſe deſtruant, perſpici raro poteſt, niſi fractiones ad eandem denominationem reducantur: quod ergo ante omnia faciendum erit, vbicunque opus eſt.

§. 180. Poteſt autem æquatio

$$y = \frac{npa + 2nqa + mqa}{mq - np}$$

ita paullo ſimplicius ſcribi

$$y = a \times \frac{n(p+q) + q(n+m)}{mq - np};$$

ſed æquatio

$$x = \frac{mnpa + 2mnqa + mmqa}{mnq - nnp} - \frac{ma}{n} - a$$

ſi omnia ad eandem denominationem reducantur, & quæ prodeunt, vniantur, fit

$$x = \frac{mnqa + 2mnpa + nnpa}{mnq - nnp}$$

& ſi

& ſi vterque fractionis terminus dividatur per n,

$$x=\frac{mqa+2mpa+npa}{mq-np},$$

quæ porro reduci poteſt in hanc

$$x=a\times\frac{m(q+p)+p(m+n)}{mq-np}$$

ſecundum has formulas calculus expedite inſtituetur, ſiquidem pro litteris ſufficiantur numeri.

§. 181. Sit $a=3$, $m=6$, $n=7$, $p=4$, $q=9$ erit $p+q=13$, & $m+n=13$, ſed $mq=54$ & $np=28$, hinc $mq-np=26=2.13$

His ergo numeris legitime poſitis fit

$$y=3\times\frac{7.13+9.13}{2.13}=3\times\frac{7+9}{2}=24$$

$$\&\ x=3\times\frac{6.13+4.13}{2.13}=3\times\frac{6+4}{2}=15$$

Eſt autem $(15+3):(24-3)=18:21=6:7$

& $(15-3):(24+3)=12:27=4:9$

PROBLEMA XVII.

§. 182. *Per duos tubos aqua continuo in vas influit & æquabiliter. Quod per priorem influit horis numero* a, *cum eo quod fluit per poſteriorem, horis numero* b, *conficit menſuras* c; *quod autem per priorem tubum influit horis*

horis d, *vna cum eo, quod influit per poſteriorem horis* e, *conficit menſuras* f. *Dicendum eſt quantum aquæ prior, quantumque poſterior tubus reddat vna hora?*

PRÆPARATIO.

§. 183. Si x dicatur quantitas aquæ, quæ per priorem tubum fluit vna hora, vel numerus menſurarum; & y ea, quæ eodem tempore fluit per tubum poſteriorem, ponanturque hæ quantitates notæ eſſe: facili calculo reperiuntur quantitates c & f, ex datis. Eſt ſcilicet ax quantitas aquæ, quæ per priorem tubum influit horis a, quia, ſi horam ſignet 1, eſt $1 : a = x : ax$; ac propter ſimilem rationem dx notat quantitatem aquæ, quam idem tubus reddit horis d; & by, ey eas, quas tubus alter reddit temporibus b & e. Dantur ſummæ ex his quantitatibus legitime combinatis.

SOLVTIO.

§. 184. Per conditiones nempe in problemate dictas, eſt

$ax+by=c$, & $dx+ey=f$

$ax=c-by$

$x=\frac{c-by}{a}$. Huius autem ſubſtitutione fit æquatio poſterior

$$\frac{cd-bdy}{a}+ey=f$$

$$cd-bdy+aey=af$$

$$aey-bdy=af-cd$$

$$(ae-bd)y=af-cd$$

$$y=\frac{af-cd}{ae-bd}$$

Hoc autem valore in priorem æquationem illato, fit

$$ax=c-\frac{abf-bcd}{ae-bd},$$

vel, terminis cognitis ad eundem denominatorem reductis,

$$ax=\frac{ace-bcd-abf+bcd}{ae-bd},$$

atque iis, quæ ſeſe tollunt, vnacum diviſore communi a, ſublatis,

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}.$$

Scholion.

§. 185. Sit 1°, $a=2$, $b=3$, $c=21$, id eſt, fluat in priori experimento tubus prior duabus horis, alter horis tribus, reddatque vterque coniunctim 21 menſuras aquæ. In poſteriori experimento ſint tempora $d=7$, $e=6$, quantitas autem aquæ $f=51$, erit $ce=126$, $bf=153$, $ae=12$, $bd=21$, $af=102$, $cd=147$, ergo

ergo $x = \frac{126 - 153}{12 - 21} = \frac{-27}{-9} = 3$, & $y = \frac{102 - 147}{12 - 21} = \frac{-45}{-9} = 5$. Reddit ergo prior tubus, vnius horæ tempore, 3 aquæ menſuras, alter autem 5.

Sit vero 2°, $a = 6$, $b = 4$, & $c = 22$, deinde $d = 9$, $e = 7$, $f = 31$, erit $ce = 154$, $bf = 124$, $ae = 42$, $bd = 36$, $af = 186$, $cd = 198$, hinc $x = \frac{154 - 124}{42 - 36} = \frac{30}{6} = 5$, ſed $y = \frac{186 - 198}{42 - 36} = -\frac{12}{6} = -2$. Per priorem ergo tubum ſpatio vnius horæ influxere aquæ menſuræ 5; per alterum autem non modo nihil influxit, verum etiam vnius horæ tempore effluxere menſuræ duæ. Res ex iis, quæ §. 11. de ſignificatu ſignorum dicta ſunt, clare patet.

§. 186. Hinc autem ſequitur, ſi ad eum caſum formulæ vel æquationes, ex quibus hæ fluxerunt, accommodandæ ſint, quo per vnum tubum aqua influit, per alterum autem effluit, id præſtari poſſe, ſi illud quæſitorum, quod pertinet ad tubum, per quem aqua effluit, afficiatur ſigno —, quia quæſita ſigno + afficere ſolemus. Si enim initio ſigno — adfectum fuiſſet quæſitum illud, iam ſigno + adficiendum foret. Illo in hoc problemate facto ad quantitatem y, vt ſit $-y = \frac{af - cd}{ae - bd}$, vel $y = \frac{cd - af}{ae - bd}$, ſiquidem ex formula ita mutata valor quæſiti y poſitivus prodierit, id indicio erit, aquam per hunc tubum ex vaſe effluxiſſe, in quod per alterum influxit; ſi vero prodierit negativus, valor iſte, colligetur, aquam & per hunc tubum in vas influxiſſe. Eodem in caſibus ſimilibus omnibus modo vtemur, ſi opus ſit. Nam fere præſtat formulas, quemadmodum initio prodierunt, relinquere.

§. 187. Poterat & quantitas by, ad hunc caſum, quo aqua per alterum tubum effluit, negativa poni, vna cum altera ey, eodem effectu. Calculo autem ſecundum ea, quæ initio ſumpta ſunt, abſoluto, ſi ſigna litterarum b & e in contraria mutentur, formulæ ad eundem caſum aptantur, ſitque

$$y = \frac{af - cd}{bd - ae}$$

$$\& \; x = \frac{bf - ce}{bd - ae}$$

§. 188. Sit 3° $a = 6$, $b = 4$, $c = -2$, id eſt, ſit experimento deprehenſum, poſtquam

per

per priorem tubum aqua 6 horis, & per alterum 4 horis fluxit, quantitatem aquæ, quam in vaſe initio infuiſſe, hic poni debet, non modo non creviſſe, verum etiam decreviſſe menſuris 2. Deinde ſit $d = 9$, $e = 3$; $f = 21$, erit $ce = -6$, $bf = 84$, $ae = 18$, $bd = 36$, $af = 126$, $cd = -18$; hinc calculo ſecundum formulas in ſolutione poſitas, poſito

$$x = \frac{-6-84}{18-36} = \frac{-90}{-18} = 5, \ \& \ y = \frac{126+18}{18-36} = \frac{144}{-18} = -8.$$

§. 189. Ad hunc caſum formulæ accommodari poterant, ſigno quantitatis c, vbicunque ea in formulis occurrit, in contrarium mutato, quo facto c non eam quantitatem notaſſet, qua aqua in vaſe crevit, verum qua decrevit, atque in exemplo propoſito c non -2 evaſiſſet, ſed $+2$. Verum & hic præſtat formulas, quales initio repertæ ſunt, relinquere, ne memoria oneretur, variis eiusdem litteræ in eodem problemate ſignificatibus, circa quos ſi forte labatur, confuſio evitari non poteſt. Illuſtrationis vero gratia, formulæ appoſitæ ſunt ad eum caſum, quo aqua in vaſe in priori experimento decrevit quantitate $+c$ tubo altero aquam non adferente, ſed auferente, ita, vt quod vna hora per eum effluxit ſit $+ y$. Eſt his poſitis

$$x = \frac{ce + bf}{bd - ae}, \ \& \ y = \frac{cd + af}{bd - ae};$$

in quibus formulis ſi numeri §. 188. traditi omnes affirmative ſumpti in locum litterarum ſubſtituantur, prodit $x = 5$ & $y = 8$.

PROBLEMA XVIII.

§. 190. *Dantur tres trium rerum diverſarum miſturæ, vt auri, argenti, cupri. Determinata quantitas primæ miſturæ, quæ ſit vncia, continet auri quantitatem* a, *argenti* b, *cupri* c. *Eadem quantitas alterius habet auri quantitatem* d, *argenti* e, *cupri* f; *& in eadem quantitate tertiæ ineſt auri quantitas* g, *argenti* h, *cupri* k. *Miſturæ porro commiſcendæ ſunt ita, vt in eadem illa quantitate, quam poſuimus eſſe vnciam, iam inſit auri quantitas* l, *argenti* m, *cupri* n. *Quæritur, quantum in eam rem ſumendum ſit cuiuslibet miſturæ?*

PRÆPARATIO.

§. 191. Si ponatur primæ menſuræ ſumendam eſſe partem vnciæ, quam deſignat x, notante 1 vnciam, erit 1 ad x, vt quantitas a, ad quantitatem auri, quæ inerit in hac vnciæ

parte

parte x, quæ ergo erit ax. Eodem modo reperietur bx quantitas argenti, & cx quantitas cupri in eadem vnciæ parte x. Sique y deſignet quantitatem miſturæ ſecundæ in compoſitionem aſſumendæ, & z quantitatem tertiæ; eodem modo reperientur quantitates auri, argenti, cupri, quæ in his vnciæ partibus y, z inſunt; quæque inferuntur in compoſitum.

SOLVTIO.

§. 192. Erit ergo

$$\begin{aligned} ax+dy+gz&=l\\ bx+ey+hz&=m\\ cx+fy+kz&=n. \end{aligned}$$

Ex harum æquationum prima colligitur

$$z=\frac{l-ax-dy}{g}$$

qui valor ſi inferatur in duas reliquas, fit ſecunda

$$bx+ey+\frac{hl-ahx-dhy}{g}=m$$

ſive $bgx+egy+hl-ahx-dhy=gm$; & tertia

$$cx+fy+\frac{kl-akx-dky}{g}=n,$$

ſive $cgx+fgy+kl-akx-dky=gn$

Ex priore æquationum, e quibus z ita eliminatum eſt, transponendo fit:

$$egy - dhy = gm - hl + ahx - bgx,$$

& hinc $y = \frac{gm - hl + ahx - bgx}{eg - dh}$.

Ex altera vero ſit eodem modo

$$fgy - dky = gn - kl + akx - cgx$$

& $\quad y = \frac{gn - kl + akx - cgx}{fg - dk}$

quæ æquationes facile vnientur ita, vt nova prodeat, in qua, præter x, incognita nulla ineſt. Eſt ea

$$\frac{gm - hl + ahx - bgx}{eg - dh} = \frac{gn - kl + akx - cgx}{fg - dk}$$

vnde, ſublatis denominatoribus, fit:

$$\begin{aligned} & fggm - fghl + afghx - bfggx - dgkm \\ & + dhkl - adhkx + bdgkx = eggn \\ & - egkl + aegkx - ceggx - dghn \\ & + dhkl - adhkx + cdghx \end{aligned}$$

quæ æquatio, ſi auferantur quæ ſeſe tollunt, reliqua legitime transponantur, hanc formam induit

$$\begin{aligned} & x(afgh - bfgg + bdgk - aegk + cegg - cdgh) = \\ & fghl - fggm + eggn - egkl + dgkm - dghn \end{aligned}$$

ex qua facile reperietur quæſita quantitas x. Hac autem reperta, y porro elicietur mediante aliqua earum, in quibus y datur per x & cogni-

cognitas; & hinc z per eam, in qua z per x, y atque cognitas, datur.

Scholion.

§. 193. Hoc modo tractantur problemata omnia, in quibus duabus plures litteræ ſunt incognitæ. Totidem æquationibus opus eſt, quot ſunt eius generis litteræ. Sint eæ æquationes A, B, C, D; litteræ autem incognitæ ſint x, y, z, u. Quæretur ergo valor litteræ x ex prima æquatione, eoque in reliquas B, C, D introducto, littera x ex his æquationibus B, C, D eliminabitur. Deinde valor litteræ y quæretur ex æquatione, in quam ita mutata eſt B, ac ſubſtituetur in æquationibus quæ ortæ ſunt ex C, D, vt ex his quoque littera y eliminetur. Tandem valor litteræ z, quæſitus ex æquatione orta ex C, introducetur in eam, quæ orta eſt ex D, quæ ergo præter u iam litteram incognitam nullam continebit, cum reliquæ iam ante eliminatæ ſint. Dabitur ergo per hanc æquationem u, eo vero reperto, regrediendo & reliqua incognita dabuntur per æquationes præcedentes.

§. 194. Verumtamen membra æquationum, quæ prodeunt plures hoc modo vniendo, admodum complicata plerumque fiunt. Sed facile rei remedium eſt, exemplo huius problematis optime declarandum.

In æquationibus, per quas datur y, hisce:

$$y = \frac{gm - hl + ahx - bgx}{eg - dh}$$

$$y = \frac{gn - kl + akx - cgx}{fg - dk}$$

pone $gm - hl = \alpha$,

$ah - bg = \beta$

$eg - dh = \gamma$

$gn - kl = \delta$

$ak - cg = \varepsilon$

$fg - dk = \zeta$

poteruntque, his ſubſtitutis, eædem æquationes hoc modo ſcribi multo brevius:

$$y = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma},$$

$$y = \frac{\delta + \varepsilon x}{\zeta}$$

Vnitis iam æquationibus iſtis, fit

$$\frac{\alpha + \beta x}{\gamma} = \frac{\delta + \varepsilon x}{\zeta}$$

& hinc $\alpha\zeta + \beta\zeta x = \delta\gamma + \varepsilon\gamma x$,

ac $\beta\zeta x - \varepsilon\gamma x = \delta\gamma - \alpha\zeta$

hinc $x = \dfrac{\delta\gamma - \alpha\zeta}{\beta\zeta - \varepsilon\gamma}$.

Datis iam numeris, ea exprimentibus, quæ per litteras a, b, c &c. hic notata ſunt, primo quærentur α, β, γ, & reliquæ huius generis,

neris, per quas x dabitur ex æquatione vltima; eaque reperta, y ex alterutra præcedentium, $y = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma}$, vel $y = \frac{\delta + \varepsilon x}{\zeta}$ inveſtigabitur, tandemque z ex ea, quæ primo reperta fuit: $z = \frac{l - ax - dy}{g}$. Niſi malis, valores ordine ſubſtituendo, has quoque æquationes ita mutare, vt y quoque & z ex datis immediate reperiri poſſint.

§. 195. Poteſt & mutando valores litterarum α, β, γ &c. eadem formula, per quam reperitur x, ad inveſtigandas ex datis y & z facile accommodari, quas a valoribus litterarum a, b, c &c. eodem modo pendere manifeſtum eſt, quo x ab iis pendet, modo litteræ iſtæ legitime ordinentur. Sed hæc atque huiusmodi alia, qui quærere voluerit, facile ipſe reperiet.

§. 196. Cæterum ſi huiusmodi problemata in vno tantum vel altero caſu ſolvenda ſint, præſtat data per numeros determinatos exprimere, quam per litteras: quia in formulis paullo prolixioribus maiori plerumque labore in locum litterarum numeri ſubſtituuntur, quam quo, ſi data per numeros expreſſa ſint, tota abſolvitur ſolutio, minusque fere errandi periculum eſt.

PROBLEMA XVIIII.

§. 197. *In horreo A inſunt tritici metretæ 576, ſiliginis 864, hordei 1152, quæ coniunctim comparatæ ſunt pretio 8064 ſolidorum. In alio horreo B continentur metretæ tritici 288, ſiliginis 576, hordei 864, quorum omnium pretium ſunt ſolidi 5472. Horreum tertium C habet tritici metretas 864, ſiliginis 1152, hordei 1440, quæ omnia conſtant 10656 ſolidis. Quæritur pretium metretæ cuiuslibet harum rerum, ſi in quolibet horreo idem ſit.*

SOLVTIO.

§. 198. Sit pretium metretæ tritici x, ſiliginis y, hordei z, colligetur ex pretio eorum quæ continentur horreo A,

$$576x + 864y + 1152z = 8064 \quad . \; . \; . \; . \; \mathrm{I}$$

quæ horreo B continentur, dabunt,

$$288x + 576y + 864z = 5472 \quad . \; . \; . \; . \; \mathrm{II}$$

& quæ continentur horreo C,

$$864x + 1152y + 1440z = 10656 \quad . \; . \; \mathrm{III}$$

Ex harum æquationum prima fit

$$x = \frac{8064 - 864y - 1152z}{576}$$

ſive, vtroque fractionis termino per 6 diviſo,

$$x = \frac{1344 - 144y - 192z}{96}$$

Hoc

Hoc autem in reliquas æquationes introducto, fit

II. $$288.\frac{1344-144y-192z}{96}+576y+864z = 5472$$

ſive, ſi 288 dividatur per 96,

$$3(1344-144y-192z)+576y+864z = 5472$$

vel $$4032-432y-576z+576y+864z = 5472.$$

id eſt $144y+288z = 1440$,

vel omnibus per 144 diviſis,

$$y+2z = 10,$$

& $$y = 10-2z$$

Æquatio autem III eadem ſubſtitutione fit:

$$864.\frac{1344-144y-192z}{96}+1152y+1440z = 10656$$

vel, ſi 864 dividatur per 96,

$$9(1344-144y-192z)+1152y+1440z = 10656$$

vel $$12096-1296y-1728z+1152y+1440z = 10656$$

id eſt $-144y-288z = -1440$

vel omnibus per -144 diviſis,

$$y+2z = 10$$

& $$y = 10-2z.$$

Duarum, quæ ita repertæ ſunt æquationum, in quibus x nullum eſt, vnione nova pro-

producenda eſt, per quam vel y detur vel z. Id vero ſi tentetur, in caſu propoſito, quo æquationes plane eædem prodierunt, nihil aliud reperitur, quam $z = z$ vel $y = y$, aut $1 = 1$; vel $0 = 0$, vel quid ſimile, quorum quodlibet cum ſemper verum ſit, quodcunque ſumatur y vel z, ſequitur numeros propoſitos permittere, vt aliquod pretiorum x, y & z ſumatur pro arbitrio. Sunt enim non niſi duæ æquationes repertæ, $y = 10 - 2z$ & $x = \frac{1344 - 144y - 192z}{96}$, quæ ſi vniantur, prodit $x = \frac{1344 - 1440 + 288z - 192z}{96}$ $= \frac{-96 + 96z}{96}$, id eſt $x = z - 1$, per quas, valore vnius trium litterarum x, y, z vtcunque ſumpto, reliquæ ſemper determinantur.

Scholion.

§. 199. Fieri non poteſt, quin numeris pro arbitrio ſumptis, ſæpe in eiusmodi caſus incidamus, quibus ne forte turbemur, exemplum hoc appoſitum eſt. Si fiat $z = 1$, erit $x = 0$, & $y = 8$, patetque, eſſe $0 \times 576 + 8 \times 864 + 1152 = 6912 + 1152 = 8064$, & $0 \times 288 + 8 \times 576 + 864 = 4608 + 864 = 5472$, atque $0 \times 864 + 8 \times 1152 + 1440 = 9216 + 1440 = 10656$, vt propoſitum fuit.

Si

Si fiat $x = 1$, erit $z = 2$, & $y = 6$, & $576 \times 1 + 864 \times 6 + 1152 \times 2 = 576 + 5184 + 2304 = 8064$, & $288 \times 1 + 576 \times 6 + 864 \times 2 = 288 + 3456 + 1728 = 5472$; atque $864 \times 1 + 1152 \times 6 + 1440 \times 2 = 864 + 6912 + 2880 = 10656$.

Si ſumatur $y = 4$, erit $2z = 6$, & $z = 3$, hinc $x = 2$, quibus numeris aſſumptis prodeunt eædem æqualitates, $576 \times 2 + 864 \times 4 + 1152 \times 3 = 1152 + 3456 + 3456 = 8064$; & $288 \times 2 + 576 \times 4 + 864 \times 3 = 576 + 2304 + 2592 = 5472$; atque $864 \times 2 + 1152 \times 4 + 1440 \times 3 = 1728 + 4608 + 4320 = 10656$.

Si ſumatur $y = 12$, prodit $2z = -2$, & $z = -1$, hinc $x = -2$, quod indicio eſt, ſi ſiliginis metreta comparetur ſolidis 12, pro qualibet metreta tritici, emptori accedere debere ſolidos 2, & pro qualibet metreta hordei ſolidum 1, vt numeris propoſitis poſſit ſatisfieri.

SECTIO

SECTIO IIII.

DE SOLVTIONE PROBLEMATVM SIMPLICIVM GEOMETRICORVM.

PROBLEMA XX.

§. 200.

Super datâ lineâ recta triangulum rectangulum conſtruere ſic, vt angulus rectus lateri illi dato opponatur, ſitque trianguli area dato quadrato æqualis.

ANALYSIS.

F. 7. §. 201. Data recta, ſuper qua triangulum conſtruendum eſt, ſit AB, quadratum autem, cui area trianguli æqualis efficienda eſt, Q. Duæ ergo conditiones ſunt trianguli ſuper AB conſtruendi: Prima vt eius angulus oppoſitus lateri AB ſit rectus: Altera vt area ſit quadrato Q æqualis. Primæ conditioni ſeorſim ſatisfiet, ſi ſuper AB diametrum deſcribatur ſemicirculus ACB. Puncto enim in peripheria huius ſemicirculi quocunque aſſumpto, ſi ab eo rectæ ducantur ad A & B, angulus lateri AB oppoſitus rectus eſt. *Geom.* §. 126. Eſt adeo locus apicis anguli

lateri

lateri AB oppoſiti, peripheria ACB, extra quam apex ille cadere non poteſt.

§. 202. Alteri conditioni, vt nempe area trianguli æqualis evadat quadrato Q, vt ſatisfieri poſſit, ſola trianguli altitudine opus eſt, quia area per baſin AB atque altitudinem hanc determinatur *Geom.* §. 199. Ea autem altitudo ſic reperitur. Si AB bifariam diviſa ſit apud D, erit rectangulum, cuius latera ſunt AD & altitudo illa, triangulo, quod conſtruendum eſt, hinc & quadrato Q, æquale. *Geom.* §. 197. Ergo vt AD ad latus quadrati Q, ſic latus iſtud ad altitudinem. *Geom.* §. 218. Sit altitudo per hanc proportionem reperta E, ducaturque rectæ AB parallela infinita FG, intervallo E ab hac diſtans. Erit quodlibet triangulum ſuper AB deſcriptum, cuius apex cadit in FG iſtam, quadrato Q æquale.

§. 203. Cuilibet problematis conditioni poſtquam ita ſeorſim ſatisfactum eſt & vniverſaliter, facile ſatisfit vtrique coniunctim. Prima conditio exigit, vt apex trianguli cadat in peripheriam ACB, altera eidem locum aſſignat in recta infinita FG. Cadet ergo vel in H vel in K, quæ puncta ſola peripheriæ cum recta ſunt communia; & quodlibet triangulorum AHB, AKB & rectangulum erit, & æquale quadrato Q. Facile autem patet horum triangulorum & latera æqualia eſſe.

§. 204. Cæterum qui data conſideraverit, facile perſpiciet, quæcunque detur AB, quadratum Q nimis parvum dari non poſſe. Creſcente autem quadrato hoc, manente AB, recta FG continuo magis ab AB recedit, punctorum autem H & K quodvis accedit ad punctum C, quod dimidiam peripheriam in quadrantes dividit: ſique latus quadrati eousque creverit, vt iam ſit æquale radio ſemicirculi AD, etiam altitudo trianguli huic radio æqualis prodit, fitque adeo triangulum, quod problemati ſatisfacit, vnicum ACB, punctis H, K apud C vnitis, recta autem FG peripheriam contingente. Tandem ſi quadratum Q maius detur quadrato radii AD, & altitudo trianguli maior reperietur eodem radio. Hoc autem ſumpto recta FG peripheriam ne quidem continget, tanto minus ſecabit. Repugnabit ergo conditionum propoſitarum poſterior priori, atque problema ſolutu impoſſibile erit.

Scholion.

§. 205. Hæc analyſis pure geometrica eſt, quæ ab arithmetica vel algebra ſubſidii nihil accepit. Peracta eſt reſolutione quæſtionis propo-

propoſitæ in alias ſimpliciores, quarum quævis ſeorſim ſolvi potuit, atque coniunctione harum ſolutionum. Eadem via & algebra incedit, vt ex problematibus hactenus tractatis apparere debuit, ſed loco linearum, quibus geometria ſimpliciores illas quæſtiones, in quas problema reſolutum eſt, ſeorſim ſolvit, vel quibus cuivis problematis conditioni ſeorſim ſatisfacit, quæ in hoc problemate fuere peripheria circuli & linea recta: loco harum, inquam, linearum, algebra æquationibus vtitur, quæ ſingulæ aliquibus problematis conditionibus ſatisfaciunt, coniunctæ omnibus, atque ita quæſitum plane determinant. Ei rei cum multum lucis per analyſin geometricam accedat, non incongruum fore putavi, ſi facilis alicuius problematis geometricam analyſin, geometricorum problematum ſolutionibus algebraicis, præmitterem.

PROBLEMA XXI.

§. 206. *Trianguli* ABC *dantur omnia latera. Ex apice anguli* A *in latus oppoſitum cadit perpendicularis* AD. *Reperienda ſunt ſegmenta huius lateris* BD, DC. F. 8.

PRÆPARATIO.

§. 207. Sit BC $=a$, BA $=b$, AC $=c$, BD $=x$, erit DC $=a-x$. Si in triangulo rectangulo ABD a quadrato lateris AB dematur quadratum lateris BD, relinquitur quadratum ex AD, quod itidem relinquitur, ſi a quadrato lateris AC ſubtrahatur quadratum ex DC: ſunt ergo differentiæ quadratorum dictæ inter ſe æquales.

SOLVTIO.

§. 208. Quadratum ex AB eſt bb, & quadratum ex BD $= xx$, quadratum autem ex AC $= cc$, & quadratum lateris BC $= (a - x) \times (a - x) = aa - 2ax + xx$.

Ergo $bb - xx = cc - aa + 2ax - xx$

hinc $-2ax = cc - aa - bb$

vel $2ax = aa + bb - cc$

& $$x = \frac{aa + bb - cc}{2a}$$

vel $$x = \tfrac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = \tfrac{1}{2}a + \frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

Scholion.

§. 209. Si AB $=$ BC, id eſt $b = a$, fit $x = \frac{2aa - cc}{2a} = a - \frac{cc}{2a}$. Si vero AB $=$ AC, eſt $x = \frac{aa + bb - bb}{2a} = \frac{a}{2}$, quod aliunde novimus.

§. 210. Cæterum, quæſtionibus geometricis ad æquationem vnam vel plures reductis, methodus, qua per algebram ſolvuntur, ab illa diverſa non eſt, qua ſolvuntur arithmeticæ. Et quamvis ſigna, quibus hic vtimur, ad arithmeticam reſtricta non ſint, poſſintque per vocabula geometrica non minus facile atque clare explicari, quam per arithmetica: nihil tamen impedit, quo minus litteras, quibus data ac quæſita diſtinguimus, numeros notare ponamus, quibus quantitates iſtæ, ſive lineæ fuerint ſive ſuperficies aut ſolida, vel quæcunque aliæ, ex vnitate aſſumpta exprimuntur. Ea re tranſitus ex arithmetica in geometriam, atque vniverſus calculus multum iuvatur, cum omnia ad eosdem conceptus redeant. Sufficit, ſi ea quæ vltimo producuntur, vocabulis geometricis reddere, vbi opus eſt, noverimus, quibus & ad inventionem quæſiti geometricam manuducamur.

§. 211. Æquatio, qua ſegmentum BD reperimus

$$x = \tfrac{1}{2}a + \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$$

geometrice enunciabitur, ſi dicatur ſegmentum iſtud componi ex $\tfrac{1}{2}a = \mathrm{BE}$, dimidio lateris BC, atque ex $\frac{(b+c)(b-c)}{2a} = \mathrm{ED}$, quarta proportionali ad $2a$ (duplum lateris BC), $b+c$, (ſummam laterum BA & AC) & $b-c$, (eorundem laterum differentiam). Id autem ſtricte verum non aliter erit, quam ſi BA maior fuerit quam AC, & hinc BD maior quam DC. Si enim BA minor fuerit quam AC, erit $b-c$ quantitas negativa, quæ $\frac{(b+c)(b-c)}{2a} = \mathrm{ED}$ pariter negativam reddit §. 90, vnde ſumma, BE + ED, per quam datur x, mutabitur in differentiam BE — ED. Quare addendum erit, BD eam concipi, quæ lateri maiori BA ſubiacet, vel quid huiusmodi.

§. 212. His ita intellectis, conſtructio problematis geometrica, ſive inventio quæſiti x per lineas in plano deſcriptas, vltro ſeſe offert. Namque datis tribus rectis, quartam proportionalem reperiendi modus, in Elementis docetur. Verum in præſenti caſu conſtructio per ipſum problema ſuppeditatur. Compoſito enim ex datis lateribus triangulo ABC, demiſſaque ex A ad BC perpendiculari AD, datur BD. Idem & alias ſæpe evenit, vt geometria facile detegat, quod formulæ algebraicæ non ſine ambagibus reperire docent. Tumque nullus alius formularum vſus eſt, quam vt modum oſtendant quæſitum per arithmeticam reperiundi, iis, quæ dantur, per numeros expreſſis. Eſt

enim

enim operatio ſimplicior magis implicatæ præferenda.

§. 213. Cæterum æquationes, quibus problemata geometrica ſolvuntur, ipſa geometria ſuppeditat, quam qui non callet, fruſtra ſolutionem tentabit; quo magis quis meditatus fuerit, eo minus in reperiendis æquationibus laborabit. Sunt tamen aliquæ propoſitiones geometricæ palmariæ, quibus hic vel prorſus carere non poſſumus, vel non absque incommodo caremus, vt quæ de ſimilitudine triangulorum, deque comparationibus figurarum atque ſolidorum traduntur, & in his theorema Pythagoræ. Circuli etiam attributa præcipua, atque rectarum apud circulos deſcriptarum, quales chordæ ſunt, ſinus, tangentes & ſecantes, nota eſſe debent.

§. 214. Angulus in æquationem non ingreditur, niſi forte cum alio angulo comparetur; quia magnitudo anguli per lineas, ſuperficies vel ſolida exprimi nequit. Eius loco ſemper *ratio* aliqua adhibetur, ſic vt dato angulo ponatur ratio ea data eſſe, & data ratione datus angulus.

F. 9. §. 215. Scilicet ſi angulus A detur, ducaturque a puncto B, in aliquo eius laterum vtcunque aſſumpto, ad alterum latus perpendicularis BC, datur ratio AB : BC, & ratio

AC : BC, quæque ex his fluit, ratio AB : AC. Determinantur enim per rectam hanc BC omnes anguli trilateri ABC, ſic vt alii prodire non poſſint, quodcunque, laterum AB, AC, vtcunque productorum, punctum vſurpetur loco B. Fiunt ergo omnia triangula ita deſcripta ſimilia, atque hinc ratio lateris maximi ad latus angulo A oppoſitum, in omnibus eadem, atque æqualis rationi AB : BC, & ſic rationes reliquæ.

§. 216. Contra ſi detur ratio AC : BC, ſive per has rectas detur, ſive per alias quascunque, connectanturque binæ quævis earum rectarum ſub angulo recto, & ducatur latus tertium vt AB, triangula nunc quoque ſimilia fiunt, atque hinc anguli A vel B in omnibus iidem. Eodemque modo eosdem angulos & per rationem AB : AC, vel AB : BC dari, ex iis quæ de ſimilitudine triangulorum geometria docet, facile apparet: ex quibus præterea ſequitur, idem in pleriſque caſibus verum fore, ſi angulus C non quidem rectus fuerit, ſed tamen datus.

§. 217. Si vero angulus C rectus fuerit, erit AB : BC ratio radii ad ſinum anguli A, & AB : AC ratio radii ad eiusdem anguli coſinum, vel ad ſinum anguli B; & AC : CB ratio radii ad tangentem anguli A, vel ratio cotangentis anguli B ad radium. Eædem rationes & aliter exprimi poſſunt, maxime ſi adhibeantur ſecantes; ſed horum rarior vſus eſt.

PROBLEMA XXII.

§. 218. *Data baſi trianguli* ABC, *& angulis apud baſin* B *&* C, *invenire altitudinem* AD. F. 8.

Solvtio.

§. 219. Sit $BC = a$, $AD = x$. Quia datur angulus B, datur ratio AD : BD, quæ ſit $f : g$, ratio vero AD : DC pariter data, ſit $= h : k$. Erit $BD = \frac{gx}{f}$, & $DC = \frac{kx}{h}$, hinc

$$\frac{gx}{f} + \frac{kx}{h} = a$$

$$gx + \frac{fkx}{h} = af$$

$$hgx + fkx = afh$$

$$x = \frac{afh}{hg + fk}.$$

Scholion.

§. 220. Quia quælibet ratio exhiberi poteſt vno eius terminorum pro arbitrio ſumpto, ſi illi conveniens reperiatur terminus alter, poterat terminus f termino h æqualis ſumi. Eo autem facto formula ſimplicior prodit hæc $x = \frac{af}{g+k}$.

§. 221. Si f ſit radius, fiunt g & b cotangentes angulorum B & C. Et ſi angulus C obtuſus ſit, prodit $x = a \times \frac{f}{g-k}$, quia hoc caſu $\frac{gx}{f} - \frac{kx}{h} = a$.

PROBLEMA XXIII.

§. 222. *Datis duobus trianguli lateribus, & angulo intercepto, invenire quemlibet ex angulis reliquis.*

SOLVTIO.

F. 8. §. 223. Data latera ſint AB $= a$ & BC $= b$, angulus datus B. Dantur ergo rationes AB : BD, AB : AD, & quæritur ratio AD : DC, vel alia, per quam angulus C datur.

Sit AB : BD $= m : n$, erit BD $= \frac{na}{m}$, & hinc DC $= b - \frac{na}{m} = \frac{mb - na}{m}$. Porro ratio data AB : AD ſit $= p : q$, erit AD $= \frac{qa}{p}$. Hinc ratio quæſita DC : AD $= \frac{mb - na}{m} : \frac{qa}{p}$, vel

vel ſi ponatur $p = m$, erit ratio iſta $mb - na : qa$.

Si m ſive p fuerit radius, erit n coſinus anguli dati B, & q eius ſinus. Ratio autem reperta DC : AD, eſt ratio radii, ad tangentem anguli C.

PROBLEMA XXIIII.

§. 224. *Data trianguli rectanguli perimetro, & perpendiculo ex apice anguli recti ad latus oppoſitum, invenire latus iſtud.*

PRÆPARATIO.

§. 225. Si AC ſit $= b$; perimeter, id eſt F. 10. AB + BD + DA, dicatur a, BD vero ponatur $= x$, erit AB + AD $= a - x$. Si ergo eorundem laterum differentia AD — AB dicatur y, per litteras iſtas omnia latera trianguli exprimentur, duabus autem æquationibus opus erit, propter duplicem incognitam, quarum vnam præbet BD^q = AB^q + AD^q, alteram analogia BD : BA = AD : AC, cuius veritas ex ſimilitudine triangulorum rectangulorum perſpicitur. *Geom.* §. 190.

SOLVTIO.

§. 226. Quia AC + AB $= a - x$, & AC — AB $= y$, eſt AC $= \frac{a - x + y}{2}$,

& AB

& $AB = \frac{a - x - y}{2}$, hinc BC^q ſive

$$x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + 2ay - 2xy + y^2}{4}$$
$$+ \frac{a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2}{4}$$

vel contracte,

$$x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2},$$

& diviſore, cum reliquis, quæ ſeſe deſtruunt, ſublatis,

$$x^2 = a^2 - 2ax + y^2.$$

Analogia autem $BC : BA = AC : AD$, ſive

$$x : \frac{a - x + y}{2} = \frac{a - x - y}{2} : b$$

in hanc æquationem convertitur, §. 125.

$$bx = \frac{(a - x)^2 - y^2}{4}$$

ſive $4bx = a^2 - 2ax + x^2 - y^2$,

vnde fit $y^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$.

Hoc iam quantitatis y^2 valore in ſuperiorem æquationem introducto, prodit

$$x^2 = a^2 - 2ax + a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$$

ſive $0 = 2a^2 - 4ax - 4bx$,

aut $0 = a^2 - 2ax - 2bx$,

vnde $2ax + 2bx = a^2$,

& $x = \frac{a^2}{2a + 2b}$.

Scho-

Scholion.

§. 227. Reperto ex hac æquatione, id eſt, ex analogiæ $a+b : a = \frac{1}{2}a : x$, latere maximo, triangulum facile inſcribetur in ſemicirculum, quia eius altitudo datur.

PROBLEMA XXV.

§. 228. *Trianguli rectanguli, cuius perimeter datur & area; invenire latus maximum.*

PRÆPARATIO.

§. 229. Etſi vnum tantum latus quæratur F.10. BC, quod dicetur x, commode tamen & AB, per litteram y denominatum, in æquationem inferetur. Eo autem facto hic quoque duabus æquationibus opus erit, quo littera hæc viciſſim eliminari poſſit. Si ergo perimeter ſive AB + BC + AC dicatur a, erit $AC = a - x - y$. Area trianguli ſit bb. Æquationum, quæ ad ſolutionem requiruntur, primam dabit idea trianguli rectanguli, alteram ſuppeditabit cognita eius area.

SOLVTIO.

§. 230. Quia $BCq = ABq + ACq$, eſt

$$x^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2,$$

ſive $0 = 2y^2 + 2xy - 2ay - 2ax + a^2$.

Area autem trianguli cum ſit $\frac{1}{2}BA \times AC$, eſt

$$\frac{1}{2}y \times (a - x - y) = bb,$$

ſive

ſive $2bb = -yy - xy + ay$,

& $4bb = -2y^2 - 2xy + 2ay$.

Adduntur huius æquationis membra membris æquationis ſuperioris, antecedens antecedenti, & conſequenti conſequens, hoc modo:

$$0 = 2y^2 + 2xy - 2ay - 2ax + a^2$$

$$4bb = -2y^2 - 2xy + 2ay$$

prodibit $4bb = -2ax + a^2$.

Hinc $2ax = a^2 - 4b^2$

& $x = \frac{a^2 - 4b^2}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a}$.

Scholion.

§. 231. Sola hic methodus annotari meretur, qua $2y^2$ ex æquationibus eliminatum eſt. Quod enim $2xy$ atque $2ay$ ſimul exciderint, peculiare eſt, neque ſemper ita evenit. Verum quilibet terminus æquationis ſeorſim, eo modo per aliam æquationem ex ea eliminari ſemper poteſt, quo hic eliminatus eſt $2y^2$. Neceſſe eſt in altera illa æquatione litteram eliminandam ineſſe. Multiplicabitur ergo ea littera ſic, vt producatur factum eliminandum, atque in eundem multiplicatorem ducentur & termini æquationis reliqui: quod vt in caſu præſenti contingeret, æquationis $2bb = -y^2 - xy + ay$ omnes termini duplicati ſunt.

Ali-

Aliquando & dividendi erunt termini æquationis eiusmodi, vel termini alterius & ipſi multiplicandi. Deinde æquationes, addendo vel ſubtrahendo vnientur ita, vt terminus ita præparatus excidat.

§. 232. Sit ex æquatione $my^2 - axy = bx^2$, per alteram iſtam $bcy - 2ny^2 = 3cdx$ eliminandus terminus, in quo eſt y^2. Multiplico terminos poſterioris æquationis per m, quod y^2 multiplicat in priori; prioris vero æquationis terminos duco in $2n$, quod y^2 in poſteriori æquatione multiplicat. Fiant æquationes

$$2mny^2 - 2naxy = 2nbx^2$$

& $$mbcy - 2mny^2 = 3mcdx,$$

quibus additis, prodit hæc

$$mbcy - 2naxy = 2nbx^2 + 3mcdx$$

in qua y^2 nulla eſt.

§. 233. Eadem operatione repetita duæ æquationes vniri poſſunt ſic, vt aliqua ex iis littera penitus excidat. Sint æquationes

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

& $$\delta z^2 + \varepsilon z + \theta = 0$$

ita vniendæ, vt excidat z. Ducta priori in δ, poſteriori autem in $-\alpha$, prodeunt æquationes

$$\alpha\delta z^2 + \beta\delta z + \delta\gamma = 0$$

$$-\alpha\delta z^2 - \alpha\varepsilon z - \alpha\theta = 0$$

quibus additis, fit

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)z + \delta\gamma - \alpha\theta = 0,$$

in

in qua æquatione zz non ineſt. Si iam & z eliminandum ſit, ducatur hæc æquatio in z, vt fiat

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)z^2 + (\delta\gamma - \alpha\theta)z = 0$$

ſumptaque vna ex ſuperioribus, in quibus pariter z^2 ineſt, id eliminetur eodem modo. Sumo hanc in rem

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)z^2 + (\delta\gamma - \alpha\theta)z = 0$$

multiplicata ergo priori æquatione per $\beta\delta - \alpha\varepsilon$, poſteriori per $-\alpha$ fit

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)\alpha z^2 + (\beta\delta - \alpha\varepsilon)\beta z + (\beta\delta - \alpha\varepsilon)\gamma = 0$$

$$\& -(\beta\delta - \alpha\varepsilon)\alpha z^2 - (\delta\gamma - \alpha\theta)\alpha z = 0$$

atque his æquationibus additis, prodit nova,

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)\beta z - (\delta\gamma - \alpha\theta)\alpha z + (\beta\delta - \alpha\varepsilon)\gamma = 0$$

in qua pariter non ineſt z^2.

Vt iam z eliminetur, æquationes duæ, in quibus non ineſt zz, eodem modo tractandæ ſunt: quæ quidem, ſi
loco $\beta\delta - \alpha\varepsilon$ ſcribatur κ, &
loco $\delta\gamma - \alpha\theta$ ponatur π, paullo brevius ita exprimentur,

$$\kappa z + \pi = 0$$

$$\kappa\beta z - \pi\alpha z + \kappa\gamma = 0$$

priori autem per $\kappa\beta - \pi\alpha$, poſteriori per $-\kappa$ multiplicata, hanc formam induent:

$$\kappa\kappa\beta z - \pi\alpha\kappa z + \kappa\beta\pi - \pi\pi\alpha = 0$$

$$-\kappa\kappa\beta z + \pi\alpha\kappa z - \kappa\kappa\gamma = 0$$

quæ æquationes addendo vnitæ, dant

$$\beta\kappa\pi - \alpha\pi\pi - \gamma\kappa\kappa = 0$$

in qua z prorſus non ineſt.

§. 234.

§. 234. Eodem modo eliminabitur z, ſi præter zz & z in æquationibus propoſitis fuerit z^3, vel z^4, vel aliqua dignitas his quoque ſuperior; ſed labore tanto maiori, quo altior eſt hæc dignitas, tandemque vix ſuperando: qui tamen multum imminuetur eo, ſi aliqui eorum coefficientium, qui hic dicti ſunt α, β, δ, ε, evanuerint.

PROBLEMA XXVI.

F. 11. §. 235. *Dantur tres rectæ* AB, AC, BD *poſitione, eſtque reperiendum punctum* P, *a quo, ſi ad rectas illas perpendiculares ducantur* PE, PF, PG, *ſit ratio* PF : PE *rationi datæ æqualis, &* PF : PG *alteri pariter datæ.*

PRÆPARATIO.

§. 236. Producatur vna rectarum poſitione datarum AB, donec reliquis occurrat apud A, B: dabuntur anguli A & B & recta AB. Sique & FP produci intelligatur, donec rectis AC, BD, ſi opus ſit pariter productis, occurrat apud C, D; in triangulis rectangulis CAF, DBF dabuntur rationes AF : FC; AF : AC; FB : FD; FB : BD. Porro triangula rectangula AFC, PEC, quibus communis eſt angulus apud C, ſimilia ſunt, vt & DFB, DPG, quibus communis eſt angulus D. Punctum vero P dabitur, datis AF & FP.

SOLVTIO.

§. 237. Sit $AF : FC$, ratio radii ad tangentem anguli A, $= 1 : t$; $AC : AF$, ratio radii ad coſinum eius anguli, quæ eadem eſt ratio $CP : PE$, ſit $= 1 : c$. Eodem modo ſit $FB : DF = 1 : \tau$, & $DB : FB = DP : PG = 1 : \kappa$. Ratio vero $PF : PE$, quæ pariter datur, ſit $= p : m$, & altera $PF : PG$ ſit $= p : n$. AB ſit $= a$, $AF = x$, hinc $FB = a - x$, ſed PF ſit $= y$.

Erit ex analogia $1 : t = x : FC$, hæc $FC = tx$, hinc $CP = tx - y$, & ex analogia $1 : c = CP : PE$, erit $PE = ctx - cy$.

Ex altera vero parte $1 : \tau = a - x : DF$, exhibet $\tau a - \tau x$, hinc $DP = \tau a - \tau x - y$. Vnde quia $1 : \kappa = DP : PG$, fit $PG = \kappa\tau a - \kappa\tau x - \kappa y$. Cum ergo ſit $PF : PE = p : m$,

erit $p : m = y : ctx - cy$,
& $my = ctpx - cpy$,
vel $(cp + m)\, y = ctpx$.

Altera vero analogia $p : n = PF : PG$, ex repertis fit

$$p : n = y : \kappa\tau a - \kappa\tau x - \kappa y,$$

hinc $ny = \kappa\tau pa - \kappa\tau px - \kappa py$,
vel $(\kappa p + n) y = \kappa\tau pa - \kappa\tau px$.

Æqua-

Æquationes autem iſtæ vnitæ, dant

$$\frac{ctpx}{cp+m} = \frac{\varkappa\tau pa - \varkappa\tau px}{\varkappa p + n}$$

ſive $$\frac{ctx}{cp+m} = \frac{\varkappa\tau a - \varkappa\tau x}{\varkappa p + n}$$

quæ, ſi brevitatis cauſſa dicatur $cp+m = e$, & $\varkappa p + n = \varepsilon$, ita ſcribetur,

$$\frac{ctx}{e} = \frac{\varkappa\tau a - \varkappa\tau x}{\varepsilon}.$$

Hinc autem $ct\varepsilon x = \varkappa\tau ea - \varkappa\tau ex$,

& $(ct\varepsilon + \varkappa\tau e)x = \varkappa\tau ea$,

atque $$x = \frac{\varkappa\tau e}{ct\varepsilon + \varkappa\tau e}.a$$

Reperta ita x, ſi inferatur in æquationem $(cp+m)y = ctpx$, ſive $y = \frac{ctpx}{e}$, fit $$y = \frac{ct\varkappa\tau}{ct\varepsilon + \varkappa\tau e}.pa$$

SECTIO V.

DE DIGNITATIBVS ATQVE RADICIBVS.

PROBLEMA XXVII.

§. 238.

Datis rebus diverſis, vt litteris, a, b, c, d, e *quocunque numero, inveſtigare numerum omnium ordinum, quibus res eæ collocari poſſunt, vt ſcilicet modo* a *primum locum occupet, modo* b, c *vel aliqua ex reliquis, exiſtente in loco ſecundo qualibet alia, & in tertio quacunque ex reliquis, & ita in vniverſum.*

SOLVTIO.

§. 239. Sit numerus rerum vel litterarum n. Poterunt ordinum claſſes fieri tot, quot ſunt litteræ, denominata qualibet ordinum claſſe ab ea littera, quæ ordinum prima eſt; vt ſcilicet claſſis prima dicatur eorum ordinum, qui incipiunt ab *a*, altera illorum, qui a *b* incipiunt, tertia vero illorum, in quibus primum locum habet *c* & ita porro. Eſtque manifeſtum harum claſſium numerum fore n.

Quælibet harum claſſium dividi poterit in alias, reſpiciendo litteram ſecundam. Sic claſſis quæ incipit ab *a*, dividetur in alias, quarum prima ſecundo loco habet *b*, tertia *c* & ita porro. Cum ergo quælibet littera non niſi ſemel in ordinem ingrediatur, quælibet claſſium primariarum dividetur in ſecundarias tot, quot ſunt litteræ præter vnam, illam ſcilicet, quæ primum locum obtinet, exprimeturque hic claſſium ſecundariarum numerus, quæ in qualibet primaria inſunt, per $n - 1$, adeoque numerus claſſium ſecundariarum vniverſus erit $n . n - 1$.

Porro claſſium ſecundariarum quælibet, ea verbi gratia quæ incipit ab *ab*, in claſſes tertias dividetur tot, quot reſiduæ ſunt litteræ, quæ occupare poſſunt locum tertium. Cum ergo horum numerus ſit $n - 2$, totidem claſſes tertiæ fient ex qualibet ſecundariarum; vniverſarum autem claſſium tertiarum, quæ ſcilicet ex omnibus ſecundariis fieri poſſunt, numerus erit $n . n - 1 . n - 2$.

Eodem modo ratiocinando, patet numerum claſſium quartarum in qualibet tertia fore $n - 3$, & numerum claſſium quartarum omnium, quæ ſcilicet fieri poſſunt ex omnibus tertiis, iſtum $n . n - 1 . n - 2 . n - 3$, ſimilemque in modum pergendo tandem elicitur, numerum ordinum quæſitum fieri, omnes numeros, qui ab *n* ordine naturali regrediuntur vsque ad 1, in ſe invicem ducendo: vel quod eodem redit, ducendo 2 in 3, quia vnitas non multiplicat, & horum factum 6 in 4, quod vero hinc fit 24 in 5, & ita porro, donec perveniatur novos factores adſciſcendo ad numerum datum *n*. Generatim ergo numerus ordinum diverſorum, in quos diſponi poſſunt res diverſæ, quarum numerus eſt *n*, deſignabitur per

$$n . n - 1 . n - 2 . n - 3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, 1$$

vel per

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\ n.$$

Scholion.

§. 240. Ita ſi tres fuerint litteræ, *a*, *b*, *c*, vel tres quæcunque res; ordines, quibus collocari poſſunt, erunt 3. 2. 1, ſive ſex iſti, *abc*, *acb*; *bac*, *bca*; *cab*, *cba*. Si quatuor fuerint, numerus ordinum erit 4. 3. 2. 1 = 24, ſi quinque, erit numerus ordinum 120, & ita porro. Semperque numerus ordinum proxime ſequentium prodibit, numero antecedentium per numerum litterarum multiplicato, quæ in ſequentibus ordinibus inſunt. Vt, ſi ad tres litteras accedat quarta; numerus ordinum, quibus collocari poſſunt tres litteræ, quem vidimus eſſe 6, multiplicandus erit per 4, vt vt prodeat 24, numerus ordinum diverſorum, in quos diſponi poſſunt quatuor litteræ. Id autem & ex natura rei facile elicitur, poteſtque hinc dari eiusdem problematis

Brevior Solvtio.

§. 241. Si vnica detur res, *a*, eius ordo non niſi vnus eſt. Si vero ad eam accedat alia *b*, hæc illi vel præponi poteſt, vel poſtponi, vnde ordines fiunt *ba* & *ab*, quorum numerus eſt 1. 2.

Ad duas ſi res tertia *c* accedat, ea in quovis ordinum repertorum vel initium occupabit vel medium, vel finem, quo fient ex ordine *ba* tres iſti *cba*, *bca*, *bac*, & ex altero totidem; quare omnium ordinum numerus erit 1. 2. 3.

Accedente re quarta *d* ex quolibet horum ordinum fieri poterunt quatuor, vt ex primo *cba* hi, *dcba*, *cdba*, *cbda*, *cbad*. Quare vniverſus ordinum numerus iam erit 1. 2. 3. 4.

In quolibet autem horum ordinum, cum præter initium & finem ſint tria inter res intervalla, adeoque loca 5, in quæ poni poſſit res quinta, ſi hæc accedat, erit numerus ordinum omnium in quos diſponi poſſunt res quinque, hic 1. 2. 3. 4. 5. Et ita porro.

PROBLEMA XXVIII.

§. 242. *Dato numero rerum* n, *inter quas ſunt aliquæ numero* m, *quæ diſcerni non poſſunt, reliquæ autem omnes diverſæ, invenire numerum ordinum, quibus eæ res poni poſſunt.*

SOLVTIO.

§. 243. Pone res omnes diverſas eſſe: erit numerus ordinum $n . n - 1 . n - 2 \ldots 1$, §. 239. Iam ſi inter res iſtas fuerint verbi gratia, tres iſtæ, a, *a*, α fueritque aliquis ex omnium rerum ordinibus pro arbitrio ſelectus, hic

a *b a c d* α,

erunt inter reliquos & alii ordines, qui, reliquis litteris manentibus, eo ſolo a propoſito differunt, quod litteræ a, *a*, α loca ſua omnibus, quibus id fieri potuit, modis permutaverint, qui in hoc exemplo ſunt

a *b* α *c d a* [illegible]
a b a *c d* α ab a cdα
a b α *c d* a
α *b* a *c d a*
α *b a c d* a.

Hi vero ordines, ſi res a, *a*, α non diſcernantur, ad vnum redeunt, *abacda*, idque eodem modo ſe habet, quotcunque ſint res huiusmodi. Quare generatim numerus initio repertus, dividendus erit per $m . m - 1 . m - 2$

$m-2\ldots 1$, numerum ordinum in quos diſponi poſſunt res, quæ non diſcernuntur vt a, *a*, α, ſiquidem ponantur diverſæ eſſe: atque numerus quæſitus ita vniverſaliter exprimetur

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3\ldots\ldots 1}{m.\,m-1.\,m-2\ldots\ldots 1}$$

vel
$$\frac{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots m}$$

Vnde etiam patet, numerum hunc compendio reperiri, ſi in numeratore, inde ab 1, tot factores omittantur, quot in denominatore inſunt, ſervatis reliquis; poſſeque adeo eundem numerum & hoc modo exprimi:

$$m+1.\,m+2.\,m+3\ldots\ldots n.$$

Corollarium I.

§. 244. Simili ratiocinio colligitur, ſi in vniverſo rerum numero, præter eas quæ conſideratæ ſunt, & aliæ inſint numero quocunque t, quæ non diſcernuntur, numerum initio productum denuo per 1. 2. 3 . . t dividendum eſſe; adeoque numerum omnium ordinum diverſorum, qui iam produci poſſunt, exprimi hunc in modum:

$$\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5\ldots\ldots n}{1.\,2.\,3\ldots\ldots m.\,1.\,2.\,3.\,4\ldots t}$$

Idem facile & ad reliquos huiusmodi caſus extendetur.

Exemplum.

§. 245. Si quæratur quot modis permutari poſſint litteræ vocabuli ſtudioſus, calculus hic erit. Sunt litteræ omnino novem, quæ ſi diverſæ forent omnes, foret ordinum diverſorum numerus = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Sunt autem in hoc vocabulo primum tria *ſ*, quæ ſi diverſa forent, darent ordines 1. 2. 3. Præterea in eodem vocabulo duo *u* inſunt, quæ ſi diverſa ponantur, ordinum numerum 1. 2. exhibent. Per hos ergo numeros 1. 2. 3. 2 ſi initio repertus dividatur, quotus 2. 5. 6. 7. 8 9 eſt numerus quæſitus: poſſuntque ex vocabulo propoſito anagrammata fieri 30240.

Corollarium II.

§. 246. Hinc ſi duo ſint genera rerum, vt litteræ a plurimæ ac totidem b, quarum ſumi debeat numerus quicunque n; reperientur numeri indicantes, quot harum litterarum ordines diverſi conſtitui poſſint, ſi omnes aſſumptæ fuerint a, quot, ſi vna fuerit b, reliquæ a, quot, ſi duæ fuerint b, reliquæ a, & ita porro, donec omnes fiant b.

Facile enim patet, ſi omnes litteræ fuerint a, ordinem non niſi vnum fieri poſſe hunc $aaaa$...

Si vna fuerit b, reliquæ a, erit numerus litterarum a iſte $n - 1$, vnde per dicta numerus ordinum erit n, reliquis multiplicatoribus vsque ad $n - 1$ per diviſionem ablatis.

Si duæ fuerint *b* & reliquæ *a*, erit numerus litterarum *a* hic, $n-2$. Vnde ſi duæ *b* diverſæ forent, foret ordinum numerus $n.\,n-1$, reliquis factoribus vsque ad $n-2$, iterum deſtructis. Sed duæ *b* diverſæ non ſunt. Dividendus ergo erit numerus ita repertus per 1.2, vt fiat ordinum numerus $\frac{n.\,n-1}{1\,.\,2}$.

Si tres fuerint *b* & reliquæ *a*, erit numerus litterarum *a* iam $n-3$. Vnde ſi tres *b* diverſæ forent, foret numerus ordinum $n.\,n-1.\,n-2$. Sed diverſæ non ſunt *b*. Dividendus ergo eſt hic numerus per 1. 2. 3. vt prodeat numerus ordinum quæſitus $\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}$.

Eodem modo colligitur, ſi quatuor ſumantur *b* & reliquæ *a*, numerum ordinum fore $\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$.

Si quinque *b* & reliquæ *a*, fore ordinum numerum $\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$, & ita perpetuo, ſerie factorum in numeratore ab *n* ordine naturali decreſcente, in denominatore vero ab vnitate creſcente, per tot vtrinque terminos, quot vnitates inſunt in numero litterarum *b*.

Scholion.

§. 247. Qui ita producuntur numeri, maximi per omnem analyſin vſus ſunt, ſuccedunt autem hoc ordine

n^0 qui compendio dicetur . . . . . $= A$

$$\frac{n}{1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = B$$

$$\frac{n.n-1}{1.2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C$$

$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \ldots\ldots\ldots = D$$

$$\frac{n.n-1\,n-2.n-3}{1.2.3.4} \ldots\ldots = E$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} \ldots\ldots = F$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} \ldots = G$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6}{1.2.3.4.5.6.7} = H$$

& ita in infinitum. Vnde ſi *n* ſucceſſive explicetur per 1, 2, 3, 4 & ita porro, prodeunt numeri in ſubiecta tabella ita ſcripti, vt numeri ſub A pertineant ad ordines, in quibus omnes litteræ ſunt *a*; qui ſub B ad eos, in quibus vna eſt *b*, reliquæ *a*; qui ſub C ad ordines duarum *b*, reliquarum *a* & ita porro, ſumpto vniverſarum litterarum numero eo, qui initio ſcriptus eſt ſub *n*.

n	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
	a^n	$a^{n-1}b$	$a^{n-2}b^2$	$a^{n-3}b^3$	$a^{n-4}b^4$	$a^{n-5}b^5$	$a^{n-6}b^6$	$a^{n-7}b^7$	$a^{n-8}b^8$	$a^{n-9}b^9$	$a^{n-10}b^{10}$

Quo

Quo vero facilius appareat, e quibus litteris conſtare ponantur ordines, quorum numeri indicantur ſub quavis litterarum A, B, C &c. in fine ſubſcripta ſunt facta ex dignitatibus litterarum *a* & *b*, quæ ita explicanda ſunt, vt indicent tot ad ordinem quemvis efficiendum aſſumpta eſſe *a*, quot vnitates habet index dignitatis litteræ *a*, & tot *b*, quot ſunt vnitates in indice dignitatis litteræ *b*, in quovis eorum factorum. Sic $a^{n-5}b^5$ notat, numeros ſub F referri ad ordines ex quinque *b* & reliquis *a*. Speciatimque numerus 56 qui ſub F reſpondet valori $n=8$, indicat octo litterarum, quarum quinque ſunt *b* & tres reliquæ *a*, 56 ordines diverſos fieri poſſe. Eodem modo explicandi ſunt numeri reliqui.

PROBLEMA XXVIIII.

§. 248. *Reperire formam quadrati, cubi, biquadrati, & dignitatis cuiusvis ſuperioris, ex radice binomia.*

PRÆPARATIO.

§. 249. Nomina quantitatum ſunt litteræ, vel quæcunque ſigna alia, per quæ exprimuntur. Ergo radix binomia erit, quæ ex duobus conſtat eiusmodi nominibus, vt $a+b$, vel $-a-b$; $a-b$ vel $-a+b$. Plures radicis binomiæ formæ dari non poſſunt.

Solvtio.

§. 250. Si vero radix $a+b$ in ſe ipſam ducatur, & quod ita prodit, denuo multiplicetur per eandem radicem, & ita porro, facile apparet eius radicis dignitates ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ſextam eſſe has; quibus ipſa radix, vtpote dignitas prima, præmiſſa eſt,

I. $a+b$
II. $a^2+2ab+b^2$
III. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
IIII. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
V. $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
VI. $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

§. 251. Ex his autem facile formantur dignitates radicis $a-b$, negativa reddendo omnia facta, in quibus eſt aliqua dignitas quantitatis b, exponentis imparis; quo radicis huius $a-b$ eædem dignitates ordine fiunt

I. $a-b$
II. $a^2-2ab+b^2$
III. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
IIII. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
V. $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$
VI. $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$.

§. 252. Eodem modo apparet, radicis $-a+b$ dignitates fore a proximis ſolo ſignorum ordine diverſas has

I. $-a+b$
II. $+a^2-2ab+b^2$
III. $-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$
IIII. $+a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
V. $-a^5+5a^4b-10a^3b^2+10a^2b^3-5ab^4+b^5$
VI. $+a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$.

§. 253. In quibus ſi & dignitates nominis b, quarum exponentes ſunt impares, negativæ reddantur, prodeunt dignitates radicis $-a-b$, hac forma:

I. $-a-b$
II. $+a^2+2ab+b^2$
III. $-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$
IIII. $+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
V. $-a^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4-b^5$
VI. $+a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

§. 254. In omnibus his formis ordo ſignorum facile detegitur, nec minus prompte perſpicitur ſucceſſio factorum, quæ conflantur ex dignitatibus nominum a & b. Numeri autem, per quos hæc facta multiplicantur in quavis dignitate, ſi conferantur cum numeris tabellæ proximæ; §. 247. apparet, ad dignitatem I numeros eſſe 1, 1, eosdem qui in in tabella reſpondent valori $n = 1$; ad dignitatem II, numeros eſſe 1, 2, 1, eosdem qui in tabula reſpondent valori $n = 3$; ad dignitatem III eſſe numeros 1, 3, 3, 1, qui iidem in tabula reſpondent valori $n = 3$, & ita porro.

§. 255. Id autem vniverſale eſſe, atque ad omnes omnino binomii dignitates extendi, ita evinci poteſt. Ducatur binomium $a + b$ in $a + b$, quodque hinc prodit quadratum, multiplicetur per idem $a + b$ & ita porro; ſed ea lege, vt litteræ multiplicantes ſemper præſcribantur iis, quas multiplicant, facta autem, quæ ita prodeunt, non vniantur. Erunt huius binomii dignitates, ſecunda, tertia, quarta, quinta, iſtæ:

$$\begin{array}{llllll}
\text{II.} & aa & +\,ab & & & \\
 & & +\,ba & +\,bb & & \\
\hline
\text{III.} & aaa & +\,aab & & & \\
 & & +\,aba & +\,abb & & \\
 & & +\,baa & +\,bab & & \\
 & & & +\,bba & +\,bbb & \\
\hline
\text{IIII.} & aaaa & +\,aaab & & & \\
 & & +\,aaba & +\,aabb & & \\
 & & +\,abaa & +\,abab & & \\
 & & +\,baaa & +\,abba & +\,abbb & \\
 & & & +\,baab & +\,babb & \\
 & & & +\,baba & +\,bbab & \\
 & & & +\,bbaa & +\,bbba & +\,bbbb
\end{array}$$

V. *aaaaa* + *aaaab*
+ *aaaba* + *aaabb*
+ *aabaa* + *aabab*
+ *abaaa* + *aabba* + *aabbb*
+ *baaaa* + *abaab* + *ababb*
+ *ababa* + *abbab*
+ *abbaa* + *abbba* + *abbbb*
+ *baaab* + *baabb* + *babbb*
+ *baaba* + *babab* + *bbabb*
+ *babaa* + *babba* + *bbbab*
+ *bbaaa* + *bbaab* + *bbbba* + *bbbbb*.
+ *bbaba*
+ *bbbaa*

Hæ autem formæ ſi conſiderentur, patet 1° Factorum, ex quibus quælibet dignitas componitur, quodlibet tot litteras *a* & *b* complecti, quot vnitates inſunt in exponente eius dignitatis. 2° in omnibus eiusdem dignitatis factis, has litteras *a* & *b* omnibus modis coordinatas haberi, quibus coordinari poſſunt. Quadratum enim omnes binarum litterarum ordines continere, vltro patet. Cubus ergo cum formatus ſit, cuilibet horum ordinum præſcribendo & *a* & *b*, neceſſe eſt cubum omnes ternarum litterarum ordines continere. Vnde porro eodem ratiocinio evincitur, in dignitate quarta ineſſe omnes combinationes quaternarum, & ita porro. Generatim enim in quolibet loco

ineſt

ineſt a in aliquo ordine, & b in alio, cum reliquarum litterarum ordo vtrinque idem ſit. Cum ergo 3° facta iſta compendio ita ſcribi ſoleant, a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, &c. ſequitur ex hisce, tot facta a^n in dignitate ineſſe, quot ſunt ordines diverſi litteræ a numero n ſumptæ; tot facta $a^{n-1}b$, quot ſunt ordines diverſi litteræ a numero $n-1$, & litteræ b ſemel, ſumptæ; tot facta $a^{n-2}b^2$, quot ſunt ordines diverſi, litteræ a numero $n-2$, & litteræ b bis, ſumptæ; & ita porro. Quare numerus, per quem multiplicari debet a^n in qualibet dignitate erit is, qui §. 247. dictus eſt A, isque ſemper $= 1$, factum autem $a^{n-1}b$ generatim multiplicandum erit per eum, qui eodem loco dictus eſt B, $a^{n-2}b^2$ per C & ita porro, quicunque numerus integer denotetur per n. Eritque generatim $(a+b)^n = a^n$

$$+\frac{n}{1}.\,a^{n-1}b+\frac{n.\,n-1}{1.\ 2}\,a^{n-2}b^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\,a^{n-3}b^3+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\,a^{n-4}b^4\ \&c.$$

Corollarium I.

§. 256. Poteſt ergo cuiusvis binomii dignitas, quæ limites tabellæ non excedit, ex ea deſumi facile, in factis vltimæ lineæ loco n ſubſtituto indice dignitatis, ac quodlibet horum factorum per illum numerum tabulæ multiplicato,

tiplicato, qui facto illi imminet in ſerie, quam ſub n præcedit index dignitatis. Sic reperitur dignitas octava binomii $a + b$ hæc, $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$.

Corollarium II.

§. 257. Verum & ex vniverſali formula quamlibet binomii dignitatem, cuius exponens datur, componere facile eſt. Sit ea ſeptima, erit $n = 7$, atque $(a + b)^n = (a + b)^7 =$

$$a^7 + \frac{7}{1}a^6b + \frac{7.6}{1.2}.a^5b^2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}a^4b^3 + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}a^3b^4$$

$$+ \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}a^2b^5 + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}ab^6$$

$$+ \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2,3.4.5.6.7}b^7.$$

Hic enim deſinendum eſſe ex eo patet, quod membrum ſequens, ſi quæratur, prodeat $= 0$. Reductis ergo convenienter numeris coefficientibus, dignitas quæſita erit $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^2 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Corollarium III.

§. 258. Cæterum ex formis dignitatum radicis binomiæ initio conſideratis apparet, dignitatum harum eas, quarum exponentes pares ſunt, diverſas non eſſe, ſive $a + b$ ſit radix, ſive $-a-b$, neque magis eiusdem generis

neris dignitatem, cuius radix eſt $a - b$, differre ab ea, cuius $-a + b$ radix eſt: imparium autem exponentium dignitates radicis binomiæ, mutato alterutro vel vtroque ſignorum radicis, ſemper quoad ſigna mutari.

Corollarium IIII.

§. 259. Perſpecta autem forma dignitatis cuiuscunque radicis binomiæ, trinomiæ etiam radicis dignitas eiusdem gradus formabitur, & quadrinomiæ, & hac quoque magis compoſitæ.

Sit radix $a + b + c + d + e$ &c. cuius formandum ſit quadratum. Sumptis ergo ſucceſſive a, $a + b$, $a + b + c$, pro nomine primo, & littera has ſequente pro altero; brevitatis autem gratia, poſito $a = \mathrm{A}$, $a + b = \mathrm{B}$, $a + b + c = \mathrm{C}$, $a + b + c + d = \mathrm{D}$ &c. quadratum erit

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A}^2 & + 2\mathrm{A}b & + b^2 \\ & + 2\mathrm{B}c & + c^2 \\ & + 2\mathrm{C}d & + d^2 \\ & + 2\mathrm{D}e & + e^2 \end{array}$$

& ita porro, ſi plura fuerint nomina.

Cubus autem eiusdem radicis hoc modo exhibebitur:

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{A}^3 & + 3\mathrm{A}^2 b & + 3\mathrm{A}b^2 & + b^3 \\ & + 3\mathrm{B}^2 c & + 3\mathrm{B}c^2 & + c^3 \\ & + 3\mathrm{C}^2 d & + 3\mathrm{C}d^2 & + d^3 \\ & + 3\mathrm{D}^2 e & + 3\mathrm{D}e^2 & + e^3. \end{array}$$

Biquadratum ita:

$$\begin{array}{l} A^4 + 4A^3b + 6A^2b^2 + 4Ab^3 + b^4 \\ + 4B^3c + 6B^2c^2 + 4Bc^3 + c^4 \\ + 4C^3d + 6C^2d^2 + 4Cd^3 + d^4 \\ + 4D^3e + 6D^2e^2 + 4De^3 + e^4 \end{array}$$

eodemque modo formabuntur dignitates his ſuperiores. Signa autem vbique erunt ea, quæ ex ſignis nominum radicis per multiplicationem prodeunt.

Corollarium V.

§. 260. Hac methodo, quadrati radicis

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \eta z^5 + \theta z^6 \ \&c.$$

ſeptem priores termini reperiuntur, iſti:

$$\begin{array}{lllll} \alpha^2 & + 2\alpha\beta.z & + 2\alpha\gamma.z^2 & + 2\alpha\delta.z^3 & + 2\alpha\varepsilon.z^4 \\ & & + \beta\beta. & + 2\beta\gamma. & + 2\beta\delta. \\ & & & & + \gamma\gamma. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} + 2\alpha\eta.z^5 & + 2\alpha\theta.z^6 \\ + 2\beta\varepsilon. & + 2\beta\eta. \\ + 2\gamma\delta. & + 2\gamma\varepsilon. \\ & + \delta\delta. \end{array}$$

Cubi autem eiusdem radicis ſex priores termini ſunt:

$$\begin{array}{llllll} \alpha^3 & + 3\alpha^2\beta.z & + 3\alpha^2\gamma\, z^2 & + 3\alpha^2\delta.z^3 & + 3\alpha^2\varepsilon.z^4 & + 3\alpha^2\eta.z^5 \\ & & + 3\alpha\beta^2. & + 6\alpha\beta\gamma. & + 6\alpha\beta\delta. & + 6\alpha\beta\varepsilon. \\ & & & + \beta^3. & + 3\beta^2\gamma. & + 3\beta^2\delta. \\ & & & & + 3\alpha\gamma^2. & + 6\alpha\gamma\delta. \\ & & & & & + 3\beta\gamma^2. \end{array}$$

Quartæ dignitatis eiusdem radicis quinque priores termini ſunt hi:

$$\begin{array}{lllll} \alpha^4 & +4\alpha^3\beta.z & +4\alpha^3\gamma.z^2 & +4\alpha^3\delta.z^3 & +4\alpha^3\varepsilon.z^4 \\ & & +6\alpha^2\beta^2. & +12\alpha^2\beta\gamma. & +12\alpha^2\beta\delta. \\ & & & +4\alpha\beta^3. & +12\alpha\beta^2\gamma. \\ & & & & +6\alpha^2\gamma^2. \\ & & & & +\beta^4. \end{array}$$

Quintæ dignitatis quatuor priores termini

$$\begin{array}{llll} \alpha^5 & +5\alpha^4\beta.z & +5\alpha^4\gamma.z^2 & +5\alpha^4\delta.z^3 \\ & & +10\alpha^3\beta^2. & +20\alpha^3\beta\gamma. \\ & & & +10\alpha^2\beta^3. \end{array}$$

Sextæ dignitatis tres priores termini

$$\begin{array}{lll} \alpha^6 & +6\alpha^5\beta.z & +6\alpha^5\gamma.z^2. \\ & & +15\alpha^4\beta^2. \end{array}$$

qui, ſi opus ſit, extendi poſſunt.

Corollarium VI.

§. 261. Hinc autem priores termini cuiuscunque dignitatis radicis

$$1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\varepsilon z^5 \ \&c.$$

haud difficulter formabuntur. Sit index dignitatis, ad quam radix hæc elevanda eſt, m, dicaturque $Z=\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4$ &c. vt fiat $1+Z$ ipſi radici propoſitæ æqualis. Si ergo A, B, C, D &c. notaverint eosdem coefficientes terminorum, ex quibus dignitates componuntur, generales, quibus denotandis hæ litteræ ſupra §. 247. adhibitæ ſunt, erit

$(1+Z)^m = A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4 + \&c.$
Cum autem $Z = z(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 \&c.)$, erit ex modo repertis

$$\begin{array}{llllll}
Z^2 = z^2.(\alpha^2 & + 2\alpha\beta.z & + 2\alpha\gamma.z^2 & + 2\alpha\delta.z^3 & + 2\alpha\varepsilon.z^4 + \\
 & & + \beta\beta. & + 2\beta\gamma. & + 2\beta\delta. + \\
 & & & & + \gamma\gamma. + \\
Z^3 = z^3.(\alpha^3 & + 3\alpha^2\beta.z & + 3\alpha^2\gamma.z^2 & + 3\alpha^2\delta.z^3 & + \\
 & & + 3\alpha\beta^2. & + 6\alpha\beta\gamma. & + \\
 & & & + \beta^3. & + \\
Z^4 = z^4.(\alpha^4 & + 4\alpha^3\beta.z & + 4\alpha^3\gamma.z^2 & + & \\
 & & + 6\alpha^2\beta^2. & + & \\
Z^5 = z^5.(\alpha^5 & + 5\alpha^4\beta z & +) & & \\
Z^6 = z^6.(\alpha^6 +) & & & &
\end{array}$$

vnde, tribuendo litteræ A valorem 1, qui ei ſemper competit, reliquis autem brevitatis cauſſa ſervatis, fit

$$\begin{array}{llllllll}
A & = 1 + 0 & & & & & & \\
+BZ & = & +B\alpha z & +B\beta z^2 & +B\gamma z^3 & +B\delta z^4 & +B\varepsilon z^5 & +B\eta z^6 \\
+CZ^2 & = & - \; - \; - & +C\alpha^2 z^2 & +2C\alpha\beta z^3 & +2C\alpha\gamma z^4 & +2C\alpha\delta z^5 & +2C\alpha\varepsilon z^6 \\
 & & & & & +C\beta^2 z^4 & +2C\beta\gamma z^5 & +2C\beta\delta z^6 \\
 & & & & & & & +C\gamma\gamma z^6 \\
+DZ^3 & = & - \; - \; - & - \; - \; - & +D\alpha^3 z^3 & +3D\alpha^2\beta z^4 & +3D\alpha^2\gamma z^5 & +3D\alpha^2\delta z^6 \\
 & & & & & & +3D\alpha\beta^2 z^5 & +6D\alpha\beta\gamma z^6 \\
 & & & & & & & +D\beta^3 z^6 \\
+EZ^4 & = & - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & +E\alpha^4 z^4 & +4E\alpha^3\beta z^5 & +4E\alpha^3\gamma z^6 \\
 & & & & & & & +6E\alpha^2\beta^2 z^6 \\
+FZ^5 & = & - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & +F\alpha^5 z^5 & +5F\alpha^4\beta z^6 \\
+GZ^6 & = & - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & - \; - \; - & +G\alpha^6 z^6
\end{array}$$

Eſt ergo $(1+Z)^m = 1 + B\alpha z + (B\beta + C\alpha^2)z^2 + (B\gamma + 2C\alpha\beta + D\alpha^3)z^3 + \&c.$ ſecundum formulam: per quam ergo primi termini cuiuscunque radicis, quæ ſubeſt expreſſioni vniverſali

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \&c.$$

reperientur, illatis in eam valoribus litterarum B, C, D, E &c. & reliquarum huiusmodi, qui per indicem dignitatis m dantur.

§. 262. Si detur radix hæc:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \&c.$$

quæ ex vniverſali formatur, quemlibet coefficientium per α, β, γ, δ &c. denotatorum ponendo $= 1$, erit eius dignitas ordinis cuiuscunque iſta,

$$\begin{aligned}&1 + Bz + (B + C)z^2 + (B + 2C + D)z^3\\&+ (B + 3C + 3D + E)z^4\\&+ (B + 4C + 6D + 4E + F)z^5 + \&c.\end{aligned}$$

in qua lex progreſſionis facile apparet.

Iam ſi index dignitatis nunc quoque ponatur eſſe m, quia §. 247.

$$B = m,$$

$$C = \frac{m.m-1}{1.2} = \frac{m^2-m}{1.2}$$

$$D = \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} = \frac{m^3-3m^2+2m}{1.2.3}$$

$$E = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

ſive $$E = \frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$F = \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

ſive $$F = \frac{m^5 - 10m^4 + 35m^3 - 50m^2 + 24m}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5};$$

ſit $$B + C = \frac{2m}{2} + \frac{m^2 - m}{2} = \frac{m^2 + m}{1.\ 2}$$

$$B + 2C + D = m + m^2 - m + \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{2.\ 3}$$

$$= \frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{1.\ 2.\ 3}$$

$$B + 3C + 3D + E = \frac{2m}{2} + \frac{3m^2 - 3m}{2}$$

$$+ \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{2}$$

$$+ \frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m}{2.\ 3.\ 4}$$

$$= \frac{m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

B+4C

$$B + 4C + 6D + 4E + F$$

$$= m + 2m^2 - 2m + m^3 - 3m^2 + 2m$$

$$+ \frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m}{2 \cdot 3}$$

$$+ \frac{m^5 - 10m^4 + 35m^3 - 50m^2 + 24m}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= \frac{m^5 + 10m^4 + 35m^3 + 50m^2 + 24m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Qui coefficientes facile continuantur: ſi autem conſiderentur attentius, pateſcit, hos ab illis qui denotantur per litteras B, C, D, E ſolis ſignis differre.

§. 263. Producitur autem ſeries propoſita $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 +$ &c. ſi 1 dividatur per $1 - z$, poteſtque ſeries fractioni $\frac{1}{1 - z}$ æqualis poni, eo ſenſu quem §. 114. declaravimus. Vnde ſequitur, dignitatem ordinis m fracti $\frac{1}{1 - z}$, id eſt $\frac{1}{(1 - z)^m}$ vel $(1 - z)^{-m}$, exprimi poſſe per ſeriem,

$$1 + m.z + \frac{m^2 + m.}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{m^3 + 3m^2 + 2m.}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3$$

$$+ \frac{m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 \text{ \&c.}$$

Hinc

Hinc autem, ſi ponatur $z = -\frac{b}{a}$, dignitas ordinis m radicis binomiæ $a(1+\frac{b}{a})$, id eſt $(a+b)^{-m}$, producetur, loco z vbique ſcribendo $-\frac{b}{a}$, & omnia multiplicando per a^{-m}: quo labore obtinetur,

$$(a+b)^{-m} = a^{-m} - m a^{-m-1} b + \frac{m^2+m.}{1.\ 2.} a^{-m-2} b^2$$

$$- \frac{m^3+3m^2+2m.}{1.\ 2.\ 3} a^{-m-3} b^3$$

$$+ \frac{m^4+6m^3+11m^2+6m.}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{-m-4} b^4 - \&c.$$

§. 264. Hac iam formula ſi conſideretur, patet eam facile fieri ex illa, per quam binomium evehitur ad dignitatem exponentis poſitivi, id eſt, per quam exhibetur $(a+b)^n$, dum modo in formula huius dignitatis §. 255. data, vbique loco n ſcribatur $-m$. Quare formula illa §. 255. vniverſalis erit omnium dignitatum binomii $a+b$, quarum exponentes ſunt numeri integri; ſive affirmativi hi fuerint, ſive negativi.

PROBLEMA XXX.

§. 265. *Extrahere radicem duorum vel plurium nominum, ex dato quadrato quadraticam, ex cubo, cubicam, ex biquadrato, biquadraticam & ita porro.*

SOLVTIO.

§. 266. Quæcunque dignitas radicis plurium nominum detur, vt quadratica hæc
$$D = 16b^4 + 16b^2ax + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 8ax^3 + 4x^4$$
ſemper diſponetur ſecundum indices dignitatum litteræ, quæ in ea ſæpiſſime occurrit, præcedentibus eius litteræ dignitatibus inferioribus, ſequentibus ordine ſuperioribus, vel inverſe, ſuperioribus præcedentibus, inferioribus autem ordine ſequentibus. Sique plures fuerint in ea dignitatis expreſſione litteræ, harum quoque, quantum per priorem illam licet, ſimilis habebitur ratio. Deinde

§. 267. Si radix quadratica extrahenda ſit, ſumpto pro primo nomine radicis A, cuius quadratus ſit primus quadrati terminus, ſubtrahe AA a quadrato dato D, reſidui autem D — AA terminum primum divide per 2A, erit quotus nomen radicis alterum, quod dic B. Hoc B reperto, fac $(A + B)^2$, idque ſubtrahe ab eodem quadrato dato D. Si nihil relinquatur, id eſt, ſi deprehendatur

tur $D - (A+B)^2 = 0$, eo ipſo patet eſſe $A+B$ radicem quæſitam. Si aliquid remanſerit, eius reſidui $D - (A+B)^2$ terminos primos divide per $2(A+B)$, erit quotus, quem dico C, nomen radicis tertium. Fac iam $(A+B+C)^2$, idque ſubtrahe a quadrato dato D. Si ergo iam fuerit $D - (A+B+C)^2 = 0$ erit $A+B+C$ radix, ſin differentia relinquatur aliqua eodem modo perge, ſemper dividendo per duplum nominum radicis repertorum, atque a quadrato dato ſubtrahendo eorum quadratum, donec nihilum relinquatur.

§. 268. Si D cubus fuerit, cuius quæritur radix cubica, ſume A æqualem radici cubicæ primi termini cubi, ſecundum dicta diſpoſiti, ſubtractoque a D huius A cubo, reſidui $D - A^3$ terminum primum divide per $3A^2$, erit quotus, quem dico B, nomen radicis alterum. Fac iam $D - (A+B)^3$, quod ſi fuerit $= 0$, erit $A+B$ radix cubica quæſita. Sin aliquod fuerit reſiduum $D - (A+B)^3$, eius terminos primos divide per $3(A+B)^2$, erit quotus, quem dico C, nomen radicis tertium. Fac iterum $D - (A+B+C)^3$, ac in vniverſum perge, vt apud radicem quadraticam, niſi quod hic dividendum ſit per triplum quadrati ex nominibus radicis repertis,

atque

atque a cubo dato ſubtrahendus cubus eorundem nominum.

§. 269. Si D fuerit biquadratum, quæraturque eius radix biquadratica, ſume A æqualem radici quadraticæ primi termini biquadrati legitime depoſiti, fac $D - A^4$, atque reſidui terminum primum divide per $4A^3$, erit quotus, quem iterum dico B, nomen radicis alterum. Iam a dato biquadrato D ſubtrahe $(A + B)^4$, ac reſidui $D - (A + B)^4$, ſi quod fuerit, terminos primos divide per $4(A + B)^3$, quo producatur nomen radicis tertium C. Fac $D - (A + B + C)^4$, ac reliqua abſolve, vt cœptum eſt.

§. 270. Si D fuerit dignitas quinta alicuius radicis ex pluribus nominibus compoſitæ, atque hæc quæratur, pro A ſumenda erit radix quinta primi termini dignitatis D. Deinde ſucceſſive ſubtrahendum A^5, $(A + B)^5$, $(A + B + C)^5$ & ita porro, reſiduum autem dicto modo dividendum per $5A^4$, $5(A + B)^4$, $5(A + B + C)^4$, quo nomen radicis ſequens eliciatur.

§. 271. Et generatim, ſi D fuerit radicis plurium nominum dignitas ordinis n, reliquis omnibus manentibus, ſucceſſive ſubtrahentur A^n, $(A + B)^n$, $(A + B + C)^n$, reſiduorum autem termini priores dividentur per

nA^{n-1}, $n(A+B)^{n-1}$, $n(A+B+C)^{n-1}$, donec perveniatur ad nihilum.

DEMONSTRATIO.

Nomen radicis ſequens per diviſionem imperatam elici, ex compoſitione dignitatum §. 255. clare patet. Reliqua per ſe manifeſta ſunt.

Exemplum I.

§. 272. Si quadrati in ſolutione poſiti

$$16b^4+16b^2ax+4a^2x^2+16b^2x^2+8ax^3+4x^4=D$$

radix quæratur, eſt $A=4b^2$, & $2A=8b^2$, per quod ſi dividatur $16b^2ax$, terminus primus reſidui $D-A^2$, prodit $2ax=B$, ergo $A+B=4b^2+2ax$, & $(A+B)^2=16b^4+16b^2ax+4a^2x^2$, & $2(A+B)=8b^2+4ax$. Reſidui $D-(A+B)^2$ termini primi ſunt $16b^2x^2+8ax^3$, qui, ſi dividantur per $2(A+B)$, prodit $2x^2=C$; ſitque $D-(A+B+C)^2=0$, quare $4b^2+2ax+2x^2$ eſt radix quæſita.

Exemplum II.

§. 273. Sit propoſitum quadratum

$$cc-2cb+bb+4ca-4ba+4aa=D$$

erit $A=c$, & $2A=2c$. Quadrato AA ſubtracto, ſi terminus proximus dividatur per $2c$ prodit $-b$, ergo $A+B=c-b$, & $(A+B)^2=c^2-2cb+b^2$. Hoc ſubtracto, termini proximi $4ca-4ba$, diviſi per $2c-2b$ dant $2a=C$, ergo $A + B + C = c - b + 2a$, cumque $D - (A + B + C)^2 = 0$, eſt $c - b + 2a$ radix quæſita.

Exemplum III.

§. 274. Reperienda ſit radix quadrati

$$81 + 108x - 24x^3 + 4x^4 = D.$$

erit $A = 9$, & $B = 6x$, cuius quadratum $81 + 108x + 36x^2$ ſi ſubtrahatur, reſidui termini primi ſunt $- 36x^2 - 24x^3$. Hi iam diviſi per $18 + 12x$, dant $-2x^2$, eſtque

$$(9 + 6x - 2x^2)^2 = D.$$ Quare &c.

Exemplum IIII.

§. 275. Sit ex cubo

$$8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 + 12a^2c - 36abc$$
$$+ 27b^2c + 6ac^2 - 9bc^2 + c^3 = D$$

extrahenda radix cubica. Erit $A = 2a$, & $3A^2 = 12a^2$. Dempto A^3 a cubo propoſito, terminus proximus eſt $-36a^2b$, qui diviſus per $3A^2$, dat $-3b = B$, & $A + B = 2a - 3b$. Huius cubus ſi dematur a propoſito D, relinquitur $12a^2c - 36abc + 27b^2c + 6ac^2 - 9bc^2 + c^3$, cuius termini primi ſi dividantur per $3(A + B)^2 = 3(4a^2 - 12ab + 9b^2)$, quotus prodit $c = C$; eſtque $(2a - 3b + c)^3 = D$. Quare radix cubica reperta eſt.

Scholion.

§. 276. Ita radices extrahuntur quotcunque nominum ex *poteſtatibus perfectis*. Cumque,

que, ſi exponens poteſtatis numerus par ſit, ſemper radix duplex haberi poſſit; §. 258. præter inventam, altera quidem eadem methodo reperiri poterat, ſumpta radice primi termini dignitatis D negativa, (vt in exemplorum datorum ſecundo, ſumpta $A = -c$) ab hoc termino pergendo iuxta methodum præſcriptam. Verum multo magis expeditum eſt radicis repertæ ſigna omnia invertere, quo in hoc exemplo fit altera radix $-c + b - 2a$, & ſic in reliquis.

§. 277. Facile autem patet, non cuiusvis quantitatis, vtcunque expreſſæ, radicem ordinis cuiusvis imperati hoc modo exhiberi poſſe. Radix quadratica quantitatis huius $a^2 + b^2$, per expreſſionem diſtinctam atque radicalibus carentem exhiberi nullo modo poteſt: ſuntque infinitæ huius generis aliæ.

§. 278. Verum tamen, quomodocunque expreſſa ſit aliqua quantitas A, ſi vnitas ſumatur eiusdem generis cum A, ſemper inter vnitatem illam & quantitatem A cadit media proportionalis, poteſtque, ſi 1 & A per lineas rectas dentur, facile reperiri. *Geom.* §. 189. Poſſunt & duæ proportione mediæ inter eandem 1 & A concipi, quamvis per geometriam elementarem non reperiantur, & tres & quotcunque aliæ. Sumpta ſcilicet a quacunque, ſi formetur progreſſio geometrica

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, &c.

ponaturque $A = a^2$, erit a media proportionalis inter 1 & A; ſi $A = a^3$, erit a prima duarum a & a^2 proportione mediarum inter 1 & A; ſi $A = a^4$, erit a prima trium a, a^2, a^3 proportione mediarum inter 1 & A; & ita porro. Patet autem, quidquid ſit A, augendo vel imminuendo magnitudinem aſſumptæ a ſemper eo perveniri poſſe, vt fiat vel $A = a^2$, vel $A = a^3$, vel $A = a^4$, vel $A = a^5$ & generatim $A = a^n$.

§. 279. Vidimus autem, ſi A notare concipiatur quantitatem a^n, vel ſi ponatur $A = a^n$, fore $a = \sqrt[n]{A}$, id eſt, $\sqrt[n]{A}$ idem denotaturum, quod a. §. 92. Quare $\sqrt[n]{A}$ ſemper quantitatem aliquam veram & realem notabit, ſi A quantitatem abſolute ſumptam notaverit, vel affirmativam, quemcunque numerum denotaverit n.

§. 280. Poterit autem, ſi A quantitas affirmativa fuerit, atque n aliquem numerorum parium notaverit, valor formulæ $\sqrt[n]{A}$, præter a affirmativam, ſemper & per a negativam exhiberi. Id cum ex dictis perſpiciatur, ex eo quoque patet, quod in progreſſione geometrica ab 1 inchoata, cuius alter terminus eſt $-a$, digni-

dignitates exponentium parium nihilominus affirmativæ prodeunt. Fit enim progreſſio

$$1, -a, a^2, -a^3, a^4, -a^5, a^6, -a^7, a^8.$$

Quare $\sqrt[n]{A}$ hoc caſu, præter quantitatem affirmativam, quæ ſcilicet exprimi poſſit per $+a$, ſemper & negativam notabit illi æqualem, quæque adeo exprimi poſſit per $-a$.

§. 281. Si vero exponens n fuerit impar, formula $\sqrt[n]{A}$ quantitatem negativam notare non poterit, ſi A fuerit affirmativa; neque affirmativam, ſi A negativa fuerit; cum ſi a ponatur affirmativa, omnes eius dignitates, quarum exponentes ſunt numeri impares, affirmativæ prodeant, negativæ autem, ſi a negativa fiat; quod ex progreſſionibus propoſitis manifeſte perſpicitur.

§. 282. Ex altera harum progreſſionum id quoque apparet, ſi n impar fuerit, formulam $\sqrt[n]{A}$ & eo caſu quantitatem aliquam veram denotare, quo A negativa eſt.

§. 283. Verum ſi A notaverit aliquam quantitatem negativam, atque n fuerit numerus par quicunque, 2, 4, 6 &c. nulla dabitur quantitas, quæ reſpondeat huic expreſſioni $\sqrt[n]{A}$. Sive enim ea quantitas poſitiva eſſe ponatur, ſive negativa, ſemper dignitates exponentium parium, quarum aliquam notare ponitur A, poſitivæ fiunt. Quare ſi $\sqrt[n]{-A}$ notare ponatur a, hæc a neque poſitiva erit, neque negativa, ergo impoſſibilis.

DEFINITIO VII.

§. 284. Quantitas algebraice *rationalis* dicetur, quæ diſtincte exhiberi poteſt, & absque radicalibus vel potentiarum exponentibus fractis. *Irrationalis* autem, quæ absque radicalibus, vel dignitatum exponentibus fractis exhiberi nequit.

Scholion.

§. 285. Quantitates rationales ſunt, quæ ita exprimuntur; a^2+2ab; $a^3-\frac{2}{3}a^2b+\frac{1}{4}b^3$; $a^m-2a^mb^s-8a^mb^sc^t$; m, s, & t numeros quoscunque integros notantibus, affirmativos vel negativos. Excludendi enim ſunt ab exponentibus fracti, quia huius generis dignitates radicalibus æquipollent, vt $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Cæterum $\sqrt{a^2}$ rationalis eſt, quia idem denotat quod a, vt & $\sqrt{(aa-2ab+bb)}$ & $\sqrt[3]{b^6}$ & alia huius modi. Sed $\sqrt{a^2b}$ vel $\sqrt[3]{a^3b}$ & alia huius modi irrationalia ſunt.

§. 286. Non vero eodem prorſus ſenſu vocabula iſta hic ſumuntur, quo vſurpata fuere a veteribus. Illi duas quantitates *commenſurabiles* vocarunt, quarum communis quædam menſura eſt, quarumque adeo prior refertur ad poſteriorem, vt numerus aliquis definitus integer ad alium eiusmodi numerum. *Incommenſurabiles* autem dixerunt, quarum nulla communis menſura reperiri poteſt, & quarum adeo ratio per numeros definitos integros exhiberi nequit. Eo ſenſu lineæ commenſurabiles dici poſſunt, quadrata, & quæcunque quantitates aliæ. Irrationalem autem veteres dixerunt lineam, quæ non ipſa tantum incommenſurabilis eſt cuicunque lineæ alii, pro vnitate ſumptæ; ſed cuius quadratum quoque menſuram nullam admittit, illi cum quadrato eius lineæ, quæ pro vnitate ſumpta fuit, communem. Verum cum hic non ipſæ quantitates ſpectentur, ſed ipſarum ſpecies tantum; tanto magis ab his denominationibus diſcedere licuit. Neque enim quæ algebraice irrationalia ſunt, vel vniverſaliter ſpectata, quanta vnitati geometrice vel arithmetice incommenſurabilia notant in omni caſu, neque algebraice rationalia propterea neceſſario quantitates notant vnitati commenſurabiles. Sic $\sqrt{a}$ vniverſaliter irrationalis eſt; ſi vero a notaverit 1 vel 4, vel 9, vel alium quemcunque quadratum, $\sqrt{a}$ notabit 1, vel 2, vel 3, & in vniverſum numerum vnitati commenſurabilem. Contra *a* algebraice rationalis eſt. Si vero *a* notaverit $\sqrt{2}$ vel $\sqrt{3}$ vel $\sqrt[3]{9}$, erit *a* vnitati incommenſurabile.

§. 287. Irrationale proprie dictum ſemper quantum veri nominis, atque poſſibile eſt. Quare etſi impoſſibile eodem modo expreſſum ſit, quo exprimi irrationalia poſſunt, vt hoc $\sqrt{-a}$, id irrationale dici, ſi proprie loqui velimus, non debet. *Radicalium* autem nomine impoſſibilia eiusmodi ſimul continentur.

§. 288. Eſt autem formularum, quæ radicalia continent, vel totæ ex radicalibus conſtant, ſpecialis quidam algorithmus, iis æque conveniens, ſive radicalia illa quantitates rationales denotaverint, ſive irrationales, ſive impoſſibilia. Eius particulæ cum iam tradi potuerint, reliqua ex oſtenſis facile deducentur.

PROBLEMA XXXI.

§. 289. *Radicale quodcunque, ſi fieri poſſit, ſimplicius exprimere, irrationalitate ex eius parte ſublata.*

PRÆ-

PRÆPARATIO.

§. 290. Vidimus §. 101. eſſe $\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}}$

$$= \frac{\sqrt[n]{b^r} \times \sqrt[n]{d^t}}{\sqrt[n]{c^s}}.$$

Si ergo fuerit $r = n$, erit $\sqrt[n]{b^r} = b$ §. 93. atque $\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}} = b\sqrt[n]{\frac{d^t}{c^s}}$.

Si fuerit $s = n$, erit $\sqrt[n]{c^s} = c$, & hinc $\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}} = \frac{\sqrt[n]{b^r d^t}}{c} = \frac{1}{c}\sqrt[n]{b^r d^t}$.

Generatim ergo multiplicator ante ſignum radicis, qui ſcilicet ipſum radicale multiplicat, idem valebit, quod eius multiplicatoris dignitas, cuius index idem eſt cum indice ordinis radicis n, valet ſub ſigno illo, quod eo loco exiſtit, multiplicans. Idemque & de diviſione dicendum erit, niſi velis diviſionem per c^s dicere multiplicationem per fractum $\frac{1}{c^s}$.

SOLVTIO.

§. 291. Hinc ſi a numero vel quantitate vtcunque expreſſa, quæ ſub radicis ſigno eſt, factor ſeparetur integer vel fractus, qui ſit dignitas eiusdem ordinis, cuius ordinis eſt radix; factoris eius radix eiusdem ordinis ante ſignum radicis, tanquam factor, recte ſemper collocabitur, & cum effectu propoſito.

Exempla.

§. 292. Sic $\sqrt{aabc}$ fit $a\sqrt{bc}$, & $\sqrt{48} = \sqrt{4.12}$ fit $2\sqrt{12}$. Vel quia præterea $\sqrt{48} = \sqrt{16.3}$, idem numerus & in hunc concinnabitur $4\sqrt{3}$.

Sed $\sqrt{48aabc}$ ſimplicius ita ſcribetur $4a\sqrt{3bc}$, ex factore $16aa$ radice quadratica extracta.

$\sqrt{27a^3b^2c}$ idem notabit, quod $3ab\sqrt{3ac}$, eſt enim $9a^2b^2$ quantitatis ſub ſigno radicis factor quadraticus.

Porro $\sqrt{\frac{7}{25}}$ concinnius ita exprimetur $\frac{1}{5}\sqrt{7}$. & $\sqrt{\frac{28}{45}}$ hoc modo $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{5}}$, nam $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45}$.

Sic & $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$, nam 8 cubus eſt radicis 2. Pariterque $\sqrt[3]{\frac{5}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{5}$, & $a\sqrt[3]{b^3c} = ab\sqrt[3]{c}$.

Idem & de magis compoſitis valet, eſtque $\sqrt{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{cc}} = \frac{a - 2b}{c}\sqrt{ab}$, quia $a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3 = ab(a - 2b)^2$.

Et ſimiliter $\sqrt{\frac{aabbmm + 4aacm^3}{ppzz}} = \frac{am}{pz}\sqrt{(bb + 4cm)}$

Haud

Haud aliter ex $\sqrt[4]{\frac{a^3}{x}} = \sqrt[4]{\frac{a^4}{ax}}$ fit $a\sqrt[4]{\frac{1}{ax}}$ vel ex $\sqrt[4]{a^3x} = \sqrt[4]{\frac{a^4x}{a}}$ iſtud $a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$.

Ex $\sqrt[6]{a^7x^5}$ fit $a\sqrt[6]{ax^5}$, vel, quia $\sqrt[6]{a^7x^5} = \sqrt[6]{\frac{a^7x^6}{x}}$, idem radicale & hoc modo $ax\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$ exhibetur.

Sic & $\sqrt{-a^3b^2c} = ab\sqrt{-ac}$

& $\sqrt{-\frac{a^2b}{c^2}} = \frac{a}{c}\sqrt{-b}$.

Corollarium.

§. 293. Manifeſtum autem eſt operationem etiam inverti poſſe, vt loco $a\sqrt{b}$ ſcribatur $\sqrt{a^2b}$, vel loco $\frac{a}{c}\sqrt{b}$, ponatur $a\sqrt{\frac{b}{cc}}$, & ſic in reliquis huiusmodi.

Scholion.

§. 295. Sunt & aliæ concluſiones quæ ex theoremate adducto ſequuntur, vt hæc, $\sqrt[4]{a^3b} = \sqrt{a}\times\sqrt[4]{ab}$, cum ſit $\sqrt[4]{aa} = \sqrt{a}$, & quæ ſunt huiusmodi. Sed harum ſpeciali conſideratione facile carebit, qui theorema comprehenderit, ex quo deducta ſunt.

§. 295. Cæterum, ſi radicalia ita reducantur, ſæpe illorum, quæ prorſus diverſa poterant videri, apparet identitas ea, per quam duo radicalia, quorum ſumma quæritur vel differentia, ſecundum dicta §. 52. in vnum poſſint coire: quemadmodum iſta $\sqrt{48}$ & $\sqrt{75}$, ſi reducantur fiunt $4\sqrt{3}$ & $5\sqrt{3}$, atque hinc $\sqrt{75} + \sqrt{48} = 9\sqrt{3}$, & $\sqrt{75} - \sqrt{48} = \sqrt{3}$. Sic cum $\sqrt{\frac{16}{27}}$, ſi vterque fracti terminus per 3 multiplicetur, fiat $\sqrt{\frac{16 \cdot 3}{81}}$, erit $\sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$, & hinc $\sqrt{75} + \sqrt{\frac{16}{27}} = (5 + \frac{4}{9})\sqrt{3} = \frac{49}{9}\sqrt{3}$. atque $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}} = (4 - \frac{4}{9})\sqrt{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$. Porro cum $4\sqrt{-18}$ reducatur in $12\sqrt{-2}$, & $\sqrt{-2a^2}$ ſit $= a\sqrt{-2}$, erit horum ſumma $(12 + a)\sqrt{-2}$, quidquid notaverit a.

Idem & in aliis caſibus locum habere, in quibus pro numeris ſunt litteræ, per ſe clarum eſt; exempla autem occurrent in ſequentibus.

PROBLEMA XXXII.

§. 296. *Duo radicalia diverſorum ordinum ad eundem ordinem reducere.*

PRÆPARATIO.

§. 298. Quia $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, cuius dignitas ordinis cuiuscunque t oritur exponente $\frac{m}{n}$ per t multiplicato: §. 103. radix autem eius ordi-

ordinis, quem exponit index t, exprimitur, ſi idem $\frac{m}{n}$ per t dividatur; ſequitur & $\sqrt[n]{a^m}$ ad dignitatem, cuius index eſt t, evehi, per t multiplicato exponente m; ſi vero exponens n per t multiplicetur, eiusdem radicalis radicem ordinis t ſiſti. Quare ſi vtrumque fiat, dignitas multiplicatione indicis m producta, reducetur ad priſtinam, multiplicatione indicis n, ſi idem vtrinque multiplicator t adhibeatur; eritque generatim

$$\sqrt[nt]{a^{mt}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Valor ſcilicet cuiuscunque radicalis non mutabitur, vtroque indice, cum eo qui ad radicem pertinet n, tam altero, qui pertinet ad quantitatem ſub ſigno radicis m, per eundem numerum t multiplicato vel diviſo.

SOLVTIO.

§. 298. Si ergo dentur radicalia diverſorum ordinum hæc: $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[s]{c^t}$, multiplicato vtroque indice n & m per indicem radicis alterius s, & vtroque indice s & t per indicem radicis primæ n, fiet $\sqrt[ns]{a^{ms}} = \sqrt[n]{a^m}$, & $\sqrt[sn]{c^{tn}} = \sqrt[s]{c^t}$, eruntque radicalia ita producta eiusdem ordinis, vtpote quorum idem eſt

index

index *ns*. Poterit autem & numerus *ns* imminui, ſi aliquis fuerit diviſor, tribus, *ns*, *ms* atque *tn* communis.

Corollarium.

§. 299. Hoc modo ad eundem ordinem reductorum radicalium alterum multiplicabitur per alterum vel dividetur, ſecundum regulam, qua modo vſi ſumus §. 290.

Exempla.

§. 300. Sic $\sqrt{ax}\times\sqrt[3]{a^2x}=\sqrt[6]{a^3x^3}\times\sqrt[6]{a^4x^2}$ $=\sqrt[6]{a^7x^5}$, & ſi (:) diviſionem notaverit, $\sqrt{ax}:\sqrt[3]{a^2x}=\sqrt[6]{\frac{x}{a}}$.

Sic quoque $\sqrt{a}\times\sqrt[4]{ax}=\sqrt[4]{a^2}\times\sqrt[4]{ax}=\sqrt[4]{a^3x}$, & $\sqrt{a}:\sqrt[4]{ax}=\sqrt[4]{\frac{a}{x}}$.

Eodem modo $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ contrahetur in $\sqrt[4]{36}\times\sqrt[4]{\frac{5}{6}}=\sqrt[4]{30}$, & quæ ſunt alia huiusmodi.

Scholion I.

§. 301. His perſpectis, formulæ e diverſis terminis compoſitæ, quorum aliqui radicalibus carent, alii non, per quaſcunque alias multiplicabuntur, vel dividentur, ſumptis pro norma illis, quæ generatim de multiplicatione & diviſione tradita ſunt, obſervatoque quadratum ex $\sqrt{a}$ eſſe a; quadratum autem ex $\sqrt{-a}$ eſſe $-a$; cubum ex $\sqrt[3]{a}$ eſſe a; & cubum huius $\sqrt[3]{-a}$ eſſe $-a$, & quæ ſunt huiusmodi, quæ ex dictis vltro patent. Commodum autem eſt, radicalia eorum, quorum alterum multiplicandum eſt per alterum vel dividendum, ad eundem ordinem ante reducta eſſe.

Exempla.

§. 302. Si $a + b\sqrt{a}$ multiplicandum ſit per $b - \sqrt{a}$, erit ſchema calculi iſtud

$$\begin{array}{l} a + b\sqrt{a} \\ b - \sqrt{a} \\ \hline ab + bb\sqrt{a} \\ \qquad - a\sqrt{a} - ab \\ \hline \end{array}$$

ergo factum erit $(bb - a)\sqrt{a}$.

Si $a + b\sqrt{-a}$ multiplicandum ſit per $b - \sqrt{-a}$, erit ſchema tale

$$\begin{array}{l} a + b\sqrt{-a} \\ b - \sqrt{-a} \\ \hline ab + bb\sqrt{-a} \\ \qquad - a\sqrt{-a} + ab, \\ \hline \end{array}$$

atque factum $2ab + (bb - a)\sqrt{-a}$.

Sit

Sit $a+b\sqrt{a}$ multiplicandum per $a-b\sqrt{-a}$, erit hoc ſchema

$$\begin{array}{l} \quad a+b\sqrt{a} \\ \quad a-b\sqrt{-a} \\ \hline aa+ab\sqrt{a} \\ \quad -ab\sqrt{-a}-bb\sqrt{-aa}, \\ \hline \end{array}$$

vnde factum, $aa+ab\sqrt{a}-ab\sqrt{-a}-bb\sqrt{-aa}$; loco termini vltimi etiam ſcribi poteſt

$$-ab^2\sqrt{-1}.$$

Sit $a+\sqrt{-bb}$ multiplicandum per $a-\sqrt{-bb}$, erit ſchema iſtud

$$\begin{array}{l} \quad a+\sqrt{-bb} \\ \quad a-\sqrt{-bb} \\ \hline aa+a\sqrt{-bb} \\ \quad -a\sqrt{-bb}+bb \\ \hline \end{array}$$

vnde factum $aa+bb$. Signum autem termini vltimi recte poſitum eſſe, apparet, ſi loco $\sqrt{-bb}$ ſcribamus $1\times\sqrt{-bb}$. Si enim $+1\times\sqrt{-bb}$ multiplicandum ſit in $-1\times\sqrt{-bb}$, prodit factum $-1\times-bb=bb$.

Si vero $aa+bb$ dividendum fuerit per $a+\sqrt{-bb}$, erit ſchema tale:

$$\begin{array}{l|l|l} a+\sqrt{-bb} & aa+bb & a-\sqrt{-bb} \\ & -aa-a\sqrt{-bb} & \\ & +a\sqrt{-bb}-bb & \end{array}$$

Atque

Atque eodem modo circa reliqua huiusmodi exempla verſabimur, quæ negotium faceſſere non poſſunt principiis expoſitis inſtructo.

Scholion II.

§. 303. Si huius formulæ

$$\tfrac{1}{2}a \times (-1+\sqrt{-3})$$

cubus quæratur, cum cubus prioris factoris ſit $\tfrac{1}{8}a^3$; cubus alterius fiet hunc in modum

$$\begin{array}{lrl}
 & -1+\sqrt{-3} & \\
 & -1+\sqrt{-3} & \text{multiplica,}\\
\hline
 & +1-\sqrt{-3} & \\
 & -\sqrt{-3}-3 & \\
\hline
\text{erit quadratus} & -2-2\sqrt{-3} & \\
 & -1+\sqrt{-3} & \text{multiplica,}\\
\hline
 & +2+2\sqrt{-3} & \\
 & -2\sqrt{-3}+6 & \\
\hline
\text{\& cubus} & +8 &
\end{array}$$

qui ſi in $\tfrac{1}{8}a^3$ ducatur, prodit quæſitus $= a^3$; idemque producitur ex formula $\tfrac{1}{2}a \times (-1-\sqrt{-3})$, ſimili calculo quem ex præcedenti formare facile eſt, ſignis radicum in contraria mutatis.

§. 304. Etſi ergo vnica ſit quantitas vera ac realis a, quæ ter in ſe ducta producit a^3, ſumptisque 1 & a^3 pro terminis extremis progreſſionis geometricæ, in qua inter 1 & a^3 duo intercedant termini a & a^2, prior a vnico tantum modo dari poſſit, ſi manere debeat a^3 §. 278: ſunt tamen & aliæ formulæ impoſſibilia notantes, quæ cubice multiplicatæ eundem a^3 producunt. Sic & nulla eſt quantitas, quæ quater in ſe ducta producere poſſit a^4, præter a affirmative vel negative ſumptam; attamen $+a\sqrt{-1}$ & $-a\sqrt{-1}$ eodem modo tractæ idem a^4 reddunt. Eſt enim vtriusque quadratum $-aa$, & huius quadratum a^4. Neque dubitandum eſt idem in ſuperioribus dignitatibus locum habere, quamvis ſimiles his formulas pro iis elicere fortaſſe difficile ſit.

§. 305. Ad eiusmodi ergo expreſſiones vocabulum Radicis extendendum erit, ſi ſenſu maxime vniverſali ſumatur, vt ſcilicet notet quamvis formulam, quæ iuxta regulas traditas, atque iuxta normam indicis ordinis radicum, ad quem refertur, in ſeſe ducta, producat id, cuius radix eſſe dicitur. Eruntque radices reales, de quibus potiſſimum ſermo eſſe ſolet, ab iis, quæ impoſſibiles ſunt propterea, quod aliquam contradictionem involvunt, probe ſemper diſtinguendæ.

SECTIO VI.

DE PROBLEMATIBVS NON SIMPLICIBVS PVRIS.

DEFINITIO VIII.

§. 306.

Æquatio *quadratica* eſt, in qua x^2 comparatur vel cum quantitatibus cognitis ſolis, vel cum cognitis & facto, in quo ineſt x. Prius ſi ſit, æquatio quadratica *pura* dicitur, *affecta* autem vel *impura*, ſi ſit poſterius. Eodem ſenſu æquationes cubicæ dicuntur, in quibus x^3 comparatur vel cum quantitatibus cognitis ſolis, vel cum cognitis atque factis, in quibus inſunt x^2 vel x, *puræ* ſi prius ſit, alias *affectæ*: neque alio ſenſu æquatio appellatur biquadratica, vel hac quoque ſuperior, quinti ſcilicet vel ſexti ordinis & ita porro.

Scholion.

§. 307. De æquationibus puris coniunctim agi poteſt, reliquæ, his multo difficiliores, ſeparatim

paratim erunt conſiderandæ. Eſt autem forma generalis æquationis puræ hæc

$$x^n = A$$

quamcunque quantitatem notet A, & vtcunque compoſitam; modo in ea incogniti nihil inſit. In ea ſi ponatur $n = 2$, fit æquatio quadratica $x^2 = A$; ſi $n = 3$, cubica $x^3 = A$; ſi $n = 4$, biquadratica $x^4 = A$, & hinc quinti, ſexti, ſeptimi ordinis, ſi n notare ponatur numerum 5, 6, 7 & ita porro.

§. 308. Sunt autem æquationes puræ illæ quoque, in quibus $(x + a)^n = A$, vel $(x - a)^n = A$, vel $(a - x)^n = A$, vtpote quæ, ſi $x + a$ vel $x - a$ aut $a - x$ dicatur $= z$, eandem formam induunt $z^n = a$. Æquatio ergo quadratica $x^2 + 2ax + a^2 = A$ pura erit, & cubica hæc $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = A$, & ſic aliæ.

§. 309. In omni æquatione pura $x^n = A$, erit $x = \sqrt[n]{A}$. Quare ſi n numerum imparem notaverit, x ſemper aliqua quantitas realis erit, exhibenda vel per numerum vel per lineam, ſuperficiem, vel quid huiusmodi, ſive affirmativa fuerit quantitas A, ſive negativa. Erit autem & x affirmativa, ſi A affirmativa fuerit; negativa autem, ſi A fuerit negativa. Sed ſi n numerum parem notaverit, x quantitatem realem non aliter notabit, quam ſi A affirmativa

tiva fuerit; eoque caſu duplex erit eius x valor, affirmativus & negativus, ſcilicet $x = + \sqrt[n]{A}$, & $x = - \sqrt[n]{A}$. Abſolute autem ſpectatus valor litteræ x realis, in omni æquatione pura vnicus erit. §. 275. *ſeq.*

§. 310. Exhibebitur autem quantitas iſta x, per numerum, plane verum vel proxime, ſi ex A radix extrahatur eius ordinis, quem indicat n, quæ quidem & poſitive & negative ſumetur, ſi n par fuerit. Vtraque enim harum problemati ſatisfaciet: niſi in eo fuerint conditiones quædam, calculum non ingreſſæ, quæ magis id ad radicem affirmativam reſtringant, quam ad negativam, vel vice verſa.

§. 311. Poterit etiam valor incognitæ x ad quamvis æquationem puram prompte reperiri, & ſatis accurate per logarithmos. Si enim l, numeri vel litteræ numerum deſignantis, cui præfixum eſt, logarithmum indicet; poſito $x^n = A$, erit $n\,lx = lA$, & hinc $lx = \frac{1}{n} lA$. *Arith.* §. 231. Quare ſi logarithmus quantitatis datæ A dividatur per n, quotus erit is logarithmus, cui in tabulis numerus x reſpondet.

§. 312. Geometrice autem x exhibebitur per lineam rectam, ponendo inter 1 & rectam,

quam

quam denotat A, tot medias continuo proportionales, quot vnitates inſunt in $n - 1$, vt ab vnitate ad ipſum A ſint termini numero n, quorum is, qui vnitati proximus eſt, erit x. Huius rei methodos vniverſales docere cum proprie ſit geometræ; dabuntur tamen, quatenus in poteſtate ſunt, in ſequentibus.

PROBLEMA XXXIII.

§. 313. *Datur ſumma duorum numerorum, & ex iis factus: inueniendi ſunt numeri.*

PRÆPARATIO.

§. 314. Quia ſumma numerorum datur, commode eorundem quæretur differentia, quia ea re quæſtio ad vnicum incognitum reſtringitur. Summa autem & differentia numerorum data, ipſi numeri latere non poſſunt. §. 68.

SOLVTIO.

§. 315. Sit ſumma numerorum $= a$, differentia $= x$; erit prior numerus $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$, poſterior $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$; ſique horum factum dicatur b, numeris in ſe ductis prodibit

$$\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}xx = b$$

$$\text{hinc } aa - xx = 4b$$

$$-xx = 4b - aa$$

$$\text{vel } xx = aa - 4b$$

$$x = \mp\sqrt{(aa - 4b)}.$$

Scholion.

§. 316. Sit $a=14$, $b=48$, erit $aa=196$ & $4b=192$, ergo $aa-4b=4$, hinc $x=\mp 2$. Vtraque harum differentiarum quæſito æque ſatisfacit. Si enim ſumatur $x=2$, fiunt numeri $7+1$ & $7-1$, id eſt 8 & 6, quorum vtique ſumma eſt 14, factum autem 48. Si vero ſumatur $x=-2$, numeri prodeunt $7-1$; $7+1$, iidem, ſed inverſo ordine.

§. 317. Si $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x$ dicatur numerus maior, & $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x$ minor, vtique vna tantum radix, ea ſcilicet quam continet $x=2$, adhiberi poteſt, quia ſi ponatur $x=-2$, ex $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x$ non numerorum quæſitorum maior prodit, ſed minor. Verum hæc conditio, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x$ numerum maiorem denotare, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x$ minorem, non ingreditur in calculum.

§. 318. Sit $a=4$, $b=5$, erit $aa=16$ & $4b=20$, hinc $aa-4b=-4$, & $x=\mp\sqrt{-4}$. Ergo numeri, qui his conditionibus ſatisfaciant, dari nulli poſſunt.

PROBLEMA XXXIIII.

§. 319. *Sors* a, *ſpatio vnius anni, creſcendo vel decreſcendo mutatur in* y, *hæc* y *ſpatio alterius anni creſcit vel decreſcit in eadem ratione, eique, quæ ita prodit, ſimilia contingunt continuo. Poſt annos numero* n, *ſors ea crevit* *vel decrevit in* b. *Dicendum eſt, quantum fuerit* y?

SOLVTIO.

§. 320. Eſt a ad y vt y ad id, in quod a mutatum eſt duobus annis, quod ergo erit $\frac{yy}{a}$. Deinde a ad y vt $\frac{yy}{a}$ ad id, in quod a crevit vel decrevit tribus annis, quod ergo per $\frac{y^3}{a^2}$ exprimetur. Eodem modo quantitas, in quam a ita creuit quatuor annis, reperitur $\frac{y^4}{a^3}$, atque colligitur, ad annorum numerum n quantitatem illam per $\frac{y^n}{a^{n-1}}$ exprimendam eſſe. Eſt ergo

$$\frac{y^n}{a^{n-1}} = b$$

hinc $y^n = a^{n-1}b$

& $y = \sqrt[n]{a^{n-1}b}$.

Scholion.

§. 321. Sit $a = 6$, $b = 48$, $n = 3$, erit $a^{n-1} = a^2 = 36$, & $a^{n-1}b = 1728$, cuius radix cubica 12 eſt quæſitum y, & patet, ſi numerus 6 ter continuo duplicetur, prodire 48.

§. 322.

§. 322. Eodem modo plures aliæ quæſtiones ſolventur, vt hæc: *civitas decem mille hominum, tempore quindecim annorum, crevit in viginti millia: quis fuit habitatorum numerus ſub finem anni primi, ſi incrementum eiusdem temporis proportionale ſemper fuiſſe ponatur multitudini?* Res facile expedietur per logarithmos.

Eſt autem $\mathrm{l}\,a^{n-1} = (n - 1)\mathrm{l}a$, & hinc $\mathrm{l}.a^{n-1}b = (n - 1)\mathrm{l}a + \mathrm{l}b$, qui ſi dividatur per n prodit logarithmus radicis quæſitæ, qui idem eſt $\mathrm{l}y$. Eſt autem in hoc exemplo $a = 10000$, $n = 15$, $b = 20000$, ſed $\mathrm{l}a = 4$, hinc $(n - 1)\mathrm{l}a = 56$. Porro $\mathrm{l}b = 4{,}30103$, hinc $\mathrm{l}.a^{n-1}b = 60{,}30103$, qui logarithmus, ſi dividatur per n id eſt per 15, fit 4,0200687. Atque hic eſt $\mathrm{l}y$ quæſitus, cui reſpondens numerus 10472 indicat, ad vniverſum hominum numerum nonniſi 472 acceſſiſſe primo anno, quæ pars minor eſt quam $\frac{1}{21}$ totius.

PROBLEMA XXXV.

§. 323. *Invenire quatuor numeros, quorum primus ad ſecundum ſit vt ſecundus ad tertium, & vt tertius ad quartum; ſi detur ſumma mediorum* a, *& ſumma extremorum* b.

SOLVTIO.

§. 324. Sit differentia numerorum mediorum, ſecundi ſcilicet & tertii x, & pona-

tur

tur ſecundus $= \frac{a-x}{2}$, erit tertius $\frac{a+x}{2}$, hinc ex proportione,

$$\frac{a-x}{2} : \frac{a+x}{2} = \frac{a+x}{2} \text{ ad quartum,}$$

fit quartus $\frac{(a+x)^2}{2(a-x)}$, & eodem modo, regrediendo obtinetur primus $= \frac{(a-x)^2}{2(a+x)}$.

Eſt ergo $\frac{(a+x)^2}{2(a-x)} + \frac{(a-x)^2}{2(a+x)} = b$,

ſive $\frac{(a+x)^2}{(a-x)} + \frac{(a-x)^2}{(a+x)} = 2b$,

& ſublatis denominatoribus:

$$(a+x)^3 + (a-x)^3 = 2b(a-x)(a+x)$$

vel dignitatibus atque facto explicite poſitis

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \\ + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = 2ba^2 - 2bx^2 \end{array}$$

id eſt,

$$2a^3 + 6ax^2 = 2ba^2 - 2bx^2$$

vel $a^3 + 3ax^2 = ba^2 - bx^2$.

Hinc $3ax^2 + bx^2 = ba^2 - a^3$

& $x^2 = \frac{ba^2 - a^3}{b + 3a}$

ergo $x = \mp \sqrt{\frac{ba^2 - a^3}{b + 3a}} = \mp a\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}$.

Facile

Facile apparet ſignum — loco + hic vſurpatum, præter inverſionem ordinis, efficere nihil poſſe. Sumpta ergo radice poſitiva fit terminus ſecundus, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}$

tertius, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}$

quartus autem terminus fit, dimidio quadrati ex $a + a\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}$ diviſo per $a - a\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}$.

Quadratus eſt, $a^2 + 2a^2\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}} + \frac{a^2b - a^3}{b+3a}$, qui, rationalibus ad eandem denominationem reductis, fit $\frac{2a^2b + 2a^3}{b+3a} + 2a^2\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}$.

Quæ autem ſub ſigno radicis eſt fractio, vtroque termino per denominatorem multiplicato, evadit $\frac{b^2+2ab-3a^2}{(b+3a)^2}$, vnde ſi ex denominatore radix extrahatur, idem quadratus ſic ſcribetur $\frac{2a^2b+2a^3+2a^2\sqrt{(b^2+2ab-3a^2)}}{b+3a}$.

Eodem modo $a - a\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}}$

fit $\frac{ab+3aa-a\sqrt{(b^2+2ab-3a^2)}}{b+3a}$

vnde,

vnde, dimidio quadrati per hunc terminum diviſo, prodit terminus quæſitus

$$\frac{a^2b + a^3 + a^2\sqrt{(b^2 + 2ab - 3a^2)}}{ab + 3aa - a\sqrt{(b^2 + 2ab - 3a^2)}}$$

vel

$$\frac{ab + a^2 + a\sqrt{(bb + 2ab - 3a^2)}}{b + 3a - \sqrt{(bb + 2ab - 3a^2)}}.$$

Ab hoc terminum primum ſolis ſignis differre, quæ præcedunt quanta irrationalia, facile perſpicitur. Erit ergo primus iſte terminus

$$\frac{ab + a^2 - a\sqrt{(bb + 2ab - 3a^2)}}{b + 3a + \sqrt{(bb + 2ab - 3a^2)}};$$

patebit autem calculo poſito, ſummam horum terminorum extremorum eſſe *b*.

Scholion.

§. 325. Hoc modo huius generis problemata ſolvuntur, quæſtione plerumque radices involvente arithmetice etiam irrationales; quæ, cum per numeros exacte exhiberi non poſſint, *Ar.* §. 138, accuratiores tamen ſæpe deſiderantur, quam poſſunt reperiri per logarithmos. Sed & ea extrahendi via, quæ ex dato §. 266 deduci poterat, impedita nimium eſt. Commodæ autem radicum cuiusvis ordinis formulæ, vero admodum propinquæ, ex Theoremate Binomiali §. 255. deducentur, vel ipſum potius theorema illud radicibus reperiundis accommodabitur.

PROBLEMA XXXVI.

§. 326. *Binomii* $1+z$ *ad dignitatem exponentis* n *evecti radicem ordinis* m *exhibere per ſeriem, ad inſtar formulæ dignitatum.*

PRÆPARATIO.

§. 327. Quemcunque numerum denotet z, poterit ſeries

$$1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\varepsilon z^5+\&c.$$

quemcunque numerum alium notare, ſiquidem coefficientes α, β, γ, δ convenienter ſumantur, affirmativi vel negativi, integri aut fracti. Nam & cum vulgo numerando omnes numeros ex progeſſione 1; 10; 100; 1000 &c. formamus, dicendo quoties quilibet terminorum huius progreſſionis ſumendus ſit; patetque quamlibet progreſſionem geometricam, quæ ſubeſt generali 1, z, z^2, z^3, z^4, eidem rei æque vtilem eſſe, maxime ſi admittantur & valores coefficientium α, β, γ &c. fracti. Cum ergo quæratur $\sqrt[m]{(1+z)^n}$, poterit quoque radix hæc, ad z vtcunque ſumendum, poni $=1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\&c.$

SOLVTIO.

§. 328. Sit ergo $\sqrt[m]{(1+z)^n}=1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\varepsilon z^5+$ &c. ponaturque eadem radix

radix $= 1 + Z$, ſumpto $Z = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \&c.$ Erit

$$\sqrt[m]{(1+z)^n} = 1 + Z,$$

& vtroque ad dignitatem exponentis *m* evecto,

$$(1+z)^n = (1+Z)^m.$$

Eſt autem ex formula binomiali, §. 255.

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n.z}{1} + \frac{n.n-1.z^2}{1.\ 2} + \frac{n.n-1.n-2.z^3}{1.\ 2.\ 3} + \&c.$$

ſed $(1 + Z)^m$ ex partibus 1, αz, βz^2 ac reliquis ſuperius compoſita eſt §. 261.

Et, ſi in vtraque harum expreſſionum *z* eundem numerum notare ponatur, poterunt quoque coefficientes earundem huius *z* dignitatum iidem ſumi, quo ipſæ ſeries plane fiunt geminæ. Quare litteris B, C, D, E, & reliquis §. 261. ex *m* explicatis, per formulas §. 247 & 262. traditas, erit

$$m\alpha = n, \text{ hinc } \alpha = \frac{n}{m}.$$

Poſito ergo, quo omnia magis vniformia evadant, $t = \alpha = \frac{n}{m}$, & hinc $tm = n$ ex coefficientibus termini z^2,

fit $B\beta + C\alpha^2 = \frac{n^2 - n}{2}$,

vel $B\beta = \frac{n^2 - n}{2} - C\alpha^2$,

vel

vel $m\beta = \frac{t^2m^2 - tm}{2} - \frac{t^2m^2 - t^2m}{2}$,

& hinc $\beta = \frac{t^2 - t}{2} = \frac{t.t - 1}{1.\ 2}$.

Coefficientes autem termini z^3 dant,

$$B\gamma + 2C\alpha\beta + D\alpha^3 = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{1.\ 2.\ 3},$$ vel

$$B\gamma = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{1.\ 2.\ 3} - 2C\alpha\beta - D\alpha^3,$$ id eſt,

$$m\gamma = \frac{t^3m^3 - 3t^2m^2 + 2tm}{1.\ 2.\ 3} - \frac{(m^2 - m)(t^3 - t^2)}{2} - \frac{t^3m^3 - 3t^3m^2 + 2t^3m}{1.\ 2.\ 3}$$

ſive, explicate multiplicando, ac omnia reducendo ad eandem denominationem,

$$m\gamma = (t^3m^3 - 3t^2m^2 + 2tm - 3t^3m^2 + 3t^3m + 3t^2m^2 - 3t^2m - t^3m^3 + 3t^3m^2 - 2t^3m):(6$$

hinc $\gamma = \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6} = \frac{t.t - 1.t - 2}{1.\ 2.\ 3}$.

Eodem modo ex coefficientibus termini z^4 fit

$$B\delta = \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - 2C\alpha\gamma - C\beta\beta - 3D\alpha^2\beta - E\alpha^4,$$

id

id eſt, $$m\delta = \frac{t^4m^4 - 6t^3m^3 + 11t^2m^2 - 6tm}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$
$$- \frac{(m^2 - m)(t^4 - 3t^3 + 2t^2)}{1.\ 2.\ 3}$$
$$- \frac{(m^2 - m)(t^4 - 2t^3 + t^2)}{2.\ 4}$$
$$- \frac{(m^3 - 3m^2 + 2m)(t^4 - t^3)}{4}$$
$$- \frac{t^4m^4 - 6t^4m^3 + 11t^4m^2 - 6t^4m}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

vel explicate & ſub eadem denominatione,

$$\begin{aligned} m\delta = (&t^4m^4 - 6t^3m^3 + 11t^2m^2 - 6tm \\ &- 4t^4m^2 + 12t^3m^2 - 8t^2m^2 + 4t^4m - 12t^3m \\ &\qquad + 8t^2m \\ &- 3t^4m^2 + 6t^3m^2 - 3t^2m^2 + 3t^4m - 6t^3m \\ &\qquad + 3t^2m \\ &- 6t^4m^3 + 18t^4m^2 - 12t^4m + 6t^3m^3 - 18t^3m^2 \\ &\qquad + 12t^3m \\ &- t^4m^4 + 6t^4m^3 - 11t^4m^2 + 6t^4m) : (24 \end{aligned}$$

vnde fit $$\delta = \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24}$$
$$= \frac{t.\,t-1.\,t-2.\,t-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

& ita porro.

Valoribus ergo litterarum α, β, γ, qui ita reperti ſunt, in harum locum ſubſtitutis in in radice aſſumpta $1 + \alpha z + \beta z^2 + \&c.$ ea radix ita determinatur:

$$1 + \frac{t.z}{1} + \frac{t.t-1.z^2}{1.\ 2} + \frac{t.t-1.t-2.z^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{t.t-1.t-2.t-3.z^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \&c.$$

Corollarium I.

§. 329. Si radix quæſita $\sqrt[m]{(1+z)^n}$ exprimatur hoc modo $(1+z)^{\frac{n}{m}}$, conſidereturque tanquam dignitas radicis $1+z$, cuius exponens fractus eſt; quia $t = \frac{n}{m}$, patet ex ſerie reperta, dignitatem iſtam indicis fracti per eandem regulam reperiri, qua reperitur dignitas ordinis t, ſi hæc littera numerum integrum notet. Et poteſt loco t in ſerie reperta vbique ſcribi $\frac{n}{m}$, ſi id commodum videatur.

Corollarium II.

§. 330. Si vero dignitas eiusdem ordinis t, binomii $a+b$, quæratur, cuius primus terminus non eſt vnitas, ponetur nunc quoque $z = \frac{b}{a}$, ſubſtituetur que hæc fractio loco z in formula, quæ deinde multiplicabitur per a^t.

Quod ita producitur, erit $a^t\left(1 + \frac{b}{a}\right)^t = a^t\left(\frac{a+b}{a}\right)^t = (a+b)^t$. Fit autem per hæc

$$(a+b)^t = a^t + \frac{t.}{1}a^{t-1}b + \frac{t.t-1.}{1.\ 2}a^{t-2}b^2 + \&c.$$

quæ ſeries ab ea, qua binomium $a + b$ ad dignitatem ordinis t evehitur, ſi hæc littera numerum integrum notet, affirmativum vel negativum, non magis diverſa eſt. Poteſt ergo formula primum data, §. 255. ad quam index dignitatis fuit n, pro vniverſali vſurpari, quemcunque numerum denotet n, integrum, fractum, affirmativum, negativum.

Corollarium III.

§. 331. Eſt formula illa vniverſalis $(a+b)^n = Aa^n + Ba^{n-1}b + Ca^{n-2}b^2 + Da^{n-3}b^3 + \&c.$ notantibus A, B, C numeros §. 247, ſæpius iam vſurpatos. Ponatur $b = -\frac{av}{a+v}$, erit

$a + b = a - \frac{av}{a+v} = \frac{aa}{a+v}$, atque eadem formula dabit huius fractionis dignitatem, cuius index eſt n; id eſt, erit

$$\frac{a^{2n}}{(a+v)^n} = Aa^n + Ba^{n-1}b + Ca^{n-2}b^2 + \&c.$$

vel

vel $a^{2n}(a+v)^{-n} = Aa^{n} + Ba^{n-1}b + Ca^{n-2}b^{2} + \&c.$

In hac vero formula, ſi loco b ſcribamus $\frac{-av}{a+v}$, prodit

$$a^{2n}(a+v)^{-n} = Aa^{n} - \frac{Ba^{n}v}{a+v} + \frac{Ca^{n}v^{2}}{(a+v)^{2}} - \frac{Da^{n}v^{3}}{(a+v)^{3}} + \frac{Ea^{n}v^{4}}{(a+v)^{4}} - \&c.,$$

vnde, ſi omnia dividantur per a^{2n}, porro fit

$$(a+v)^{-n} = Aa^{-n} - \frac{Ba^{-n}v}{(a+v)^{1}} + \frac{Ca^{-n}v^{2}}{(a+v)^{2}} - \frac{Da^{-n}v^{3}}{(a+v)^{3}} + \frac{Ea^{-n}v^{4}}{(a+v)^{4}} - \&c.$$

quæ formula eidem ſcopo ſervit, evehendi ſcilicet binomii $a+v$ ad dignitatem quamcunque, cuius index eſt n, integer, fractus, affirmativus vel negativus.

Corollarium IIII.

§. 332. In hac formula littera n notare ponitur numerum poſitivum, & ita explicanda eſt, vbi formantur numeri B, C, D. Si negativus ponatur huius litteræ valor, mutanda primum erunt ſigna eius in formula producta, quo fiat,

$$(a+v)^{n} = Aa^{n} - \frac{Ba^{n}v}{a+v} + \frac{Ca^{n}v^{2}}{(a+v)^{2}} - \frac{Da^{n}v^{3}}{(a+v^{3})} + \&c.$$

deinde &, ad formandos valores coefficientium, A, B, C eadem n negativa erit ſumenda: quo fiet,

$$A = 1$$

$$B = -n$$

$$C = -\frac{n.-n-1}{1.\ 2} = \frac{n.n+1}{1.\ 2}$$

$$D = -\frac{n.-n-1.-n-2}{1.\ 2.\ 3} = -\frac{n.n+1.n+2}{1.\ 2.\ 3}$$

$$E = -\frac{n.-n-1.-n-2.-n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$= \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

& ita porro. Quibus in ſuos locos transpoſitis, fit

$$(a+v)^n = a^n$$

$$+ \frac{n}{1}.\frac{a^n v}{a+v}$$

$$+ \frac{n.n+1}{1.\ 2}.\frac{a^n v^2}{(a+v)^2}$$

$$+ \frac{n.n+1.n+2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{a^n v^3}{(a+v)^3}$$

$$+ \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\frac{a^n v^4}{(a+v)^4}$$

$$+ \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.\frac{a^n v^5}{(a+v)^5} \ \&c.$$

cum

cum prior illa formula, eodem ordine ſcripta, ſic appareat:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = {} & a^n \\
& + \frac{n}{1}.a^{n-1}b \\
& + \frac{n.n-1}{1.\ 2}.a^{n-2}b^2 \\
& + \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}.a^{n-3}b^3 \\
& + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.a^{n-4}b^4 \\
& + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.a^{n-5}b^5 \text{ \&c.}
\end{aligned}
$$

vtriusque formulæ idem ſcopus eſt, quem vidimus.

Scholion.

§. 333. Diſtinguetur autem facile formularum vna ab altera, ſi prior comparata eſſe dicatur ad binomium $a+v$, altera ad $a+b$, quamvis binomiæ iſta ſolis differant litteris, per quas exhibentur. Cæterum ſi idem eſt formularum ſcopus, vt ſcilicet quotcunque ex prioribus terminis dignitatis $(a+b)^n$ vel $(a+v)^n$ exhibeantur, ad quemcunque indicem n, non tamen is ſcopus æque commode attingitur per quamlibet formulam. Si n ſit numerus integer poſitivus, vt 4, formula pro $(a+b)$ ſemper aliquando finitur, evaneſcentibus terminis omnibus datum aliquem ſequentibus, quemadmodum in hoc exemplo omnes termini evaneſcunt, quos $n - 4$ tanquam factor ingreditur, quia $n - 4 = 0$. Si vero n numerum integrum negativum denotet, vt -4, idem in formula pro $(a + v)$ contingit omnibus terminis, quos tanquam factor ingreditur $n + 4$, quia $-4 + 4 = 0$. Termini autem, qui ita non evaneſcunt, ſi omnes ſumantur, non priores dignitatis quæſitæ terminos ſolos exhibebunt, ſed totam dignitatem, ex quacunque formula computentur.

§. 334. Si vero priores aliqui termini ſoli ſumantur, ii coniuncti numerum dabunt, dignitati vel radici quæſitæ tanto magis propinquum, quo minor eſt b vel v reſpectu a; quod facile perſpiciet, qui terminos conſideraverit. Atque propterea quorumcunque numerorum radices veris proximæ per has formulas ſatis expedite reperiuntur, atque aliquanto expeditius per formulam pro $a + v$, quam per alteram.

PROBLEMA XXXVII.

§. 335. *Cuiuscunque numeri dati radicem cuiuscunque ordinis per formulam binomialem exhibere, errore quantumvis parvo.*

SOLVTIO.

§. 336. Solve numerum propoſitum A, cuius radix ordinis *n* quæritur, in duas partes, quarum prior *a* ſit dignitas ordinis *n* alicuius numeri, quæ proxime accedat ad A, ſive minor ſit, quam A, ſive maior, altera autem pars *b* vel *v* ſit = A — *a*, quæ ergo negativa erit, ſi *a* maior fuerit quam A. Valores litterarum harum ſubſtitue in alterutra formularum modo poſitarum §. 332. pergendo in conficiendis terminis, donec vltimus eius parvitatis prodeat, vt tuto negligi poſſit, & absque errore, qui alicuius momenti ſit. Termini, qui hunc antecedunt, collecti dabunt quæſitum.

Corollarium.

§. 337. Pro radice quadratica eſt $n = \frac{1}{2}$, pro cubica, $n = \frac{1}{3}$, pro radice quarti ordinis, $n = \frac{1}{4}$, pro radice ordinis quinti, $n = \frac{1}{5}$ & ita porro. His ergo numeris in formulam pro $a + v$ illatis, fit

$$\sqrt{(a+v)} = \sqrt{a} \times \left(1 + \frac{1.v}{2.(a+v)} + \frac{1.\ 3.\ v^2}{2.4.(a+v)^2} + \frac{1.\ 3.\ 5.\ v^3}{2.4.6.(a+v)^3} + \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ v^4}{2.4.6.8.(a+v)^4} + \text{\&c.}\right)$$

$$\sqrt[3]{(a+v)}=\sqrt[3]{a}\times(1+\frac{1.\,v}{3.(a+v)}+\frac{1.\,4.\,v^2}{3.6(a+v)^2}+\frac{1.\,4.\,7.\,v^3}{3.6.9.(a+v)^3}+\frac{1.\,4.\,7.\,10.\,v^4}{3.6.9.12(a+v)^4}+\&c.)$$

$$\sqrt[4]{(a+v)}=\sqrt[4]{a}\times(1+\frac{1.\,v}{4.(a+v)}+\frac{1.\,5.\,v^2}{4.8.(a+v)^2}+\frac{1.\,5.\,9.\,v^3}{4.8.12.(a+v)^3}+\frac{1.\,5.\,9.\,13.\,v^4}{4.8.12.16(a+v)^4}+\&c.)$$

$$\sqrt[5]{(a+v)}=\sqrt[5]{a}\times(1+\frac{1.\,v}{5.(a+v)}+\frac{1.\,6.\,v^2}{5.10.(a+v)^2}+\frac{1.\,6.\,11.\,v^3}{5.10.15.(a+v)^3}+\frac{1.\,6.\,11.\,16.\,v^4}{5.10.15.20(a+v)^4}+\&c.)$$

quæ ſeries, obſervata progreſſionis lege, facile continuantur, dant autem radices ſatis expedite.

Exemplum.

§. 338. Si quæratur radix quadratica numeri 50, ſolvetur hic numerus in quadratum 49 = a, & 1 = v. His ergo ſubſtitutis, erit

$$\sqrt{50}=7(1+\frac{1}{100}+\frac{1.\,3}{100.\,200}+\frac{1.\,3.\,5}{100.\,200.\,300}+\&c.)$$

Cum-

Cumque hi termini per fractiones decimales ita exhibeantur, vt ſit:

$$\begin{array}{lr}
7 = \ldots\ldots & 7{,}00000000000 \\
\frac{7}{100} = \ldots\ldots & 7000000000 \\
\frac{7}{100}.\frac{3}{200} = \ldots\ldots & 105000000 \\
\frac{7}{100}.\frac{3}{200}.\frac{5}{300} = \ldots & 1750000 \\
\frac{7}{100}.\frac{3}{200}.\frac{5}{300}.\frac{7}{400} = \ldots\ldots & 30625 \\
\frac{7}{100}.\frac{3}{200}.\frac{5}{300}.\frac{7}{400}.\frac{9}{500} = \ldots & \underline{551} \\
 & 7{,}07106781176
\end{array}$$

Hoc modo pergendo reperietur radix quæſita proxime $= 7{,}07106781186 53$, cuius numeri omnes notæ certæ ſunt, præter vltimam, quæ dubia eſt.

Scholion.

§. 339. Si numerus datus non dederit v ſatis parvum, ſubtracta a, dignitate alicuius numeri integri; commode pro a ſumetur aliqua dignitas numeri fracti. Vt ſi quæratur radix quadratica numeri 2, quia a in numeris integris maior ſumi non poteſt quam 1, vnde ſit v itidem $= 1 = a$; ſumetur $a = 1{,}96$, qui numerus quadratus eſt radicis 1,4, quo facto erit $v = 0,04$, hi enim numeri additi dant 2,00, id eſt 2: atque $\frac{v}{a+v} = \frac{0,04}{2} = 0,02$. Hinc ex formula

$$\sqrt{2} = 1,4\left(1 + \frac{1.(0,02)}{2} + \frac{1.\ 3.\ (0,02)^2}{2.\ 4} + \frac{1.\ 3.\ 5\ (0,02)^3}{2.\ 4.\ 6} + \&c.\right)$$

Sed & ex reperta $\sqrt{50}$ hæc elici poteſt. Eſt enim $\sqrt{50} = \sqrt{25.2} = 5\sqrt{2}$ & hinc $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50}$. Quare ſi radix reperta per 5 dividatur, aut ſi eius duplum dividatur per 10, prodit $\sqrt{2} = 1,4142135623730$.

SECTIO VII.

DE PROBLEMATIBVS QVADRATICIS NON PVRIS.

PROBLEMA XXXVIII.

§. 340.

Inter duas quantitates R & Q ſunt duæ aliæ proportione mediæ X & Y, quarum ſumma algebraica datur. Reperienda eſt mediarum prior, in omni caſu.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

§. 341. Proportio $R : X = Y : Q$ hanc æquationem exhibet $R.Q = X.Y$, in qua $R.Q$ vel quantitas affirmativa eſt, vel negativa. Sed ſive affirmativa fuerit, ſive negativa, alteruter factorum affirmativus poterit ſumi. Dicatur factor ille $= 1$, alter factor, ſi affirmativus fuerit, $+q$, ſin negativus $-q$. Summa autem quantitatum X & Y, ſi affirmativa fuerit, ſit $+p$, ſin negativa, $-p$. Terminus quæſitus ſit x. Erunt caſus problematis diverſi hi quatuor:

$$1 : x = p - x : q$$
$$1 : x = -p - x : q$$
$$1 : x = p - x : -q$$
$$1 : x = -p - x : -q.$$

§. 342. Quælibet harum proportionum & ita poteſt ſcribi, vt terminus tertius fiat ſecundus, ſecundus vero tertius, quemadmodum earum proportionum expreſſio generalis, quæ initio poſita eſt, permutatis terminis mediis hæc fit $R : Y = X : Q$, nullo modo mutata terminorum mediorum ſumma. Quare cum nihil ſit, quod quæſtionem ad vnum potius terminorum X & Y quam ad alterum reſtringat, quicunque eorum quæratur, ſimul prodire debet alter.

In caſu ergo primo $1 : x = p - x : q$, ſi quæratur x, ſimul prodire debebit $p - x$. Si x affirmativa ſit, ex proportione ſequitur, & $p - x$ affirmativam fore & hinc $p > x$. Sed ſi x ponatur negativa, fit terminus tertius $p + x$, affirmativus, quod proportioni repugnat. §. 90. Neceſſe ergo eſt hoc caſu vtramque quantitatum quæſitarum affirmativam eſſe.

In caſu altero $1 : x = -p - x : q$ ſi x affirmativa ponatur, proportio deſtruitur, quia tertia quantitas $-p - x$, quæ ſimul prodire debet, negativa fit. Id non contingit, ſi x ponatur negativa, quia hoc facto tertia quantitas fit $-p + x$, quæ vtique negativa eſſe poteſt, quemadmodum id proportio requirit, ſi ſcilicet $p > x$. Hoc ergo caſu vtraque quantitatum quæſitarum negativa erit.

In caſu tertio $1 : x = p - x : -q$, ſi x affirmativa ſumatur, poteſt $p - x$ negativa eſſe, quod proportio requirit. Neque tamen repugnat x negativam ſumi, quia hoc caſu terminus tertius fit $p + x$ affirmativus. Hoc ergo caſu terminorum quæſitorum alteruter affirmativus erit, alter negativus.

In caſu quarto $1 : x = -p - x : -q$, ſi x affirmativa ſit, terminus tertius negativus

eſt;

eſt; ſi vero negativus ponatur terminus x, terminus tertius ſit $-p+x$, qui affirmativus erit, ſi fuerit $x > p$. Horum cum neutrum proportioni repugnet, hoc etiam caſu terminorum quæſitorum alter affirmativus erit, alter negativus.

§. 343. Ex proportionibus ergo iſtis cum fiant æquationes:

$$\begin{array}{rcl} px - xx = q & \text{vel} & xx - px = -q \\ -px - xx = q & \text{vel} & xx + px = -q \\ px - xx = -q & \text{vel} & xx - px = q \\ -px - xx = -q & \text{vel} & xx + px = q. \end{array}$$

in quavis duplex erit valor quantitatis x, ſed vterque affirmativus in prima, vterque negativus in ſecunda, in tertia autem & quarta alteruter affirmativus, alter negativus. Reperientur autem valores iſti ſequenti modo.

SOLVTIO.

§. 344. Sit æquatio $xx - px = -q$, addatur cuilibet eius membro quadratum dimidii coefficientis litteræ x, quod eſt $\frac{1}{4}pp$, fit

$$xx - px + \tfrac{1}{4}pp = -q + \tfrac{1}{4}pp$$

æquatio quadratica pura, vtpote in qua primum membrum quadratum eſt radicis $x - \frac{1}{2}p$, vel eiusdem negative ſumptæ $-x + \frac{1}{2}p$. §. 276.

Vnde fit $x - \frac{1}{2}p = \mp\sqrt{(-q + \frac{1}{4}pp)}$ hinc autem

$$x = \tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(-q + \tfrac{1}{4}pp)}.$$

Eodem modo pro æquatione ſecunda reperitur

$$x = -\tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(-q + \tfrac{1}{4}pp)}.$$

Pro tertia:

$$x = \tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}pp)}$$

& pro quarta:

$$x = -\tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}pp)}.$$

Scholion.

§. 345. Sit in primo caſu $q = 35$, & $p = 12$; erit $x = 6 \mp \sqrt{(-35 + 36)} = 6 \mp 1$, ſunt ergo numeri quæſiti 5 & 7, & patet eſſe, $1 : 5 = 7 : 35$.

Pro altero caſu ſi eadem ſumantur, fit $x = -6 \mp 1 = -5$ & -7, eſtque iterum $1 : -5 = -7 : 35$.

Pro caſu tertio ſit $q = -35$, & $p = 2$, erit $x = 1 \mp \sqrt{(35 + 1)} = 1 \mp 6$, $= -5$ & $+7$, pateτque eſſe $1 : -5 = 7 : -35$.

Tandem pro caſu quarto iisdem ſumptis fit $x = -1 \mp 6 = -7$ & 5, eſtque iterum $1 : 5 = -7 : -35$.

§. 346. Reducentur autem ad aliquam formarum propoſitarum, vel generatim ad hanc

$$xx + Px = Q$$

omnes

omnes æquationes quadraticæ affectæ P, per easdem regulas, §. 139. per quas reducuntur ſimplices, eo vno addito, poſtquam termini æquationis ita diſpoſiti ſunt, vt illi præcedant, in quibus eſt xx, hos ſequantur in quibus eſt x, atque hæc prius æquationis membrum conficiant, cognitis omnibus in alterum reiectis; dividendos eſſe omnes æquationis terminos, per coefficientem quadrati xx, ſive ſimplex hic fuerit, ſive complicatus.

§. 347. Æquatio iſta $axx + 2abx + 2bcc = bcx - cxx + a^3$, hoc modo reducetur:

$$axx + cxx + 2abx - bcx = a^3 - 2bcc$$

$$(a+c)xx + (2ab - bc)x = a^3 - 2bcc$$

$$xx + \frac{2ab - bc}{a+c}x = \frac{a^3 - 2bcc}{a+c}$$

Si ergo ponatur $P = \frac{2ab - bc}{a + c}$, & $Q = \frac{a^3 - 2bcc}{a + c}$, vtique æquatio hæc cum vniverſali eadem erit. Æquationes quadraticæ puræ ab impuris non alia re differunt, quam quod in iis ſit $P = 0$.

§. 348. Per methodum ergo expoſitam omnes æquationes huius generis ſoluentur, vel aliquanto facilius, ſi ponatur incognitum x ad vnam æquationis partem, alterum autem eius mem-

membrum componatur ex dimidio coefficientis P, cum ſigno contrario illi, quo in æquatione ineſt, eique cum vtroque ſigno ſubiungatur radix quanti per additionem compoſiti ex Q, quemadmodum in æquatione ineſt, & ex quadrato dimidii P, hoc modo

$$x = -\tfrac{1}{2}P \mp \surd(Q + \tfrac{1}{4}PP).$$

Conferenti omnes caſus ſigillatim expoſitos, patebit per hanc regulam in omnibus valores incogniti detegi.

§. 349. Dicuntur autem & apud æquationem impuram valores litteræ x *Radices* æquationis, quarum ergo in quavis æquatione quadratica generatim duæ ſunt, non plures: perinde vt in æquatione quadratica pura. Sed æquationis quadraticæ puræ radices, ſi abſolute ſpectentur, inter ſe æquales ſunt §. 309; hæ inæquales. Porro radicum iſtarum vel vtraque rationalis eſt, ſi quantitatis $(Q + \tfrac{1}{4}PP)$ radix quadratica rationalis ſit, vel vtraque irrationalis, ſi hæc radix irrationalis ſit. Poteſt & impoſſibilis fieri vtraque radix, ſi hæc quantitas ſit negativa, quod iis ſolis caſibus contingere poteſt, quibus Q negativa eſt §. 283. Si enim eo ſumpto Q maior fuerit quam $\tfrac{1}{4}PP$, erit $-Q + \tfrac{1}{4}PP$ quantitas negativa, cuius radix impoſſibilis eſt, & omnem quantitatem, cui iungitur addendo vel ſubtrahendo, impoſſibilem reddit.

§. 350.

§. 350. Eodem poſito, Q ſcilicet negativam eſſe, ſi $Q = \frac{1}{4}PP$, radices in vnam coincidunt, eamque rationalem, $\frac{1}{2}P$. Hoc caſu ſi pro Q ſcribamus $-\frac{1}{4}PP$, æquatio vniverſalis $xx + Px = Q$ mutatur in hanc

$$xx + Px = -\frac{1}{4}PP,$$

$$\text{vel} \quad xx + Px + \frac{1}{4}PP = 0,$$

quæ æquatio pura eſt, quia eius membrum antecedens eſt quadratum radicis $x + \frac{1}{2}P$, vel $-x - \frac{1}{2}P$; quarum vtraque iterum eundem dat litteræ x valorem, nempe $x = -\frac{1}{2}P$. Sed de his alias agetur diſtinctius.

§. 351. Cæterum reſolutio æquationis quadraticæ

$$xx + Px = Q$$

in duas ſimplices has

$$x = -\frac{1}{2}P + \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$$

$$\& \quad x = -\frac{1}{2}P - \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$$

eo tantum caſu neceſſaria eſt, cum problema ſolvendum eſt arithmetice. Si geometrice ſolvendum ſit ita, vt radices exhibeantur per lineas rectas, ea reductione nihil opus eſt. Conſtructio tradita eſt in Elementis, *G.* §. 180 *ſq*, hic autem formulis algebraicis paullo magis accommodabitur.

PROBLEMA XXXVIIII.

§. 352. *Figuram in plano deſcribere radices æquationis quadraticæ* xx . . . Px. . . . Q = 0 *per lineas rectas exhibituram, & earum ſigna per poſitionem harum rectarum, quæcunque fuerint ſigna quantitatum datarum* P *&* Q.

SOLVTIO.

§. 353. Quæcunque ſint quantitates P & Q, & per quæcunque ſigna præſententur, exhibe eas per lineas rectas ex vnitate F.12. vtcunque aſſumpta. Sint rectæ illæ, quibus eædem hæ litteræ P, Q adſcriptæ ſunt in tabula: vnitas autem pro arbitrio ſumpta ſit V. Iam ſi æquatio fuerit 1°:

$$xx - Px + Q = 0$$

F.13. duc duas rectas infinitas, quarum altera alteram ad angulos rectos ſecet apud A, & fac AC = V, AB = P, & AD = Q, ponendo rectas iſtas, quemadmodum in hac figura poſitæ ſunt. Deinde vtraque rectarum AB & CD bifariam diviſa apud E & F, comple rectangulum AG. Centro G per D vel C deſcribe peripheriam: ſi enim per vnum horum punctorum tranſiverit, tranſibit & per alterum. Erunt AH & AK radices quæſitæ, vtraque affirmativa.

F.14. Si vero fuerit 2°

$$xx + Px + Q = 0.$$

Pone

Pone AB in contraria, cæteris manentibus, vt in figura 14. Reliqua abſolve eodem modo, erunt radices AH & AK, vtraque negativa.

Si fuerit 3° F. 15.

$$xx - Px - Q = 0.$$

Pone AB vt in caſu primo: ſed AD loca in contraria rectæ AC, reliqua nunc quoque abſolve quemadmodum dictum eſt: erunt radices iisdem litteris ſignatæ AH & AK, maior AK affirmativa, minor, AH negativa.

Si fuerit 4° F. 16.

$$xx + Px - Q = 0$$

fac omnia vt in caſu præcedente, ſed AB pone vt in caſu ſecundo. Erunt hic quoque radices AH & AK, ſed minor AK affirmativa, maior AH negativa.

Demonstratio.

Eſt enim generatim in omnibus his figuris $AC : AK = AH : AD$, & hinc $AH \times AK = AC \times AD = 1 \times Q = Q$, *Geom.* §. 176. Sed GE biſecat chordam HK, redditque $EH = EK$. Cum ergo & $EA = EB$ *per conſtr.* erit, æqualia ſubtrahendo ab æqualibus, vel ad ea addendo, $AH = KB$, & $BH = AK$.

Si iam in figura 13, AK dicatur $+x$, fit $AH = KB = P - x$, & $AH \times AK = Px - xx = Q$, vel $xx - Px + Q = 0$. Eademque

que æquatio prodit ſi AH dicatur x, quia ad hanc denominationem fit $AK = P - x$.

In figura autem 14, ſi AK dicatur $+ x$, fit $AH = P - x$, vnde, ſi AK ſit $- x$, erit $AH = P + x$, & hinc $AH \times AK = - Px - xx = Q$, vel $xx + Px + Q = 0$. Si AH dicatur $= - x$, eodem modo colligetur $AK = P + x$, vnde eadem prodit æquatio.

In figura 15, ſi AK dicatur $+ x$, fit $AH = x - P$, vnde ex $AH \times AK = Q$ fit $xx - Px = Q$, & hinc $xx - Px - Q = 0$. Si vero hic AH dicatur $+ x$, fit $AK = P + x$, vnde, ſi ſit $AH = - x$, erit $AK = P - x$, atque $AH \times AK = - Px + xx = Q$, quæ æquatio cum priori coincidit.

Tandem in figura 16, ſi AK ſit $+ x$, erit $AH = P + x$, & hinc $AH \times AK = Px + xx = Q$, vel $xx + Px - Q = 0$. Si vero AH dicatur $+ x$, fit $AK = x - P$, & hinc ſi AH ſit $- x$, $AK = - x - P$, vnde $AH \times AK = xx + Px = Q$, quæ æquatio cum priori iterum coincidit.

Scholion.

§. 354. In omnibus his figuris radicum AH, AK poſitivæ ſunt eæ, quæ a puncto A verſus dextram protenduntur, negativæ, quæ verſus ſiniſtram. Cæterum cum figura 14 a 13, atque figura 16 a 15, non aliter differant,

quam

quam quod harum inverſæ ſint, poterat vniverſa radicum harum inventio ad duas figuras reduci, quarum prima, 13 vel 14 iis æquationibus legitime ordinatis ſerviret, in quibus Q poſitiva eſt, altera 15 vel 16 illis, quorum Q eſt negativa. Verum quia ea re radices poſitivæ a negativis non ſatis diſtinguuntur; præſtat fere, quatuor figuris diverſis pro diverſis quatuor æquationibus quadraticis vti, quemadmodum oſtenſum eſt. Cæterum ſi in figura 13 P & Q poſitivæ eſſe intelligantur, figura 14 a 13 eo dici poteſt differre, quod hic ſola P negativa ſit, figura autem 15, eo, quod negativa ſit ſola Q; atque figura 16 eo, quod & P negativa ſit, & Q.

Corollarium I.

§. 355. Si in duabus prioribus harum figurarum radius circuli æqualis evaſerit rectæ FA vel GE, vt in figura 17, duo puncta H & K in vnum confundentur punctum E, atque duæ radices, poſitivæ vel negativæ, inter ſe æquales fient. Scilicet vtriusque magnitudo erit $AE = \frac{1}{2}P$. Continget iſtud, vbi $FG^q + FD^q = FA^q$, quia $FG^q + FD^q = DG^q$. Cum ergo $FG = AE = \frac{1}{2}P$, & $FD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Q$, atque hinc $FA = FD + Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Q$; erit ad hunc caſum $\frac{1}{4}PP + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}QQ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}QQ$, F. 13. 14.

$+\frac{1}{4}QQ$, & hinc $\frac{1}{4}PP = Q$, ſive $PP = 4Q$, vel $P = 2\sqrt{Q}$.

Corollarium II.

§. 356. Si vero FA maior fuerit quam radius GD, circulus rectam AB ne quidem attinget, tumque radices æquationis nullæ erunt poſſibiles. Ad hunc caſum $\frac{1}{4}PP + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}QQ$ minus eſt, quam $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}QQ$, & hinc $\frac{1}{4}PP < Q$ vel $P < 2\sqrt{Q}$: quod & ſupra §. 349. vidimus. Eſt autem neceſſario P minor quam $2\sqrt{Q}$, ſi $P = 0$, quare æquationis $xx + Q = 0$ vel $xx = -Q$ radices ſemper impoſſibiles eſſe, hinc quoque apparet.

Corollarium III.

F.15. 16. §. 357. In poſterioribus duabus figuris radices impoſſibiles fieri nequeunt, quia puncta C, D ad diverſas rectæ AB partes cadunt, vnde fit, vt peripheria per hæc puncta deſcripta hanc AB productam neceſſario bis ſecet. Si ergo hic P evanuerit, punctis B & E cum A confuſis vt in figura 18. duæ æquationis radices AH, AK abſolute ſpectatæ, inter ſe æquales fient, cum vna AH ſit negativa, altera AK poſitiva. Æquatio huius caſus eſt $xx - Q = 0$, vel $xx = Q$, adeoque quadratica pura; cuius adeo conſtructio vniverſali huic ſubeſt. Et patet vtramque rectarum AH, AK mediam proportionalem eſſe inter datas AC & AD.

PRO-

PROBLEMA XL.

§. 358. *Datam lineam rectam* AB *ita ſecare apud* K, *vt quadratum partis* AK *fiat æquale rectangulo ex tota* AB *&* *parte reliqua* KB. F. 19.

PRÆPARATIO.

§. 359. Quamvis AB ſecanda proponatur, id eſt, pars AK a tota AB auferenda; fieri tamen non poteſt, quin in ſolutionem includatur problema aliud, quo rectæ AB addere iubemur partem AH, cuius quadratum ſit æquale rectangulo ex HB & AB. Neque enim Algebra ſubtractionem veri nominis ab additione diſtinguit; Geometria autem, dum rectam ſubtrahit ab alia; eandem ſimul illi addit. *Geom.* §. 41.

Solvtio.

§. 360. Si recta data AB dicatur a, & AK ſit $= x$, erit KB $= a - x$, & hinc

$$xx = aa - ax$$

vel $$xx + ax - aa = 0.$$

Constrvctio.

§. 361. Si hæc æquatio comparetur cum ea, quæ conſtructa eſt per figuram 16, apparet eſſe P $= a$, ſique ſumatur V $= a$, fit etiam Q $= a$. Quare ſi ad præſcriptum eius figuræ fiat AC $=$ AD $= a =$ AB, & AE $= \frac{1}{2}a$, ac centro

centro E per C vel D deſcribatur peripheria, erit K punctum quæſitum. Sed & AH, radix eiusdem æquationis negativa, problemati ſatisfacit, ſi loco ſubtractionis hic vſurpetur additio, id eſt, ſi AH ſecundum leges quantitatum negativarum tractetur.

Scholion.

§. 362. Quia $EA = \frac{1}{2}a$ & $AC = a$, eſt $ECq = EAq + ACq = \frac{1}{4}aa + aa = \frac{5}{4}aa$, hinc $EC = EK$

$$= \frac{a\sqrt{5}}{2}, \text{ \& } AK = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}a = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2},$$

$$\text{ſed } AH = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}a = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Hinc autem

$$KB = a - \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}, \text{ \&}$$

$$HB = a + \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}.$$

Quare

$$AK^2 = a^2 . \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = a^2 . \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \text{ \& } AB.$$

$$KB = a^2 . \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

ergo $AK^2 = AB.KB$. Sed

$$AH^2 = a^2 . \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{4} = a^2 . \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \text{ \& } AB.$$

$$HB = a^2 . \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

ergo quoque $AH^2 = AB.HB$.

Eædem

Eædem radices prodeunt, ſi æquatio ſecundum dicta §. 344. in ſimplices ſolvitur, hoc modo:

$$xx + ax = aa.$$

ergo $$x = -\tfrac{1}{2}a \mp \surd(aa + \tfrac{1}{4}aa)$$

vel $$x = a \times \frac{-1 \mp \surd 5}{2},$$

eſtque $AK = a \times \frac{-1 + \surd 5}{2}$ & $AH = a \times \frac{-1 - \surd 5}{2}$, quarum poſterior cum negativa ſit, eo ipſo additionem imperat, vbi prior ſubtrahenda eſt.

PROBLEMA XLI.

§. 363. *Datam lineam rectam ita ſecare, vt rectangulum ex tota & vno ſegmentorum, ſit æquale rectangulo ex altero ſegmento, & ſegmentorum differentia.* F.20.

SOLVTIO.

§. 364. Sit recta data $AB = a$, eius ſegmentum prius $AH = x$, erit alterum $HB = a - x$, & ſegmentorum differentia $HB - AH = a - 2x$.

Ergo, $ax = (a - x)(a - 2x)$

id eſt $ax = aa - 3ax + 2xx$

vel $0 = aa - 4ax + 2xx$

& $xx - 2ax + \tfrac{1}{2}aa = 0.$

CONSTRVCTIO.

§. 365. Si hæc æquatio comparetur cum ea, quæ conſtructa eſt per figuram 13, eſt $P = 2a$, ſique dicatur $a = V$, ſit $Q = \frac{1}{2}a$. Cum ergo ſit $AB = a$, fiat $AD = DC = \frac{1}{2}a$, completoque rectangulo AG, deſcribatur per C vel D peripheria: erit H punctum quæſitum, quod in data AB vnicum erit. Verum producta AB, donec a peripheria denuo ſecetur apud K, punctum K problema pariter ſolvet paullo aliter enunciatum. Scilicet, ſi AK dicatur x reliquis manentibus, eædem æquationes veræ erunt.

PROBLEMA XLII.

F. 21. §. 366. *In data recta* AB *punctum reperire vt* H, *tale, vt ſit quadratum ex* AH, *ad quadratum lateris* HB, *in data ratione.*

SOLVTIO.

§. 367. Sit $AB = a$, $AH = x$, erit $HB = a - x$, data ratio ſit $m : n$; erit

$$x^2 : (a^2 - 2ax + x^2) = m : n$$

hinc $nx^2 = ma^2 - 2max + mx^2$

& $(m - n)x^2 - 2max + ma^2 = 0$

vel $x^2 - \frac{2ma}{m-n}.x + \frac{m}{m-n}.a^2 = 0.$

CONSTRVCTIO.

§. 368. Fiat ad figuram 13, $P = \frac{2ma}{m-n}$, & hinc $AE = \frac{ma}{m-n}$. Eidem $\frac{ma}{m-n}$ fiat $= V = AC$, erit $Q = AD = a$. Reliqua abſolvantur vt in figura; erunt H & K puncta quæſita. Scilicet $AHq : HBq = m : n$, pariterque $AK^2 : BK^2 = m : n$.

Scholion.

§. 369. Si arithmetice ſolvendum fuerit problema iſtud, ex æquatione vltima fiet

$$x^2 - \frac{2ma}{m-n}\,x = - \frac{maa}{m-n}$$

$$\text{hinc} \quad x = \frac{ma}{m-n} \mp \sqrt{\left(- \frac{ma^2}{m-n} + \frac{m^2a^2}{(m-n)^2}\right)}$$

$$\text{vel} \quad x = \frac{ma}{m-n} \mp \sqrt{\frac{-m^2a^2 + mna^2 + m^2a^2}{(m-n)^2}}$$

$$\text{vel} \quad x = \frac{ma \mp a\sqrt{mn}}{m-n} = a.\frac{m \mp \sqrt{mn}}{m-n}.$$

Si iam ſit $a = 10$, $m = 9$, $n = 4$, erit

$$x = \frac{90 - 60}{5} = \frac{30}{5} = 6, \text{ vel } x = \frac{90 + 60}{5}$$

$$= \frac{150}{5} = 30.$$

Ad

Ad prius, $x = 6$, erit $HB = 4$, quorum numerorum quadrati ſunt 36 & 16, eſtque $36 : 16 = 9 : 4$.

Ad poſterius autem $x = 30$, eſt $BK = 20$, quorum numerorum quadrati 900 & 400 ſunt pariter vt 9 ad 4.

PROBLEMA XLIII.

F.22. §. 370. *Data in triangulo rectangulo* ABC *ſumma laterum angulum rectum comprehendentium* $AC + AB$, *&* *recta* AD *ex apice anguli recti in latus oppoſitum* CB *perpendiculari, invenire latus iſtud.*

PRÆPARATIO.

§. 371. Per conditionem problematis priorem eſt $AB^q + AC^q = BC^q$; per alteram autem $BC : BA = AC : AD$, quibus per ſigna legitime expreſſis, reliqua facile abſolvuntur.

SOLVTIO.

§. 372. Sit $AC + AB = a$, & $AC - AB = y$, erit $AC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}y$, & $AB = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}y$, AD autem ſit $= b$, & quæſita $BC = x$,

erit $AC^q = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{4}yy$

& $AB^q = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{4}yy$

hinc ex $AC^q + AB^q = BC^q$, fiet

$$x^2 = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}yy,$$

vel $$2x^2 = aa + yy.$$

Proportio autem BC : BA = AC : AD hoc modo exprimetur:

$$x : \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}y : b,$$

vnde fit $bx = \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}yy,$

vel $4bx = aa - yy.$

Harum autem æquationum

$$2xx = aa + yy$$

& $4bx = aa - yy$

membris additione coniunctis oritur

$$2xx + 4bx = 2aa$$

vel $xx + 2bx = aa$

aut $xx + 2bx - aa = 0.$

Constrvctio.

§. 373. Si hæc æquatio cum ea comparetur, quæ conſtruitur per figuram 16, apparet eſſe $P = 2b$, ſique vnitas pro arbitrio ſumenda ponatur $= a$, fit & $Q = a$. Si ergo ſumatur $AE = b$, & $AC = a$ (quia enim AD F.23. = AC, hanc quoque adponere nihil opus eſt) deſcribaturque centro E per C peripheria circuli, erit AK latus quæſitum. Sed AH, altera æquationis radix, erit latus maximum trianguli rectanguli Acb figuræ 22, in quo a eſt differentia laterum Ac & Ab, quod eadem analyſi reperitur, quia ſi ponatur $AC - AB = a$, & $AC + AB = y$, eædem æquationes prodeunt.

Scho-

Scholion.

§. 374. Cæterum etſi AK iſta vel AH ſemper reperiatur, quæcunque ſumantur a & b, tamen inde non ſequitur, problema ſemper poſſibile eſſe. Quia enim x latus maximum eſſe ponitur trianguli alicuius rectanguli, reſtat, vt triangulum illud deſcribatur, quod fieri non poterit, ſi a notaverit laterum angulum rectum comprehendentium ſummam, atque b præ a iſta nimis magna fuerit. Si enim a notaverit laterum angulum rectum comprehendentium differentiam, ſemper poterunt hæc latera ſumi eius magnitudinis, ad quas b fiat cuiuſcunque magnitudinis datæ: quod levi harum rerum conſideratione facile perſpicitur.

PROBLEMA XLIIII.

F.22. §. 375. *Dato trianguli rectanguli latere maximo* BC, *ac ſumma laterum reliquorum & perpendiculi ex apice anguli recti ad latus* BC *demiſſi*, $AB+AC+AD$, *invenire perpendiculum iſtud* AD.

SOLVTIO.

§. 376. Sit $BC=a$, $AB+AC+AD=b$, & $AD=x$, erit $AC+AB=b-x$, vnde ſi $AC-AB$ dicatur $=y$, erit $2AC=b-x+y$, & $2AB=b-x-y$. Per hæc autem

$BC^q = AC^q + AB^q$, vel $4BC^q = 4AC^q + 4AB^q$ ita exprimetur,

$$4a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + 2by - 2xy + y^2$$
$$+ b^2 - 2bx + x^2 - 2by + 2xy + y^2,$$

vel $4a^2 = 2b^2 - 4bx + 2x^2 + 2y^2$,

aut $2a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$.

Proportio autem BC : BA = AC : AD exprimetur hoc modô :

$$a : \frac{b - x + y}{2} = \frac{b - x - y}{2} : x,$$

vnde fit æquatio

$$4ax = b^2 - 2bx + x^2 - y^2.$$ Cui ſi prior

$$2a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2,$$

iungatur addendo, prodit

$$4ax + 2a^2 = 2b^2 - 4bx + 2x^2,$$

vel $2ax + a^2 = b^2 - 2bx + x^2$;

hinc vero fit

$$-x^2 + 2bx + 2ax = b^2 - a^2,$$

vel $x^2 - 2(b + a)x = a^2 - b^2$,

vel $x^2 - 2(b + a)x + b^2 - a^2 = 0$.

Scholion.

§. 377. Conſtructio ſecundum figuram 13 peragetur, quia $b^2 - a^2$ affirmativa eſt. Repe rieturque adeo vel duplex x affirmativum, vel nullum prorſus. In ſimplices autem æquatio ſolvetur hoc modo:

eſt $x^2 - 2(b+a)x = a^2 - b^2$,
vnde $x = b + a \mp \surd(a^2 - b^2 + b^2 + 2ab + a^2$,
vel $x = b + a \mp \surd(2ab + 2aa)$.

Erunt ergo æquationes eæ ſimplices:

$$x = b + a - \surd(2ab + 2aa)$$
$$x = b + a + \surd(2ab + 2aa).$$

Reperto per hæc perpendiculo, reſtat vt triangulum rectangulum deſcribatur, quod niſi fiat, problema plane ſolutum cenſeri non poteſt. Manifeſtum autem eſt eam conſtructionem, omnibus, quemadmodum propoſita ſunt, ſumptis, impoſſibilem fore, ſi ſumatur $x = b + a + \surd(2ab + 2aa)$, quæcunque fuerint data a & b. Nequit enim perpendiculum, quod denotat x, æquale eſſe lateri trianguli maximo a, tanto minus hoc excedere. Erit, ergo altera radix $x = b + a - \surd(2ab + 2aa)$ ad hunc caſum ſola adhibenda.

§. 378. Atque ſic, cum cuiuslibet æquationis quadraticæ duæ ſemper ſint radices, quarum vna æquationi non minus ſatisfacit quam altera; ſunt tamen ſæpe in problemate conditiones aliquæ, quæ prohibent, quo minus id per vtramque radicum ſolvatur. Vtraque autem detecta, quænam adhibenda ſit, raro diu quæretur.

PROBLEMA XLV.

§. 379. *Datis trianguli* ABC, *perimetro, area, & vno angulorum, reperire latera.*

PRÆPARATIO.

§. 380. Perimeter AB + BC + AC ſit a, F. 24. & area bb; ſique angulus A datus ſit, ducatur CD illi oppoſita ad alterutrum laterum eum includentium perpendicularis. Dabuntur rationes AC : AD, quæ ſit $r : c$, & AC : CD, quæ ſit $r : s$. Quæretur primum latus AC quod dicatur x. Conditiones problematis has æquationes dant, $AB \times CD = 2bb$, & ab initio poſitam $AB + BC + AC = a$, per quas ſolvetur, ſi omnia exprimantur per x. Verum duæ hæ æquationes & aliud incognitum admittunt, quod per eas facile eliminabitur. Sit id $AB = y$.

SOLVTIO.

§. 381. Erit per aſſumpta $CD = \frac{sx}{r}$, hinc

$$2bb = \frac{sxy}{r}, \; \& \; \frac{2rbb}{sx} = y.$$

Præterea vero $AD = \frac{cx}{r}$, & $DB = y - \frac{cx}{r}$. Hinc autem ex CBq = DBq + CDq fit CBq $= y^2 - \frac{2cxy}{r} + \frac{c^2x^2}{r^2} + \frac{s^2x^2}{r^2}$, vel CBq

$= y^2 - \frac{2cxy}{r} + \frac{c^2 + s^2}{r^2} . x^2$. Sed $c^2 + s^2 = r^2$, vnde $\frac{c^2 + s^2}{r^2} = 1$, ergo $CB^q = y^2 - \frac{2cxy}{r} + x^2$, & $CB = \mp \sqrt{(y^2 - \frac{2cxy}{r} + x^2)}$.

Hinc autem

$$a = x + y \mp \sqrt{(y^2 - \frac{2cxy}{r} + x^2)}$$

& $a - x - y = \mp \sqrt{(y^2 - \frac{2cxy}{r} + x^2)}$. Vnde, ſi vtrinque fiat quadratum

$$a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2 = y^2 - \frac{2cxy}{r} + x^2;$$

hinc $-2ax - 2ay + 2xy + \frac{2cxy}{r} = -aa$,

$$\text{vel} \quad 2ax + 2ay - 2xy - \frac{2cxy}{r} = aa.$$

Si iam in æquationem ita præparatam introducatur valor litteræ $y = \frac{2rbb}{sx}$, fit

$$2ax + \frac{4rabb}{sx} - \frac{4rbb}{s} - \frac{4cbb}{s} = aa,$$

vel $2asxx + 4rabb - 4rbbx - 4cbbx = saax$;

vnde

vnde $2asxx - 4rbbx - 4cbbx - saax = -4rabb$

& $xx - \frac{4rbb + 4cbb + saa}{2as} x = -\frac{2rbb}{s}$.

Ponatur brevitatis cauſſa $\frac{4rbb + 4cbb + saa}{2as}$ $= 2f$, erit

$$xx - 2fx = -\frac{2rbb}{s}$$ & hinc

$$x = f \mp \sqrt{(-\frac{2rbb}{s} + ff)}.$$

Manifeſtum autem eſt latus AB a datis eodem plane modo pendere, quo ab iis pendet latus AC. Quare hæc latera ſimul reperiri neceſſe erit, notabitque valorum quæſiti x alter AB, altero notante AC. Vnde ſi

$$AC = f - \sqrt{(-\frac{2rbb}{s} + ff)}$$

erit $$AB = f + \sqrt{(-\frac{2rbb}{s} + ff)}$$

ergo $AC + AB = 2f$, & latus tertium, quod angulo dato opponitur, $CB = a - 2f$.

Scholion.

§. 382. Notandus hic in primis eſt modus ſignum radicis ex æquatione auferendi. Tolerari enim id ſignum non poteſt, ſi quantitatem ignotam afficiat, eſtque eo caſu ſemper eliminandum, niſi forte compendio calculi locum faciat. Id autem fit, ſi quantorum complexus quem adficit, in vnam æquationis partem transferatur, fiatque vtriusque membri quadratum. De ſigno radicis quadraticæ hic agitur, quod hoc facto cedere neceſſe eſt. Si plura fuerint in æquatione ſigna eiusmodi, vnum eliminabitur poſt alterum. Neque enim per vnam operationem, quæ deſcripta eſt, vno plura ſigna excidunt, niſi in caſibus aliquibus ſingularibus. Radicum autem quadraticarum ſigna qui eliminare novit, ſimili methodo cubicarum & his ſuperiorum radicum ſigna facile tollet.

§. 383. Sit in æquatione

$$a + \sqrt{x} = \sqrt{y}$$

x ab irrationalitate liberanda. Eſt

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} - a;$$

hinc $$x = y - 2a\sqrt{y} + aa.$$

Si & reliquum ſignum radicis tollendum ſit, facio $2a\sqrt{y} = y + aa - x$, erit

$$4aay = (y + aa - x)^2,$$

in qua æquatione irrationale quantum nullum eſt.

§. 384. Si idem præſtandum ſit apud æquationem

$$-a = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z},$$

atque primo ab irrationalitate liberandum x, eſt $-\sqrt{x} = a + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

& $$x = a^2 + 2a\sqrt{y} + y + 2a\sqrt{z} + 2\sqrt{yz} + z.$$

Vt porro quantitati y ſignum radicis demam, transfero facta, in quibus $\sqrt{y}$ ineſt, omnia in vnam æquationis partem, ita

$$-2a\sqrt{y}-2\sqrt{yz}=a^2-x+y+z+2a\sqrt{z},$$

vel brevitatis gratia pro $a^2-x+y+z$ adhibendo $-f$, hoc modo

$$2a\sqrt{y}+2\sqrt{yz}=f-2a\sqrt{z}.$$

Vnde iterum quadrando fit

$$4a^2y+8ay\sqrt{z}+4yz=f^2-4af\sqrt{z}+4a^2z.$$

Ex qua æquatione reſiduum ſignum tollitur eadem ratione, ſi ſcribatur

$$8ay\sqrt{z}+4af\sqrt{z}=f^2+4a^2z-4a^2y-4yz,$$

vel $(8ay+4af)\sqrt{z}=f^2+4a^2z-4a^2y-4yz$; hinc enim fit

$$z(8ay+4af)^2=(f^2+4a^2z-4a^2y-4yz)^2,$$

in qua æquatione radicis ſignum prorſus nullum eſt.

PROBLEMA XLVI.

§. 385. *Quadrati* ABCD *lateribus productis, ex vno eius angulorum* D *educere rectam* DE, *cuius pars* FE, *quæ cadit intra aliquem angulorum circa* B, *ſit datæ magnitudinis.*

PRÆPARATIO.

§. 386. Caſus problematis plures ſunt, prout FE vel intra angulum CBE cadit, vel intra ABG vel ABC. Æquationem dabunt triangula rectangula EAD, DCF inter ſe ſimilia. F.25.

lia. Conſtruetur autem problema, ſi detur DE vel DF.

SOLVTIO.

§. 387. Biſecta FE apud H, ſit $DH = x$, & $HE = HF = b$. Erit $DE = x + b$ & $DF = x - b$. Latus autem quadrati AD vel DC ſit a. Erit
$DE : AE = DF : DC$, vel $DE : DF = AE : DC$, hinc $DEq : DFq = AEq : DCq$, & hinc porro $DEq + DFq : DFq = AEq + DCq : DCq$. Sed $AEq + DCq = AEq + ADq = DEq$. Ergo $DEq + DFq : DFq = DEq : DCq$.

Hæc autem proportio per aſſumpta ita exprimitur. $DEq = x^2 + 2bx + b^2$, & $DFq = x^2 - 2bx + b^2$, ergo $DEq + DFq = 2x^2 + 2b^2$, atque

$$(2x^2 + 2b^2) : (x^2 - 2bx + b^2) = (x^2 + 2bx + b^2) : a^2$$

vnde fit æquatio

$$\begin{aligned} 2a^2x^2 + 2a^2b^2 \;=\; & x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 \\ & - 2bx^3 - 4b^2x^2 - 2b^3x \\ & + b^2x^2 + 2b^3x + b^4, \end{aligned}$$

quæ contrahitur in hanc:

$$2a^2x^2 + 2a^2b^2 = x^4 - 2b^2x^2 + b^4.$$

Hæc autem æquatio in modum quadraticarum ordinata

$$x^4 - 2b^2x^2 - 2a^2x^2 = 2a^2b^2 - b^4,$$

vel $x^4 - 2(b^2 + a^2)x^2 = 2a^2b^2 - b^4$
ſi conſideretur attentius, patet eam & ad mo-

dum

dum quadraticarum reduci ad ſimpliciorem formam poſſe, quia x^4 quadratum eſt radicis x^2, ſitque z^2, ſi x^2 ponatur $= z$.

Eſt ergo §. 344.

$$x^2 = b^2 + a^2 \mp \surd(2a^2b^2 - b^4 + b^4 + 2a^2b^2 + a^4),$$

ſive $x^2 = b^2 + a^2 \mp \surd(4a^2b^2 + a^4)$.

Hinc autem porro fit

$$x = \mp \surd(b^2 + a^2 \mp \surd(4a^2b^2 + a^4))$$

& $x + b$ ſive DE $= b \mp \surd(b^2 + a^2 \mp \surd(4a^2b^2 + a^4))$.

Scholion.

§. 388. Si fuerit $2a^2 < b^2$, erit vtroque per b^2 multiplicato $2a^2b^2 < b^4$, hinc ſi vtrinque addatur $2a^2b^2 + a^4$, fit $4a^2b^2 + a^4 < b^4 + 2a^2b^2 + a^4$, ergo $\surd(4a^2b^2 + a^4) < b^2 + a^2$, quare hoc caſu $b^2 + a^2 - \surd(4a^2b^2 + a^4)$ quantitas affirmativa erit, atque hinc DE poſſibilis, quæcunque ſigna vſurpentur. Erunt ergo in vniverſum quantitatis huius DE valores quatuor, iſti:

$$b + \surd(b^2 + a^2 + \surd(4a^2b^2 + a^4))$$
$$b + \surd(b^2 + a^2 - \surd(4a^2b^2 + a^4))$$
$$b - \surd(b^2 + a^2 + \surd(4a^2b^2 + a^4))$$
$$b - \surd(b^2 + a^2 - \surd(4a^2b^2 + a^4)).$$

§. 389. Scilicet, cum DE notet quamvis lineam a puncto D inchoatam, atque in infinita AB terminatam, quæ, ſi opus ſit, producta, fiat pars eius intra aliquem angulorum,

quem comprehendunt rectæ AB, GC vtcunque productæ, æqualis datæ $2b$; ſi a & b intra dictum §. 388. limitem ſumantur, quatuor da-
F.26. buntur eius modi lineæ. Prima DE, altera DI, qua producta, ſit IK $= 2b$, tertia DL, & quarta DN, quibus productis ſit LM $=$ NP $= 2b$. Atque hæ quatuor lineæ per valores repertos exhibentur.

§. 390. Si vero fuerit $2a^2 = b^2$, relegendo eundem calculum colligitur $\sqrt{(4a^2b^2+a^4)} = b^2+a^2$, & hinc $b^2+a^2-\sqrt{(4a^2b^2+a^4)} = 0$, & $b^2+a^2+\sqrt{(4a^2b^2+a^4)} = 2b^2+2a^2 = 3b^2$.

Vnde quatuor valores prioris caſus redeunt ad tres iſtos:

$$b+\sqrt{3b^2} = b+b\sqrt{3}$$
$$b-\sqrt{3b^2} = b-b\sqrt{3}$$
$$b$$

quorum vltimus rationalis eſt. Puncta ſcilicet N & L ad hunc caſum in vnum coaleſcunt, ſitque angulus BLM æqualis angulo BNM, atque ſemirectus, vt in figura 27.

Tandem ſi $2a^2 > b$, eſt $\sqrt{(4a^2b^2+a^4)} > b^2+a^2$, & hinc $\sqrt{(b^2+a^2-\sqrt{(4a^2b^2+a^4)})}$ quantitas impoſſibilis; quare valores poſſibiles duo tantum reſtant hi:

$$b+\sqrt{(b^2+a^2+\sqrt{(4a^2b^2+a^4)})}$$
$$b-\sqrt{(b^2+a^2+\sqrt{(4a^2b^2+a^4)})}.$$

Hoc

Hoc ſcilicet caſu duæ tantum rectæ duci poſſunt quæſito ſatisfacientes, DE & DI: non autem DL & DN, quia ſcilicet b nimis breuis aſſumpta eſt, quam vt a D in AB locari poſſit cum effectu propoſito.

§. 391. Si loco DE quæſita fuiſſet DF in GC terminata, qua, ſi opus eſſet, producta fieret FE $= 2b$, ſubtrahenda fuiſſet b ab x reperto. Quare pro his lineis eædem formulæ valebunt, ſi in iis b ponatur negativa. Verum tamen hoc facto rectæ ab iis, quæ ante repertæ ſunt, diverſæ non prodeunt, quia DK $=$ DE; DF $=$ DI; DP $=$ DL; DM $=$ DN.

§. 392. Cæterum per hanc methodum omnes æquationes, in quibus legitime reductis x^m occurrit atque x^{2m}, ſed prætcrea incogniti dignitas nulla, perfecte ſolventur. Poſſunt per

$$x^{2m} - Px^m + Q = 0$$

omnes huius generis æquationes denotari, quia ad hanc formam reduci omnes poſſunt, ſiquidem P & Q modo quantitatem affirmativam modo negativam notare ponatur, prout id æquatio requirit, in cuius locum vniverſalis hæc ſucceſſit.

Eſt autem ad æquationem hanc

$$x^m = + \tfrac{1}{2}P \mp \surd(Q + \tfrac{1}{4}PP)$$

quod facile patet, eoque magis etiam declaratur,

tur, ſi ponatur $x^m = z$. Fit eo $x^{2m} = z^2$, atque his valoribus in æquationem illatis

$$z^2 - Pz + Q = 0.$$

Hic vtique $z = + \frac{1}{2}P \mp \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$, ergo & x^m poſtliminio in locum z reſtituto, æquatio vera erit.

Æquatio autem ita reperta

$$x^m = \frac{1}{2}P \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$$

cum pura ſit, detegentur valores litteræ x faciendo $x = \sqrt[m]{(\frac{1}{2}P \mp \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)})}$. Qui quidem litteræ x valor vel affirmativus ſumetur vel negativus, vel & affirmativus & negativus, prout m vel numerum imparem notat, vel parem.

PROBLEMA XLVII.

F.10. §. 393. *Data in triangulo rectangulo ſumma laterum angulum rectum comprehendentium* AB + AC, *& ſumma lateris maximi* BC *& perpendiculi* AD, *invenire triangulum.*

PRÆPARATIO.

§. 394. Sit AB + AC $= a$, & AB $= x$, erit AC $= a - x$; BC vero ſit y, & BC + AD $= b$, erit AD $= b - y$. Triangulum dabitur dato x vel y. Æquationes autem ſuppeditabuntur per eadem theoremata, quibus ante §. 371. vſi ſumus.

Solvtio.

§. 395. Fit nempe ex $AB^q + AC^q = BC^q$

$$x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = y^2,$$

vel $2xx - 2ax + a^2 = y^2$.

Analogia vero $BC : AC = AB : AD$, vel hinc nata æquatio $AC \times AB = BC \times AD$, dat

$$ax - xx = by - yy.$$

Vniantur æquationes iſtæ addendo, erit

$$xx - ax + aa = by;$$

hinc $y = (xx - ax + aa) : (b$

& $y^2 = (x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + 2a^2x^2 - 2a^3x$
$+ a^4) : (b^2$.

Hoc in æquationem primam illato, oritur

$$\begin{aligned} 2b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 \\ - 2a^3x + a^4, \end{aligned}$$

vel $x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$
$- 2b^2x^2 + 2ab^2x - a^2b^2$

Si hæc æquatio conſideretur, vel ſi eius tentetur radix quadratica, pateſcit ei deficere $b^4 - a^2b^2$, quo minus ſit quadratum perfectum. Addita ergo vtrinque quantitate hac, erit

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = b^4 - a^2b^2 \\ - 2b^2x^2 + 2ab^2x - 2a^2b^2 \\ + b^4, \end{aligned}$$

vnde, ſi vtrinque radix extrahatur,

$$x^2 - ax + a^2 - b^2 = \mp b\sqrt{(bb - aa)}.$$

Hæc iam æquatio vel ad modum quadraticarum conſtrui, vel in ſimplices ſolvi poterit. Hæ vero elicientur hunc in modum,

$$x^2 - ax = b^2 - a^2 \mp b\sqrt{(b^2 - a^2)}$$
$$x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{(b^2 - \tfrac{3}{4}a^2 \mp b\sqrt{(b^2 - a^2)})}.$$

Hinc iam ſi y exhibenda ſit, id ita fiet. Eſt ex repertis

$$x^2 - ax + a^2 = b^2 \mp b\sqrt{(bb - aa)}$$

fuit autem $y = \dfrac{x^2 - ax + a^2.}{b}$

Ergo $y = b \mp \sqrt{(b^2 - a^2)}$.

Scholion.

§. 396. Hinc autem porro fit $by = bb \mp b\sqrt{(b^2 - a^2}$, quod ſi in priorem æquationem inferatur, prodit

$$x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{(by - \tfrac{3}{4}aa)}.$$

Servatis autem problematis conditionibus, quia $y = BC$, & $b = BC + AD$, hinc b maior quam y; erit non $y = b + \sqrt{(b^2 - a^2)}$, verum $y = b - \sqrt{(b^2 - a^2)}$, atque eodem modo explicanda erit y in æquatione, per quam datur x. Quare duæ tantum eius æquationis radices, hæ

$$x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{(bb - \tfrac{3}{4}aa - b\sqrt{(bb - aa)})}$$

problemati ſatisfacient, quarum vna laterum AB, AC minus exhibet, altera vero maius.

§. 397. Cæterum methodus, qua hoc problema ad quadraticum reductum eſt, & alias com-

commode adhibebitur in æquationibus altioribus, quæ, addendo cognita, puræ reddi poſſunt; quod quamvis raro, aliquando tamen vſu venit. Aliquando etiam, æqualia ad vtrumque æquationis membrum addendo, ſive cognita ea fuerint, ſive ex notis atque ignotis compoſita, vel plane ignota, æquatio eo perducetur, vt vtrumque eius membrum quadratum ſit, vel cubus, vel alia dignitas; quod vbi contingit, extrahendo radices, æquatio ad inferiorem gradum deprimi poteſt.

PROBLEMA XLVIII.

§. 398. *Data ſumma trium numerorum, qui ſunt in proportione continua, atque ſumma quadratorum, invenire numeros.*

PRÆPARATIO.

§. 399. Dato numero primo ac ſecundo, datur tertius. Verum proportione inverſa, primus fit tertius, & qui erat tertius, primus, ad eundem medium. Quare ſi numerus primus dicetur x, eadem littera etiam tertium quæſitorum denotabit, manente medio y; atque per ſolutionem ſimplex prodibit valor litteræ y, ſed duplex litteræ x.

SOLV-

SOLVTIO.

§. 400. Sumptis quæ poſita ſunt, tertius numerus erit $\frac{yy}{x}$, & ſi ſumma numerorum dicatur a, ſumma autem quadratorum bb, erit

$$x + y + \frac{yy}{x} = a \quad \& \quad x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = bb;$$

hinc

$$x^2 + xy + yy = ax, \quad \& \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = b^2x^2.$$

Ope vnius harum æquationum ex alia eliminanda eſt x vel y. Eliminata autem x reddit ſimpliciorem æquationem, quare hæc optime tolletur. Quod cum vna operatione perfici poſſit, ſecundum dicta §. 233, hic commode fiet per partes. Æquationem ſcilicet ad ſiniſtram poſitam, multiplicatam per $-x^2$, quo fiat $-x^4 - x^3y - x^2y^2 = -ax^3$, addo æquationi dextræ, eoque produco

$$-x^3y + y^4 = b^2x^2 - ax^3.$$

Rurſus eandem æquationem, quam prius multiplicavi per $-x^2$, multiplico per xy, quo fit $x^3y + x^2y^2 + xy^3 = ax^2y$, atque hanc addo ei, quam additione produxi. Prodit

$$x^2y^2 + xy^3 + y^4 = b^2x^2 + ax^2y - ax^3.$$

Porro eandem æquationem ſiniſtram in $-y^2$ multiplico, quo fiat $-x^2y^2 - xy^3 - y^4 = -axy^2$, & hanc repertarum æquationum vltimæ addendo produco

$$0 = b^2x^2$$

$$0=b^2x^2+ax^2y-ax^3-axy^2,$$

vel ſi omnia diviſa per x, transferantur in alteram partem

$$ax^2-axy+ay^2-b^2x=0.$$

Multiplicata tandem eadem æquatione quam ſemper ita tractavimus, per $-a$, fit $-ax^2-axy-ay^2=-a^2x$, quæ ſi vltimæ addatur, prodit

tandem $-2axy-b^2x=-a^2x$,

vel $2ay+b^2=a^2$,

ergo $y=\frac{a^2-b^2}{2a}$.

Reſtat vt reperiatur x, quod vt obtineam facio $yy=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2}$, atque vtrumque valorem in aliquam æquationum ab initio poſitarum infero. Simplicior eſt ſiniſtra, quæ hac ſubſtitutione fit

$$x^2+\frac{a^2-b^2}{2a}x+\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2}=ax.$$

Translato autem ax, coefficiens litteræ x fit $\frac{a^2-b^2}{2a}-a=\frac{a^2-b^2-2a^2}{2a}=-\frac{a^2+b^2}{2a}$

poteſtque æquatio ita ſcribi

$$x^2-\frac{a^2+b^2}{2a}x=-\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2},$$ vnde

$$x=\frac{a^2+b^2}{4a}\mp\sqrt{\left(-\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2}+\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{16a^2}\right)}$$

Quæ

Quæ hic ſub ſigno radicis ſunt quanta, ſi ad eandem denominationem reducantur, ſic ſeſe habent:

$$\frac{-4a^4+8a^2b^2-4b^4+a^4+2a^2b^2+b^4}{16a^2}.$$

Poteſt ergo æquatio brevius ita ſcribi:

$$x=\frac{a^2+b^2\mp\sqrt{(10a^2b^2-3a^4-3b^4)}}{4a}.$$

Exhibebit x vnum terminorum extremorum, ſi ſignum $+$ vſurpetur, alterum ſi $-$.

Scholion.

§. 401. Sit $a=19$, $b^2=133$, erit $a^2=361$, hinc $a^2+b^2=494$; ſed $10a^2b^2=480130$, $3a^4=390963$, $3b^4=53067$, quare $x=\frac{4\ 4\mp\sqrt{(480130-444030)}}{76}$, vel $x=\frac{494\mp190}{76}$. Eſt ergo numerorum quæſitorum maior $=\frac{684}{76}=9$, minor autem $\frac{304}{76}=4$. Medius vel ex his, vel ex formula ante reperta $y=\frac{a^2-b^2}{2a}$, reperiri poteſt. Per formulam eſt $y=\frac{228}{38}=6$. Atque patet, tres nume-

numeros 4, 6, 9 propoſito ſatisfacere. Eſt enim $4+6+9=19=a$, & $16+36+81=133=b^2$.

§. 402. Sit autem $a=7$ & bb pariter $=7$ erit $aa=49$, & hinc $y=\frac{49-7}{14}=\frac{42}{14}=3$. Sed $10a^2b^2=3430$ & $3a=7203$, $3b^4=147$, quare

$$x=\frac{56\mp\sqrt{(3430-7350)}}{28}$$

$$=\frac{56\mp\sqrt{-3920}}{28}=\frac{56\mp\sqrt{(-5\times784)}}{28}$$

$$=\frac{56\mp28\sqrt{-5}}{28}=2\mp\sqrt{-5}.$$

Prodeunt ergo pro numeris, qui quærebantur, hoc caſu ſigna iſta, $2-\sqrt{-5}$, 3, $2+\sqrt{-5}$.

§. 403. Facile apparet numeros, quorum conditiones poſitæ ſunt, impoſſibiles eſſe, quia extremi exhiberi non aliter poſſunt, quam radice quadratica ex numero negativo extracta, quod fieri nequit. §. 283.

Verum tamen ſigna reperta ſi tractentur, quemadmodum tractanda ſunt ea, quibus numeri irrationales notantur, omnibus conditionibus dictis exacte ſatisfit. Si enim extrema $2+\sqrt{-5}$ & $2-\sqrt{-5}$ ducantur in ſe inuicem §. 301. fit $4+2\sqrt{-5}-2\sqrt{-5}+5$, quod reductum fit $4+5=9$, reliquis ſeſe deſtruentibus, & hinc proportione medius $=3$.

Eſt quoque ſumma trium $2+\sqrt{-5}$, $+2-\sqrt{-5}$, $+3=2+2+3=7$ reliquis ſeſe iterum deſtruentibus, & ſumma quadratorum, ex iisdem

$$\begin{array}{l} 4+4\sqrt{-5}-5 \\ 4-4\sqrt{-5}-5 \\ 9 \end{array}$$

itidem æqualis 7, quemadmodum propoſitum eſt.

§. 404. Non ſunt ergo negligenda ſigna iſta, quia in reſolutionibus problematum, quorum data invicem repugnant, id omne præſtant, quod præſtari poteſt, exhibendo expreſſiones & quaſi formas quantitatum, quæ, ſecundum regulas generales tractatæ, quæſitum reddunt. Sed & quantitates poſſibiles determinare poſſunt; quemadmodum hic numerus 3 eo determinatur, quod dicatur eſſe proportione medius inter $2+\sqrt{-5}$ & $2-\sqrt{-5}$.

DEFINITIO VIIII.

§. 405. Quantitati impoſſibili, quæ neque eſt neque eſſe poteſt, oppoſitæ quantitates poſſibiles, ſive rationales fuerint ſive irrationales, veras vel *Reales* paſſim vocavimus. In impoſſibili autem quantitate algebraice expreſſa, ſi pars aliqua realis fuerit, quod

quod relinquitur omni hoc reali ſubtracto, *Imaginarium* dicetur.

Scholion.

§. 406. Radices repertæ $2+\sqrt{-5}$; $2-\sqrt{-5}$ impoſſibiles dicentur, ſed non imaginariæ. Ineſt in iis pars realis, numerus ſcilicet 2, quo ablato relinquitur $\sqrt{-2}$, quæ ſola dicetur imaginaria; vt omne quidem imaginarium & impoſſibile ſit, ſed non omne impoſſibile imaginarium.

§. 407. Multum autem differt impoſſibile a Nihilo. Namque nihilum mathematicum ſolam privationem ponit rei, quæ eſſe vtique poteſt, & eſt, quamvis in eo non inſit, de quo negatur: vt ſi dicatur puncti alicuius ab alio puncto diſtantiam nullam eſſe. Sed in impoſſibili ſemper conditio eſt aliqua, quæ, quod impoſſibile dicitur, eſſe omnino prohibet, cuiusmodi ſunt circulus rectilineus, vel triangulum, cuius anguli ſummam, duobus rectis cum recti dimidio æqualem, conficiunt.

§. 408. Quod autem Quantum dicatur, quod impoſſibile eſt, neminem movere debet. Poteſt id ita explicari, vt non de rebus ſed de ſignis agi dicatur, quemadmodum quævis littera quantitas ſæpe dici ſolet, cum nihil ſit, præter eius ſpeciem. Sed nihil prohibet, quo minus & in impoſſibili quantitatem concipiamus. Sic $\sqrt{-2}$ impoſſibilis eſt; ſed duæ radices ita ſignatæ, ſunt bis tanto impoſſibiles, tres ter, & ita porro. Quare & $5\sqrt{-2} : 7\sqrt{-2} = 5 : 7$, & generatim $m\sqrt{-a} : n\sqrt{-a} = m : n$.

§. 409. Cæterum etſi impoſſibilitatis fundamentum generale ſit quælibet contradictio: Algebra tamen in quantitates imaginarias non aliter incidit, quam per extractiones radicum, quia reliquarum operationum, quibus ex quantitatibus realibus alias elicit, additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio, contradictionem nulla vnquam involvit. §. 144. Imaginaria autem ita producta, ſi quantitatibus realibus iungantur, fiunt impoſſibilia.

§. 410. Ex dictis autem §. 283. concluditur generatim radicem hoc modo expreſſam $\sqrt[n]{-b}$, imaginariam fore, ſi n numerus par fuerit; realem, ſi vel n numerum imparem notaverit, vel quantitas ſub ſigno radicis fuerit affirmativa. Quare littera n numerum parem notante, omnes radices imaginariæ data formula continebuntur.

§. 411. Sit $\sqrt[n]{b}=\beta$, erit $\sqrt[n]{-b}=\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{-1} = \beta\sqrt[n]{-1}$, poteruntque omnes radices imagi-

imaginariæ & ad hanc formam $\beta\sqrt[n]{-1}$ reduci, notante β quantitatem realem, rationalem vel irrationalem.

§. 412. Porro ſi numerus *n* dividatur per maximum terminorum progreſſionis 2, 4, 8, & ita porro, qui eum metitur, vel vnitas prodibit vel aliquis numerus impar: vnde ſequitur quemlibet numerum parem *n* factum eſſe ex aliquo terminorum dictæ progreſſionis, & ex vnitate vel impari. Quare ſi *t* notaverit terminum illum progreſſionis, & *i* imparem, qui efficit, vt ſit $it = n$, erit $\sqrt[n]{-1}$ radix ordinis *t*, huius $\sqrt[i]{-1}$. §. 100. Sed $\sqrt[i]{-1}$ ſemper eſt -1, quare $\sqrt[n]{-1}$ & per hanc formulam exprimetur $\sqrt[t]{-1}$; eritque in hac ſuppoſitione perpetuo $\sqrt[n]{-1} = \sqrt[t]{-1}$.

§. 413. Vniverſalis ergo quanti imaginarii formula $\sqrt[n]{-b}$ in hanc $\beta\sqrt[n]{-1}$ ante reducta, & ita exprimetur $\beta\sqrt[t]{-1}$, notante *t* maximum numerorum progreſſionis 2, 4, 8, 16, qui metitur *n*, neque præter ea, quæ aliqua harum formarum $\beta\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt[4]{-1}$, $\beta\sqrt[8]{-1}$ &c.

&c. exhiberi poſſunt, vllum quantum algebraice expreſſum imaginarium erit, niſi forte ex pluribus eiusmodi compoſitum fuerit. Sed hic de ſimplicibus agitur.

§. 414 Non poſſunt imaginaria iſta per alia itidem imaginaria exhiberi, quorum radices minus altæ ſunt. Ad impoſſibilia autem huius formæ $\alpha \mp \beta\sqrt{-1}$ omnia facile reducentur per ſequentia.

PROBLEMA XLVIIII.

§. 415. *Radicem quadraticam huius formæ* $\sqrt{(A \mp \sqrt{B})}$ *in duas radices quadraticas ſolvere.*

SOLVTIO.

§. 416. Sint radices quæſitæ $\sqrt{x}$ & $\sqrt{z}$, vt ſit

$$\sqrt{(A \mp \sqrt{B})} = \sqrt{x} \mp \sqrt{z},$$

erit

$$A \mp \sqrt{B} = x \mp 2\sqrt{xz} + z.$$

Pone $A = x + z$, quia, ſi hæc quanta per numeros rationales dentur, hi ita coaleſcunt, erit $\sqrt{B} = 2\sqrt{xz}$, & $B = 4xz$, hinc $z = \frac{B}{4x}$. Hac quantitate in priorem æquationem illata, fit

$x + \frac{B}{4x}$

$$x + \frac{B}{4x} = A,$$
$$4xx + B = 4Ax,$$
$$xx - Ax = -\tfrac{1}{4}B$$
$$x = \tfrac{1}{2}A \mp \surd(\tfrac{1}{4}AA - \tfrac{1}{4}B)$$
$$\text{vel} \quad x = \frac{A \mp \surd(AA - B)}{2}.$$

Eadem formula exhibet z, ſi ſignum ſumatur oppoſitum illi, quod præfigere libuit ſigno radicis ad exhibendum x, quia vna harum litterarum non aliter in æquationem illata eſt, quam altera. Si ergo ponatur

$$x = \frac{A + \surd(AA - B)}{2}$$
$$\text{erit} \quad z = \frac{A - \surd(AA - B)}{2}.$$

Cumque poſita ſit $\surd(A \mp \surd B) = \surd x \mp \surd z$, erit

$$\surd(A \mp \surd B) = \surd\frac{(A + \surd(AA - B))}{2}$$
$$\mp \surd\frac{(A - \surd(AA - B))}{2}.$$

Scholion.

§. 417. Per hanc Regulam plerumque radices quadraticæ ad formam multo ſimpliciorem reducuntur.

Sit exhibenda radix quadratica numeri $3+\sqrt{8}$, erit, ſi $A+\sqrt{B}$ hunc numerum notare ponatur, $A=3$ & $B=8$, hinc $\sqrt{(AA-B)}$ erit $=\sqrt{(9-8)}=1$, ergo $\sqrt{(3+\sqrt{8})}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{\frac{4}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{2}+1$.

Sit numerus, cuius radix quæritur $14-\sqrt{180}$, erit $A=14$ & $B=180$, ergo $\sqrt{(AA-B)}=\sqrt{(196-180}=\sqrt{16}=4$. Ergo radix quæſita $=\sqrt{\frac{14+4}{2}}-\sqrt{\frac{14-4}{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}-\sqrt{\frac{10}{2}}=3-\sqrt{5}$.

Sit radix iſta $\sqrt{(1+\sqrt{-48})}$ ſimplicius exhibenda, erit $A=1$ & $B=-48$, ergo $\sqrt{(AA-B)}$ iam erit $=\sqrt{(1+48)}=7$, atque radix quæſita erit $\sqrt{\frac{1+7}{2}}+\sqrt{\frac{1-7}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}+\sqrt{-\frac{6}{2}}=2+\sqrt{-3}$.

Si numerus, cuius radix ita exhibenda eſt, fuerit $\sqrt{32}-\sqrt{24}$, erit $AA=32$, & $B=24$, hinc $\sqrt{(AA-B)}=\sqrt{(32-24)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Radix ergo quæſita erit $\sqrt{\frac{\sqrt{32}+2\sqrt{2}}{2}}$

$-\sqrt{}$

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{32}-2\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{2}}{2}}$$

$$-\sqrt{\frac{2\sqrt{8}-2\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{2})}-\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{2})}$$

$$=\sqrt{(2\sqrt{2}+\sqrt{2})}-\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{2})}=\sqrt{3\sqrt{2}}$$

$$-\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}.$$

Corollarium I.

§. 418. Per eandem regulam quantitates imaginariæ $\beta\sqrt[4]{-1}$, $\beta\sqrt[8]{-1}$, $\beta\sqrt[16]{-1}$ & reliquæ omnes reducentur ad formam quantitatis impoſſibilis hanc $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, in qua α & β quantitates reales, rationales vel irrationales, denotant.

Eſt enim $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{(0+\sqrt{-1})}$, quod, ſi comparetur cum $\sqrt{(A+\sqrt{B})}$ fit $A=0$ & $B=-1$, vnde $\sqrt{(AA-B)}=\sqrt{1}=1$. Erit ergo $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\frac{0+1}{2}}+\sqrt{\frac{0-1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1}$. Quare $\beta\sqrt[4]{-1}$ erit $\beta\sqrt{\frac{1}{2}}+\beta\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1}$, ſique pro $\beta\sqrt{\frac{1}{2}}$ ſcribatur α, erit $\beta\sqrt[4]{-1}=\alpha+\alpha\sqrt{-1}$.

Hinc autem $\sqrt[8]{-1}=\sqrt{\sqrt[4]{-1}}=\sqrt{(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}})}$, quo cum vniverſali $\sqrt{(A+\sqrt{B})}$ comparato, apparet eſſe $A = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ & $B = -\tfrac{1}{2}$. Quare $\sqrt{(AA - B)} = (\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}}) = 1$. Radix ergo erit $\sqrt{\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}} + 1}{2}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}} - 1}{2}}$, vel concinnius, $\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})} + \sqrt{(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$; vnde $\beta\sqrt[8]{-1}$ erit $\beta\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})} + \beta\sqrt{(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$, vel $\beta\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})} + \beta\sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})} . \sqrt{-1}$. Quantitas autem $\sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$ realis eſt, ergo & $\beta\sqrt[8]{-1}$ per quantum formæ $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ exprimitur.

Eodem modo quantitates imaginariæ huius generis reliquæ ad binomia impoſſibilia reducentur, reperieturque lex progreſſionis iſta:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} . \sqrt{-1}$$

$$\sqrt[8]{-1} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})} + \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})} . \sqrt{-1}$$

$$\sqrt[16]{-1} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})} + \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})} . \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[32]{-1} = {} & \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})} \\ & + \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})} . \sqrt{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[64]{-1} = {} & \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})})} \\ & + \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})})} . \sqrt{-1}\end{aligned}$$

& ita porro.

Corollarium II.

§. 419. Generatim ergo omnis expreſſio algebraica quantitatis impoſſibilis ad hanc formam $\alpha + \beta\surd -1$ reduci poterit, litteris α, β quantitates reales notantibus. Id verum eſſe in omni caſu, quando quantitas impoſſibilis non ſubeſt ſigno alicuius radicis, cum ex dictis facile perſpiciatur; non minus evidens eſt, ſi quantitas impoſſibilis ſit ſub ſigno radicis, eandem ſemper ita exprimi poſſe, $\sqrt[n]{(\alpha + \beta - \surd 1)}$. Hoc autem facto, eadem quantitas & ita ſignabitur $\sqrt[n]{\alpha}.\frac{\alpha \pm \beta\surd -1}{\alpha}$, vel ita $\sqrt[n]{\alpha}.\sqrt[n]{(1 \pm \frac{\beta}{\alpha}\surd -1)}$, vel ſi pro $\frac{\beta}{\alpha}$ ſcribatur γ, hoc modo $\sqrt[n]{\alpha}.\sqrt[n]{(1 \pm \gamma\surd -1)}$. Hæc ergo expreſſio cum in ſeriem reſolvatur iſtam; §. 332.

$$\sqrt[n]{\alpha}.(1 \pm \frac{1}{n}.\gamma\surd -1 - \frac{1.1-n}{n.\ 2n}\gamma^2$$

$$\pm \frac{1.1-n.\ 1-2n}{n.\ 2n.\ 3n}.\gamma^3\surd -1$$

$$- \frac{1.1-n.\ 1-2n.\ 1-3n}{n.\ 2n.\ 3n.\ 4n}\gamma^4$$

$$\pm \frac{1.1-n.\ 1-2n.\ 1-3n.\ 1-4n}{n.\ 2n.\ 3n.\ 4n.\ 5n}\gamma^5\surd -1$$

$- \&c.)$ cuius termini partim reales ſunt, partim

tim per $\sqrt{-1}$ multiplicantur, patet eandem quoque ad formam $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ redire.

Corollarium III.

§. 420. Quantitas vero imaginaria, quæ ſcilicet nihil prorſus realitatis continet, per ſigna algebraica non aliter exprimetur, quam hoc modo $\beta\sqrt{-1}$. Eius autem generis quantitas in aliam quantitatem imaginariam hanc $b\sqrt{-1}$ ducta, vel per hanc diviſa, cum ſemper factum $-b\beta$ vel quotum $\frac{\beta}{b}$ realem exhibeat; ſequitur eſſe, vt vnitas realis 1, ad quantitatem imaginariam $b\sqrt{-1}$; ita aliam quamcunque quantitatem imaginariam $\beta\sqrt{-1}$, ad realem $b\beta$; & vt quantitas imaginaria $b\sqrt{-1}$, ad vnitatem realem; ita aliam quamcunque quantitatem imaginariam $\beta\sqrt{-1}$, ad quantitatem itidem realem.

Scholion.

§. 421. Nihil in his paradoxi eſt. Eſt enim vtique imaginarii ad reale eadem relatio, quæ eſt realis ad imaginarium: quamvis id de quantitatibus impoſſibilibus dici non poſſit, quæ ex reali & imaginario componuntur. Quare vtcunque quantitates puræ imaginariæ I & i expreſſæ ſint, factum Ii ſemper reale erit, & quotus, qui prodit I per i diviſo, realis.

SECTIO VIII.

DE PROBLEMATIBVS PER DIVISIONEM ANGVLI SOLVENDIS.

PROBLEMA L.

§. 422.

Invenire triangulum, in quo ſit baſis AB *ad latus* AC, *vt latus iſtud* AC *ad alterum* CB, *& vt hoc* CB *ad perpendiculum* CD. F.24.

PRÆPARATIO.

§. 423. Manifeſtum eſt vno huiusmodi triangulo conſtructo, infinica poſſe conſtrui; quia in omnibus triangulis ſimilibus eadem eſt ratio laterum, æqualibus angulis oppoſitorum: perpendiculum autem triangula ſimilia in triangula itidem ſimilia dividit. *Geom.* §. 173. Poterit ergo aliquod laterum trianguli ſumi pro arbitrio. Porro ſi detur ratio AC : CB, dabitur & illi æqualis ratio AB : AC, & CB : CD.

SOLVTIO.

§. 424. Sumatur ergo CB $= 1$, & AC dicatur $= x$. Quia ergo CB : CA $=$ CA : AB, erit AB $= xx$, & quia AC:CB $=$ CB:CD, erit CD $= \frac{1}{xx}$.

Porro ex AD $= \surd(\mathrm{AC}q - \mathrm{CD}q)$ fit AD $= \surd\left(x^2 - \frac{1}{xx}\right) = \frac{\surd(x^4 - 1)}{x}$, & ex DB $= \surd(\mathrm{CB}q - \mathrm{CD}q)$ deducitur DB $= \surd\left(1 - \frac{1}{xx}\right) = \frac{\surd(xx - 1)}{x}$. Hinc quia AD $+$ DB $=$ AB, erit

$$\frac{\surd(x^4 - 1) + \surd(x^2 - 1)}{x} = xx,$$

vel, $\surd(x^4 - 1) + \surd(x^2 - 1) = x^3$.
Vt hic ſigna radicum tollantur, faciendum eſt, §. 382.

$$\surd(x^4 - 1) = x^3 - \surd(x^2 - 1)$$

erit $x^4 - 1 = x^6 - 2x^3\surd(x^2 - 1) + x^2 - 1$,
vel $x^4 = x^6 - 2x^3\surd(x^2 - 1) + x^2$
aut, ſi omnia dividantur per xx,

$$x^2 = x^4 - 2x\surd(x^2 - 1) + 1.$$

Porro

$$2x\surd(x^2 - 1) = x^4 - x^2 + 1$$

& hinc ſi fiant quadrata

$$4x^4 - 4x^2 = x^8 - 2x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1,$$

vel $x^8 - 2x^6 - x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

Hinc ſi extrahatur radix quadratica, prodit

$$x^4 - x^2 - 1 = 0,$$

vel $$-x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Sed quia poſterior harum æquationum ex priori naſcitur, inutilis hic eſt. Prior autem illa dat

$$x^4 - x^2 = 1,$$

vnde $$x^2 = \tfrac{1}{2} \mp \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{2} \mp \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

vel $$x^2 = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

vnde porro fit $x = \mp \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}}$.

Scholion.

§. 425. Quatuor ita repertæ ſunt huius æquationis radices, verum inter has impoſſibiles ſunt duæ $\mp \sqrt{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$, quia $\sqrt{5}$ maior eſt quam 1, & hinc $1 - \sqrt{5}$ quantitas negativa. Reſtant ergo duæ tantum radices poſſibiles $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ & $-\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$, ſed quarum eadem eſt abſoluta magnitudo. Vnde vnum tantum triangulum propoſito ſatisfacit, ad quod latus AC, quod denotavimus per x eſt $= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$, baſis $AB = xx = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, & latus alterum $CB = 1.$

$= 1$. Eſſe autem hoc triangulum rectangulum inde apparet, quod $AC^2 + CB^2 = AB^2$. Nam $AC^2 = x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, hinc $AC^2 + CB^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Sed etiam $AB^2 = x^4 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

§. 426. Æquatio autem altera, quæ ex reperta $x^8 - 2x^6 - x^4 + 2x^2 + 1 = 0$, elicita eſt, non ob aliam rationem potuit ſeponi, quam quod radices a repertis diverſas non exhibet. Si autem hæ quoque ſumantur, octo in vniverſum prodeunt æquationis $x^8 - 2x^6 - \&c.$ radices, duæ impoſſibiles formæ $+\sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, duæ impoſſibiles formæ $-\sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, duæ poſſibiles affirmativæ $+\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, & totidem negativæ $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

§. 427. Cæterum in æquatione illa, cuius x ad octavam dignitatem adſurgit, eiusdem x dignitas exponentis imparis nulla occurrit. Poterant autem harum dignitatum omnes vel aliquæ in eam introduci per aliam denominationem. Si incognita dicta fuiſſet non x, verum $z+1$, loco æquationis

$$x^8-2x^6-x^4+2x^2+1=0,$$

producta fuiſſet hæc:

$$z^8+8z^7+26z^6+44z^5+39z^4+12z^3$$
$$-6z^2-4z+1=0$$

vtpote quæ æquatio ex illa naſcitur, ſi in ea loco x^8 ſcribatur $(z+1)^8$, loco x^6 vero $(z+1)^6$ & ita porro, omnibus his dignitatibus legitime explicatis.

§. 428. Quemadmodum autem in æquationibus his littera quæſitum denotans ad octavam dignitatem adſurgit: quæ in reliquis, quas hucusque tractavimus, non adſcenderat vltra quartam; ita in aliis æquationibus ſumma illa quæſiti dignitas occurrere poteſt quæcunque alia, quam deinde dignitates reliquæ ſequentur deſcendendo, ordine vel continuo, vel per aliquarum defectum interrupto. Quibus ſi iungantur hactenus tractatæ, omnis æquatio, ſive pura fuerit ſive non pura, redibit ad aliquam formarum iſtarum:

$$x+P=0$$
$$x^2+Px+Q=0$$
$$x^3+Px^2+Qx+R=0$$
$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$$
$$x^5+Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0$$
$$x^6+Px^5+Qx^4+Rx^3+Sx^2+Tx+V=0.$$

& ita porro: in quibus formulis, ſi coefficientium P, Q, R, S, T quivis modo affirmativam modo negativam quantitatem notare ponatur, modo nihilum, nulla concipi poteſt æquatio, quæ legitime reducta non cum aliqua earum congruat.

§. 429. Reducendi vero modus ab eo, qui apud æquationes quadraticas expoſitus eſt, nihil differt. Tolluntur ſigna radicum, quæ quantitatem quæſitam afficiunt; eædem quantitates ex denominatoribus transferuntur in numeratores; æquatio ordinatur ſecundum dignitates litteræ, quæ notat quæſitum, vt præcedat ſuprema, & hanc deinde ordine ſequantur reliquæ. Tandem, ſi ſuprema incogniti dignitas aliquem coefficientem cognitum habuerit, per hunc omnes æquationis termini dividentur.

§. 430. Hoc modo tractata æquatio $x = \sqrt[3]{(a^2x - b^3)} - \frac{ab}{x}$ fit $x^2 = x\sqrt[3]{(a^2x - b^3)} - ab$, vel $x^2 + ab = x\sqrt[3]{(a^2x - b^3)}$: ſique vtriusque membri ſumatur cubus, $x^6 + 3abx^4 + 3a^2b^2x^2 + a^3b^3 = a^2x^4 - b^3x^3$, quæ ita ordinatur:

$$\begin{array}{l} x^6 \; * + 3abx^4 + b^3x^3 + 3a^2b^2x^2 \; * + a^3b^3 = 0 \\ \qquad\;\; - a^2x^4 \end{array}$$

Solet ſcilicet, vbi omnia diſtinctiſſime exprimenda ſunt, in locum termini, qui in æquationem ingredi poterat, ſed in caſu propoſito deficit, *locari: terminorum autem, in quibus eadem eſt incogniti dignitas, vnus ſcribi ſub altero. In æquationem ita ſcriptam vniverſalis ſexti ordinis æquatio convertetur, ſi in ea ponatur,

$$\begin{array}{ll} P = 0 & S = 3a^2b^2 \\ Q = 3ab - aa & T = 0 \\ R = b^3 & V = a^3b^3 \end{array}$$

§. 431. Sic ſi fuerit $\frac{bx^2}{a^2 - x^2} = \sqrt{(cx - bc)}$ erit, ſi vtrinque quadratum fiat:

$$\frac{b^2x^4}{a^4 - 2a^2x^2 + x^4} = cx - bc;\ \text{hinc}$$

$$\begin{array}{l} b^2x^4 = a^4cx - 2a^2cx^3 + cx^5 - a^4bc + 2a^2bcx^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - bcx^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{vel}\quad cx^5 - bcx^4 - b^2x^4 - 2a^2cx^3 + 2a^2bcx^2 \\ \qquad\qquad\qquad + a^4cx - a^4bc = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \&\ x^5 - bx^4 - 2a^2x^3 + 2a^2bx^2 + a^4x - a^4b = 0 \\ \quad - \frac{bb}{c}x^4 \end{array}$$

in quam æquationem vniverſalis quinti ordinis convertitur, ſi in ea fiat

$$\begin{array}{ll} P = -b - \frac{bb}{c} & S = a^4 \\ Q = -2a^2 & T = -a^4b. \\ R = 2a^2b & \end{array}$$

§. 432. Quod autem ad modum attinet æquationes iſtas ſolvendi, ea, quæ in hoc problemate adhiberi potuit, peculiaris eſt, quæ adhiberi raro poteſt. Multum enim abeſt, vt omnes vel pleræque æquationes, repetita extractione radicum quadraticarum, in ſimplices poſſint ſolvi. Generatim ſolutio æquationum, quæ quadraticas excedunt, in ſimplices difficilis eſt: & ſæpe per regulas adhuc repertas ne quidem dari poteſt. Sunt autem æquationum, quæ quadraticas ordine ſuperant, & plures duabus radices, aliquando omnes poſſibiles, aliquando omnes impoſſibiles, vel partim poſſibiles partim impoſſibiles; quarum quævis, æquatione in ſimplices ſoluta, per harum vnam exhibetur.

PROBLEMA LI.

F.28. §. 433. *Datis ſinubus ac coſinubus duorum arcuum, invenire ſinum atque coſinum arcus, qui illorum ſumma ſit vel differentia.*

SOLVTIO.

§. 434. Arcus quorum ſinus atque coſinus dantur, ſint AB & BD $=$ BE; erit AD arcuum datorum ſumma, & AE differentia. Sit BF, ſinus arcus AB, $= s$, eiusque coſinus FC, $= c$. Ducta autem chorda DE, quæ a radio CB bifariam & ad angulos rectos ſecabitur,

cabitur, ſit DG = EG, quæ ſinus eſt arcus BD vel BE, $= \sigma$, ac eorundem arcuum coſinus CG $= \varkappa$. Duc porro GH, DI, EK radio AC perpendiculares, atque GL, EM eidem parallelas. Erit DI ſinus ſummæ arcuum AB + BD, ac IC eiusdem ſummæ coſinus. EK autem ſinus erit differentiæ arcuum AB — BE, & KC eius differentiæ coſinus. Radius AC vel BC ſit $= r$. Erit BC : BF = GC : GH, ergo GH $= \frac{s\varkappa}{r}$. Præterea vero BC : FC = GC : HC, hinc HC $= \frac{c\varkappa}{r}$. Similia autem ſunt triangula rectangula CBF, GEM, DGL, *Geom.* §. 160. quia, cum angulus EGM complementum ſit ad rectum anguli CGH, idem & angulum GEM in rectum complet: vnde ſequitur, angulos triangulorum GEM, CGH æquales eſſe. Ergo & triangulum CBF triangulo EGM ſimile erit, idemque ſimile triangulo DGL, quod a triangulo GEM nulla re differt. Et hinc CB : BF = EG : EM = GD : GL. Erit ergo EM ſive GL $= \frac{s\sigma}{r}$, & quia præterea CB : CF = EG : GM = GD : DL, erit GM $=$ DL $= \frac{c\sigma}{r}$.

Cum

Cum ergo DI, ſinus ſummæ datorum arcuum, ex partibus componatur LI $=$ GH & DL, erit ſinus iſte $= \frac{s\kappa + c\sigma}{r}$.

Et IC, eiusdem ſummæ arcuum coſinus, cum ſit CH $-$ HI vel CH $-$ GL, erit hic coſinus $= \frac{c\kappa - s\sigma}{r}$.

Sed EK, ſinus differentiæ datorum arcuum cum ſit GH $-$ GM, erit ſinus hic differentiæ $= \frac{s\kappa - c\sigma}{r}$, & KC, coſinus eiusdem differentiæ $=$ CH $+$ HK vel CH $+$ ME, erit $= \frac{c\kappa + s\sigma}{r}$; vt ſit arcuum, quorum ſinus ſunt s & σ, coſinus vero c & κ.

	Summæ		*Differentiæ*
Sinus $=$	$\frac{s\kappa + c\sigma}{r}$	. . . . . .	$\frac{s\kappa - c\sigma}{r}$
Coſinus $=$	$\frac{c\kappa - s\sigma}{r}$	. . . . . .	$\frac{c\kappa + s\sigma}{r}$

Corollarium I.

§. 435. Hinc colliguntur ſinus atque coſinus arcus, qui dati alicuius duplus, triplus, quadruplus eſt, & ita porro. Sit $\sigma = s$, & $\kappa = c$;

$\varkappa = c$; erit arcus AD duplus arcus AB, & arcus huius dupli

$$\text{Sinus} = \frac{sc + cs}{r}, \quad \text{Coſinus} = \frac{cc - ss}{r}$$

$$= \frac{2sc}{r} \qquad\qquad = \frac{2cc - rr}{r}$$

Eſt enim generatim $rr = ss + cc$, poteſtque in locum ss ſubſtitui $rr - cc$.

Sinus autem & Coſinus arcus tripli ex iisdem formulis elicientur, ſi pro σ ponatur ſinus arcus dupli repertus, & pro $\varkappa$ eius coſinus. Fit eo arcus tripli

$$\text{Sinus} = \frac{2scc - srr + 2scc}{rr}, \quad \text{Cos.} = \frac{2c^3 - crr - 2ssc}{rr}$$

$$= \frac{4scc - srr}{rr} \qquad\qquad = \frac{4c^3 - 3r^2c}{rr}.$$

Atque eodem modo pergendo reperientur ſinus atque coſinus arcuum, qui arcus dati ſunt multipli, reliquorum. Quo facto apparet, ſi arcus, ad quem pertinet ſinus s atque coſinus c, dicatur A, fore,

$$\begin{aligned}
&\mathit{sin.}\ A = s\\
&\mathit{sin.}\,2A = 2cs : r\\
&\mathit{sin.}\,3A = (4cc - rr)\,s : rr\\
&\mathit{sin.}\,4A = (8c^3 - 4rrc)\,s : r^3\\
&\mathit{sin.}\,5A = (16c^4 - 12r^2c^2 + r^4)\,s : r^4\\
&\mathit{sin.}\,6A = (32c^5 - 32r^2c^3 + 6r^4c)\,s : r^5\\
&\mathit{sin.}\,7A = (64c^6 - 80r^2c^4 + 24r^4c^2 - r^6)\,s : r^6
\end{aligned}$$

& ita porro, atque

$$\begin{aligned}
&\mathit{cos.}\ A = c\\
&\mathit{cos.}\,2A = (2cc - rr) : r\\
&\mathit{cos.}\,3A = (4c^3 - 3r^2c) : r^2\\
&\mathit{cos.}\,4A = (8c^4 - 8r^2c^2 + r^4) : r^3\\
&\mathit{cos.}\,5A = (16c^5 - 20r^2c^3 + 5r^4c) : r^4\\
&\mathit{cos.}\,6A = (32c^6 - 48r^2c^4 + 18r^4c^2 - r^6) : r^5\\
&\mathit{cos.}\,7A = (64c^7 - 112r^2c^5 + 56r^4c^3 - r^6c) : r^6
\end{aligned}$$

&c.

Corollarium II.

§. 436. Per eadem arcus vel anguli in quotcunque partes æquales ſecti reperietur ſinus atque coſinus. Sit anguli, cuius coſinus eſt a, bifariam ſecti, exhibendus coſinus. Scripto ergo a in formularum pro coſinibus illa, quæ habet 2A, in locum *cos.* 2A, & x pro c, erit

$$a = \frac{2xx - rr}{r}$$

$$\text{vel } ra = 2xx - rr$$

$$xx = \frac{rr + ra}{2}.$$

Hinc

Hinc facile habetur eiusdem arcus vel anguli ſinus ex formula $s = \sqrt{(rr - cc)}$, eſtque, ſi arcus, cuius coſinus eſt a, dicatur α, $cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{rr + ra}{2}}$, $sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{rr - ra}{2}}$. Eodem modo arcus reliqui tractabuntur.

Scholion.

§. 437. Sit biſecandus angulus rectus, dicaturque $r = 1$. Quia ergo coſinus ad angulum rectum eſt $= 0$, erit $a = 0$, & hinc, ſi nota recti ſit R, $cos.\,\tfrac{1}{2}\mathrm{R} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $sin.\,\tfrac{1}{2}\mathrm{R} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Sit hic angulus ſemirectus iterum biſecandus, ſcripta ergo $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ loco a in formulis, fit $cos.\,\tfrac{1}{4}\mathrm{R} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$ & $sin.\,\tfrac{1}{4}\mathrm{R} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$.

Si hic angulus & ipſe biſecetur, fit

$$cos.\,\tfrac{1}{8}\mathrm{R} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})}$$

$$\&\quad sin.\,\tfrac{1}{8}\mathrm{R} = \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})}.$$

Hi numeri iidem ſunt, quorum vſus fuit in quantitatibus imaginariis reducendis. §. 418.

§. 438. Eſt autem circa diviſiones arcuum obſervandum, ſi arcus dati circuli dividendus F. 29. proponatur, cuius coſinus eſt CD, non arcum AB tantum dividendum eſſe, ſed omnes eos, qui initio ſumpto a puncto A, ac verſus B, E, F curvati, terminantur in chorda BF, quæ per D diametro AE perpendicularis eſt. Dividendus ergo in caſu præſentis figuræ erit primo arcus AB, deinde ABEF, tum ABEFAB, porro ABEFABEF, & ita porro in infinitum: idque propterea, quia coſinus CD ad omnes hos arcus æque pertinet, neque ad eorum vnum magis reſtringi poteſt, quam ad alterum. Similia & de ſinibus, tangentibus, ſecantibus vera ſunt: ſed his iam non immoramur.

§. 439. Verum multum abeſt, vt omnia puncta arcus iſtos dividentia diverſa ſint. Si arcus inter punctum A & quodcunque punctum peripheriæ B vel F interceptus, dicatur huius puncti B vel F diſtantia a puncto A, ſecundum partem datam, quam hic ſumimus ABEF & ita porro: notetque α arcum AB, peripheria minorem, π autem notet ipſam peripheriam: eadem erunt puncta peripheriæ, quorum diſtantiæ a puncto A ſunt α, $\pi + \alpha$, $2\pi + \alpha$ & ita porro, quotiescunque peripheria repetatur; prodibitque ſemper diſtantia minima vel arcus AB, ſi a data quacunque diſtantia peripheria, quam notat π, quoties fieri poteſt, ſubtrahatur.

§. 440. Deinde duo quævis puncta, quorum diſtantiæ ſecundum ABEF in peripheria captæ, diverſæ quidem ſunt, ſed ita, vt earum vna reducatur ad minimam α, altera autem ad $\pi - \alpha$, itidem minimam; id eſt, quorum diſtantiæ minimæ ſimul additæ peripheriam complent,

plent, eundem habent coſinum CD. Si enim AB ſit $= \alpha$, producta BD, erit & AF $= \alpha$, & hinc $\pi - \alpha$ erit ABEF. Eſt autem arcuum AB & ABEF idem coſinus CD.

§. 441. Atque hæc peripheriæ puncta ſola arcus terminabunt, quorum coſinus plane iidem ſunt. Si Eb ſumatur $=$ AB, atque hinc BE$=$Ab, erit quidem coſinus Cd æqualis coſinui CD, ſed ad oppoſitam partem a centro C protenſus, vt ſi CD dicatur $+ c$, ſit Cd dicendus $- c$: quare coſinus hi duorum arcuum, quorum alter alterius ſupplementum eſt ad dimidiam peripheriam, ſatis diſtinguuntur.

§. 442. Si ergo α ſit arcus minimus eorum, quorum coſinus eſt CD; iubeamurque arcum, ad quem pertinet hic coſinus, in partes quotcunque æquales ſecare, ſecandi erunt omnes arcus iſti α, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$, $2\pi + \alpha$, $3\pi - \alpha$, $3\pi + \alpha$, & ita porro. Sint in duas partes ſecandi, erunt partium eæ, quæ ab A inchoantur, $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$, $\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $\pi + \frac{1}{2}\alpha$, $\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ &c. Sed partium harum quinta eodem puncto terminatur quo prima, ſexta eo, quo ſecunda, idque continuo ita in orbem redit. Quatuor ergo tantum puncta erunt, quibus arcus quæſiti terminantur. Cumque extremis atque mediis horum arcuum iunctis, ſit $\frac{1}{2}\alpha + \pi - \frac{1}{2}\alpha = \pi$, &

$\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$

$\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha = \pi$, ſi puncta ſecantia determinare velimus per arcuum coſinus: pluribus, quam duobus coſinibus, ad hanc ſectionem abſolvendam opus non erit, pro quibus ii poterunt ſumi, qui pertinent ad arcus $\frac{1}{2}\alpha$ & $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\alpha$.

§. 443. Iisdem poſitis, ſi arcus ſit triſecandus, erunt arcuum pariter ſecandorum partes, quæ inchoantur apud A, iſtæ

$$\frac{1}{3}\alpha,\ \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha,\ \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha,$$
$$\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha,\ \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha,\ \pi - \frac{1}{3}\alpha,\ \pi + \frac{1}{3}\alpha,$$

quarum partium poſtrema eodem puncto terminatur quo prima. Sex ergo tantum erunt puncta diverſa, quibus omnes arcus quæſiti terminantur: quæ per tres coſinus dantur, quia, arcubus legitime iunctis, duo quilibet $\frac{1}{3}\alpha$ & $\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$ & $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$ & $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$ peripheriam complent. Abſolvetur ergo hæc ſectio per ſolos coſinus arcuum $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$.

§. 444 Eodem modo ſi in quatuor partes æquales ſecandas proponatur arcus, quatuor reperientur coſinus, per quos eæ ſectiones vniverſaliter dantur; ſi in quinque, quinque coſinibus res abſolvetur, & generatim tot coſinibus, in quot partes arcus ſecandus proponitur.

§. 445. Si dentur puncta, quibus arcus, per communem coſinum dati, in partes æquales dividuntur, dantur & arcuum ab iis punctis terminatorum coſinus. Atqui arcus admodum facile reperiuntur. Sit α minimus arcuum, in quinque partes ſecandorum, quorum idem eſt coſinus c, erunt arcus ea ſectione producendi, qui diverſos habent coſinus, iſti quinque $\frac{1}{5}\alpha$, $\frac{1}{5}\pi + \frac{1}{5}\alpha$, $\frac{2}{5}\pi + \frac{1}{5}\alpha$, $\frac{3}{5}\pi + \frac{1}{5}\alpha$, $\frac{4}{5}\pi + \frac{1}{5}\alpha$. Sit iam $AB = \frac{1}{5}\alpha$, dato per coſinum ſuum arcu α, tentando vel mediante idoneo inſtrumento facile reperiendus, dividaturque a puncto B peripheria in quinque partes æquales $BC = CD = DE = EF = FB$. Erit $AB = \frac{1}{5}\alpha$, $ABC = \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5}\pi$, $ABCD = \frac{1}{5}\alpha + \frac{2}{5}\pi$, & ita porro. Arcus ergo quibus omnes ii, quorum coſinus eſt c, in quinque partes dividuntur, qui quidem diverſos habent coſinus, erunt hi ipſi AB, ABC, ABD, & ita porro: adeoque coſinus quæſiti erunt GH, GI, GK, GL, GM, præterea nulli. F.30.

PROBLEMA LII.

§. 446. *Peripheriam circuli dati in numerum partium æqualium propoſitum ſecare.*

PRÆPARATIO.

§. 447. Sinus vniverſæ circuli peripheriæ eſt $= 0$. Si vero ſecare iubeamur arcum, F.29.

cuius

cuius ſinus eſt nihilum, ſecanda erit $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$ & ita porro: omnium enim horum arcuum, qui inchoati apud A, vel apud E terminantur, vel apud idem A, ſinus itidem eſt $= 0$. Quotcunque fuerint partes, in quas hi arcus ſecandi ſunt, ſemper inter eas reperientur $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{2}{3}\pi$, 2π & ita porro, quorum ſinus $= 0$. Si biſectio imperetur partes erunt $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$. Si triſectio, erunt partes $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, π, & ita porro, inter quas partes omnes eæ reperiuntur, quarum ſinum nihilo æqualem eſſe obſervavimus. Poſſunt autem hæ ſectiones in vniverſum negligi, quia vltro apparent. Quo facto ſectiones reliquæ ex formulis ſinuum facile reperientur hoc ratiocinio, vel huic ſimili.

SOLVTIO.

§. 448. Si arcus, cuius ſinus $= 0$ biſecandus ſit: erit ex tabula formularum pro ſinibus §. 435. $\frac{2sc}{r} = 0$, Ergo vel $s = 0$, vel $c = 0$, vel vtrumque, nam r datæ eſt magnitudinis. Verum puncta, ad quæ $s = 0$, non quæruntur. Diviſa ergo æquatione per $2s$, erit $c = 0$, quod indicat rectam ad BF parallelam, quæ imperatam ſectionem præſtet, per centrum C ducendam eſſe.

§. 449.

§. 449. Similiter, ſi arcus, quorum ſinus ſunt $= 0$, triſecandi ſint, ex eadem tabula erit

$$\frac{(4cc - rr)s}{rr} = 0$$

ergo vel $s = 0$, vel $4cc - rr = 0$ vel vtrumque. Non autem quæruntur puncta ad quæ $s = 0$, ergo $4cc - rr = 0$ & $4cc = rr$, vel $cc = \frac{1}{4}rr$, ergo $c = \mp \frac{1}{2}r$.

§. 450. Si ergo arcus, quorum ſinus ſunt $= 0$, quadrifariam ſecandi ſint, poteſt breviter poni

$$8c^3 - 4rrc = 0$$
$$2c^2 - rr = 0$$
$$c^2 = \frac{1}{2}rr,$$
$$c = \mp r\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

§. 451. Sint in quinque partes æquales ſecandi iidem arcus, erit per ſimilem rationem:

$$16c^4 - 12r^2c^2 + r^4 = 0$$
$$c^4 - \tfrac{3}{4}r^2c^2 = -\frac{r^4}{16}$$
$$c^2 = \tfrac{3}{8}r^2 \mp \sqrt{\tfrac{5}{64}}\,r^2$$
$$\text{vel}\quad c^2 = r^2 \times \frac{3 \mp \sqrt{5}}{8}$$
$$\text{Ergo}\quad c = \mp r\sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{8}}.$$

§. 452. Sint in ſex partes æquales ſecandi arcus illi, erit

$$32c^5 - 32r^2c^3 + 6r^4c = 0$$

$$c^4 - r^2c^2 = -\tfrac{3}{16}r^4$$

$$c^2 = \frac{r^2}{2} \mp \sqrt{\tfrac{1}{16}r^4}$$

vel $c^2 = \tfrac{1}{2}r^2 \mp \tfrac{1}{4}r^2 = \dfrac{2r^2 \mp r^2}{4}$

Ergo $c = \mp \tfrac{1}{2}r\sqrt{(2 \mp 1)}$

id eſt duo c erunt $= \mp \tfrac{1}{2}r$

& duo c reliqui $= \mp \tfrac{1}{2}r\sqrt{3}$.

§. 453. Sint in ſeptem partes æquales ſecandi iidem arcus, erit

$$64c^6 - 80r^2c^4 + 24r^4c^2 - r^6 = 0$$

qua æquatione reſoluta, ſectio quæſita dabitur, & ita porro.

Scholion.

§. 454. Poteſt ergo peripheria circuli dimidia in quemlibet numerum partium, qui non excedit ſenarium, geometrice dividi: quo tota peripheria in bis tot partes dividitur. In ſeptem vero partes æquales ſi dimidia peripheria vel integra dividenda ſit, in æquationem incidimus, quam interſectione circuli & lineæ rectæ ſolvi non poſſe, deinde videbimus. Tanto minus diviſiones in numerum partium hoc maiorem in poteſtate geometriæ vulgaris ſunt, niſi

niſi, arcus continuo biſecando, ex aliqua earum, quæ dantur, poſſint deduci. Sic peripheria in decem partes æquales diviſa, geometrice dividetur & in 20 & in 40 & ita porro.

Corollarium.

§. 455. Ex his facile reperientur latera figurarum regularium, quæ dato circulo inſcribi poſſunt. F.31. Sit AB tertia pars dimidiæ peripheriæ, erit BAD tertia pars peripheriæ integræ, & BD latus trigoni circulo inſcribendi. Cum autem ſit $BE = \sqrt{(CB^q - CE^q)}$ erit, generatim pro omnibus figuris regularibus $BD = 2\sqrt{(CB^q - CE^q)}$. Ad triſectionem ergo cum ſit $CE = \frac{1}{2}r$, §. 449. erit $BD = 2\sqrt{(rr - \frac{1}{4}rr)} = r\sqrt{3}$.

§. 456. Sit AB quarta pars dimidiæ peripheriæ, erit BD latus tetragoni regularis circulo inſcribendi. Sed CE^q ad hunc caſum eſt $= \frac{1}{2}rr$. §. 450. Ergo $BD = 2\sqrt{(rr - \frac{1}{2}rr)} = 2r\sqrt{\frac{1}{2}} = r\sqrt{2}$.

§. 457. Sit AB quinta pars dimidiæ peripheriæ, erit BD latus pentagoni regularis. Hic autem cum ſit CE coſinuum §. 451. repertorum maximus, erit $CE^q = r^2 \times \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$, &

hinc $BD = 2\sqrt{(rr - rr \times \frac{3 + \sqrt{5}}{8})}$ $= 2\sqrt{\frac{(5rr - rr\sqrt{5})}{8}} = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$.

§. 458. Sit AB ſexta pars dimidiæ peripheriæ, erit BD latus hexagoni aliunde notum. CE ad hunc caſum iterum coſinuum repertorum maximus erit, ergo §. 452. $cc = \frac{3}{4}rr$. Atque $BD = 2\sqrt{(rr - \frac{3}{4}rr)} = 2\sqrt{\frac{1}{4}rr} = r$.

§. 459. Si in formula $cos.\, 2A = \frac{2cc - rr}{2}$ ponatur pro $cos.\, 2A$, coſinus quintæ partis peripheriæ ſupra repertus, $r\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$, fit c coſinus ad decimam partem dimidiæ peripheriæ. Verum $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$, extracta radice, fit $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$, quæ ſi adhibeatur, fit formula

$$\frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r\sqrt{5} = \frac{2cc - rr}{r},$$

$$\frac{1}{4}rr + rr + \frac{1}{4}rr\sqrt{5} = 2cc$$

$$cc = \frac{5}{8}rr + \frac{1}{8}rr\sqrt{5}.$$

Hoc iam quadratum ſi ponatur eſſe CEq, fit BD latus decagoni. Sed $BD = 2\sqrt{(CB^2 - CE^2)}$, per huius ſubſtitutionem, fit

$$= 2\sqrt{(rr - \frac{5}{8}rr - \frac{1}{8}rr\sqrt{5})}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(3rr - rr\sqrt{5}}{8}} = r\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}},$$

quæ

quæ expreſſio, extracta iterum radice, convertitur in hanc, $\frac{1}{2}r\sqrt{5} - \frac{1}{2}r$, vel $\frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$.

PROBLEMA LIII.

§. 460. *In rectam infinitam ab* A *verſus* D *poſita eſt* AB = b, *& a* B *verſus eandem partem protenſa* BC = a. *Circa* B *radio* r *deſcriptus eſt circulus, atque ab huius peripheria abſciſſus arcus* DE, *cuius coſinus eſt* BC = a. *Quo arcu apud* F *bifariam diviſo, demiſſaque* FG *ad* AD *perpendiculari, quæritur* AG *per æquationem.* F. 32. 33.

PRÆPARATIO.

§. 461. Quia coſinus *a* non ad ſolum arcum DE pertinet, præter BG & alius coſinus dabitur, ad arcus per coſinum *a* determinati dimidium, qui reperietur peripheria a puncto F biſecta. §. 442. Erit ergo arcus iſte FEH, & eius coſinus BI = BG. Atque æquationis reperiendæ duæ radices erunt, AG & AI.

SOLVTIO.

§. 462. Sit AG = x, erit BG = $x - b$. Si autem in formula, quæ exprimit coſinum arcus dupli

$$cos.\, 2A = \frac{2cc - rr}{r}$$

2A notare ponatur arcum DE, notabit A arcum DF, eritque *cos.* $2A = a$, & $c = x - b$. His ergo ſubſtitutis æquatio obtinebitur

$$ra = 2x^2 - 4bx + 2bb - rr,$$

$$\text{vel} \quad xx - 2bx + bb - \frac{rr + ra}{2} = 0,$$

quantitatem x ex datis exprimens.

Scholion.

§. 463. Huius æquationis radices vt alia methodo quærantur, quam quæ a figura ſuppeditatur, nihil opus eſt: cui admodum facile applicabitur calculus. Quia r datur & BC, datur ex tabulis arcus DE, cuius coſinus eſt BC, & huius dimidius DF; poteſtque ex iisdem tabulis excerpi BG, coſinus huius arcus DF, ad eundem radium. Dato autem hoc coſinu datur $AG = AB + BG$, radicum vna; cumque ſit $BI = - BG$, ſi fiat $AI = - BG + AB$, altera quoque æquationis radix AI prodit, quæ negativa eſt in fig. 33, & affirmativa in 32.

§. 464. Calculus vero eſt huiusmodi. Sit $BD = 15$ & $BC = 9$. Si ergo fiat, vt BE ad BC, ita radius tabularis 1 ad coſinum tabularem; reperietur coſinus iſte $\frac{9}{15} = 0{,}6$, cui in tabulis proxime reſpondet arcus 53°, 8′ = DE. Huius arcus dimidius DF eſt 26°, 34′, cui in tabulis reſpondet coſinus = 0,8944, qui ad

radium

radium 15 reductus ſit $13{,}416 = BG$. Si ergo fuerit $AB = 24$, erit (fig. 32) $AG = 24 + 13{,}416 = 37{,}416$, & $AI = 24 - 13{,}416 = 10{,}584$. Si vero fuerit $AB = 9$, erit (fig. 33) $AG = 9 + 13{,}416 = 22{,}416$, & $AI = 9 - 13{,}416 = -4{,}416$.

§. 465. Poteſt autem ad æquationem huius problematis omnis æquatio quadratica reduci. Si enim in forma eius vniverſali $x^2 + Px + Q = 0$, ponatur $P = -2b$, & $Q = bb - \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}ra$, reperientur vtique b & a ex datis P & Q, ad r pro arbitrio ſumptum. Poteſt ergo r poni $= 1$, quemadmodum in tabulis ſumitur, eoque labor coſinus reducendi evitari. Erit tum ex æquationibus modo poſitis, $b = -\frac{1}{2}P$, & $a = 2bb - 2Q - 1 = \frac{1}{2}PP - 2Q - 1$: quibus repertis, reliqua ſecundum dicta abſolventur, lineis in contraria locatis, quorum valor negativus prodiit. Eruntque radicum ita repertarum affirmativæ illæ, quæ a puncto A cadunt verſus partem D, vt AG, negativæ, quæ cadunt verſus oppoſita, vt AI in figura 33; nam in figura 32 etiam AI affirmativa eſt.

PROBLEMA LIIII.

§. 466. *Iisdem poſitis, ſi* DF *ſit tertia pars minimi arcuum, quorum coſinus datur, invenire* AG. F. 34.

PRÆPARATIO.

§. 467. Tria ſunt puncta, quæ vt F terminant arcus, quorum quilibet eſt tertia pars alicuius eorum, qui per eundem coſinum dantur, atque coſinus BG diverſos reddunt. Tres ergo reperientur AG. Puncta autem peripheriæ, quæ præter F arcus illos terminant, obtinebuntur peripheria a puncto F in tres partes æquales diviſa. §. 445.

SOLVTIO.

§. 468. Sit iterum coſinus arcus, cuius DF tertia pars eſt, a. AB $= b$ & AG $= x$, erit BG, coſinus arcus DF, $= x - b$. Sique DF ponatur $=$ A, in formula pro angulo triplicando §. 435

$$cos.\ 3A = \frac{4c^3 - 3r^2c}{r^2}$$

erit $cos.\ 3A = a$, & $c = x - b$. His ergo in eam introductis, fiet

$$a = \frac{4(x-b)^3 - 3r^2(x-b)}{r^2}$$

$$\text{vel} \quad \begin{aligned} r^2a = 4x^3 - 12bx^2 + 12b^2x - 4b^3 \\ - 3r^2x + 3r^2b \end{aligned}$$

$$\& \quad \begin{aligned} x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3 = 0 \\ -\tfrac{3}{4}r^2x + \tfrac{3}{4}r^2b \\ -\tfrac{1}{4}r^2a. \end{aligned}$$

Scho-

Scholion.

§. 469. In hac æquatione cubica triplex eſt litteræ x valor, ac totidem ſunt radices, in omni æquatione cubica alia, quæ triſectione arcus ſolvi poteſt. Eæ quales ſint vt pateſcat, in æquatione cubica vniverſali hac:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$

fiat $P = -3b$, & hinc $b = -\frac{1}{3}P$

$Q = 3b^2 - \frac{3}{4}r^2, = \frac{1}{3}PP - \frac{3}{4}r^2,$

& hinc $\frac{3}{4}rr = \frac{1}{3}PP - Q$

vel $rr = \frac{4}{9}PP - \frac{4}{3}Q$

& $r = \frac{2}{3}\sqrt{(PP - 3Q)}$

porro $R = -b^3 + \frac{3}{4}r^2b - \frac{1}{4}r^2a$

vel $\frac{1}{4}rra = \frac{3}{4}rrb - b^3 - R$

& $rra = 3rrb - 4b^3 - 4R$

hinc $rra = -\frac{4}{9}P^3 + \frac{4}{3}PQ + \frac{4}{27}P^3 - 4R$

vel $rra = \frac{4}{3}PQ - \frac{8}{27}P^3 - 4R$

hinc $a = \dfrac{\frac{4}{3}PQ - \frac{8}{27}P^3 - 4R}{rr}.$

Patetque, quicunque fuerint coefficientes P, Q, R, ſemper reperiri valores linearum b, r, a, qui in conſtructionem ingrediuntur, eo caſu excepto, quo ob $3Q > PP$ radius ſit impoſſibilis. Si enim $3Q = PP$ radius equidem nullus prodit: id autem indicio eſt, omnes x apud idem punctum B terminari, in quod circulus quaſi contrahitur, ac quamvis radicum æquationis quantitati b æqualem eſſe.

§. 470. In omni ergo æquatione cubica, in qua PP non minus eſt quam $3Q$, tres inerunt radices, eæque æquales inter ſe, ſi fuerit $PP = 3Q$, alias inæquales. Reperientur autem radices illæ per triſectionem anguli hunc in modum. Sit b per regulas datas reperta 0,7, a ſit $= 0{,}6$ & $r = 1$. Erit arcuum, quorum coſinus eſt $a = 0{,}6$ minimus, 53°,8′ cuius tertia pars, quæ ponitur DF, eſt 17°, 42′, 40″. Sed tertia pars peripheriæ cum ſit = 120°, erunt reliqui arcus, qui eodem modo determinantur, 137°, 42′, 40″, & 257°, 42′, 20″. Eſt autem ex tabulis ad radium = 1

$\cos.\ 17°, 42', 40'' = 0{,}9525$ proxime

$\cos.\ 137°, 42', 40'' = -0{,}7397.$

$\cos.\ 257°, 42', 40'' = -0{,}2128$

His ergo cum $b = 0{,}7$ legitime coniunctis, fit prima radicum $0{,}7 + 0{,}9525 = 1{,}6525$. altera, $0{,}7 - 0{,}7397 = -0{,}0397$, tertia $0{,}7 - 0{,}2128 = 0{,}4872$. Suntque duæ harum radicum poſitivæ, tertia negativa. Eodem modo procedetur, ſi r non fuerit $= 1$, ſed calculus paullo longior erit.

§. 471. Cæterum in omnibus huius generis calculis probe tenendum eſt, ſi coſinus arcus quadrante non maioris poſitivus ſumatur, coſinum arcus quadrante maioris, ſed minoris tribus quadrantibus, fore negativum, & coſinum arcus maioris tribus quadrantibus, minoris autem quadrantibus quinque, iterum poſitivum, & ita porro.

PROBLEMA LV.

§. 472. *Iisdem nunc quoque poſitis, ſi* DF *ſit quarta pars minimi arcuum, quorum coſinus datur, invenire* AG. F. 34.

PRÆPARATIO.

§. 473. Iam quatuor reperientur puncta vt F, peripheria a puncto F quadrifariam ſecta, ac quatuor coſinus: ergo & AG quadruplex erit.

SOLVTIO.

§. 474. Coſinus arcus, cuius DF quarta pars eſt, ſit $= a$, & nunc quoque AB $= b$, AG $= x$, erit BG $= x - b$. Sique in formula pro angulo quadruplici ponatur A notare DF, formula illa

$$cos.\ 4A = \frac{8c^4 - 8r^2c^2 + r^4}{r^3}$$

mutabitur in hanc

$$r^3a = 8(x-b)^4 - 8r^2(x-b)^2 + r^4$$

vel

$$(x-b)^4 - r^2(x-b)^2 + \frac{r^4 - r^3a}{8} = 0$$

vnde ſit

$$\begin{aligned} x^4 - 4bx^3 + 6b^2x^2 - 4b^3x + b^4 &= 0 \\ - r^2x^2 + 2r^2bx - r^2b^2 & \\ + \frac{r^4 - r^3a}{8} & \end{aligned}$$

Scholion.

§. 475. Huius ergo æquationis quarti ordinis quatuor radices ſunt, per quadriſectionem arcuum reperiendæ. Quæ autem quarti ordinis æquationes ad hanc formam reduci poſſint, vt pateſcat: in æquatione huius ordinis vniverſali:

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

ponatur

$$P = -4b, \text{ erit } b = -\tfrac{1}{4}P$$

$$Q = 6b^2 - r^2 = \tfrac{6}{16}PP - r^2,$$

erit $rr = \tfrac{6}{16}PP - Q,$

& $r = \sqrt{(\tfrac{3}{8}PP - Q)}$

Porro $R = -4b^3 + 2r^2b = \tfrac{1}{16}P^3 - \tfrac{3}{16}P^3 + \tfrac{1}{2}PQ,$

Ergo $R = \tfrac{1}{2}PQ - \tfrac{1}{8}P^3$

Porro $S = b^4 - r^2b^2 + \dfrac{r^4 - r^3a}{8}$

vel $8S = 8b^4 - 8r^2b^2 + r^4 - r^3a$

hinc $8S = -\tfrac{1}{64}P^4 - \tfrac{1}{4}P^2Q + Q^2 - r^3a$

& $r^3a = Q^2 - \tfrac{1}{64}P^4 - \tfrac{1}{4}P^2Q - 8S$

$$a = \frac{Q^2 - \frac{1}{64}P^4 \frac{1}{4} - P^2Q - 8S}{r^3}$$

§. 476.

§. 476. Solvetur ergo per quadriſectionem anguli omnis æquatio quarti ordinis, in qua $R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3$, id eſt omnis æquatio huius formæ

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + (\tfrac{1}{2}PQ - \tfrac{1}{8}P^3)x + S = 0$$

dummodo $\surd(\frac{3}{8}PP - Q)$ quantitas impoſſibilis non fuerit, quod continget, ſi Q maior fuerit quam $\frac{3}{8}PP$. Ipſa autem ſolvendi methodus, poſtquam valores litterarum b, r, a per æquationes datas reperti ſunt, ab ea, qua æquationes tertii ordinis per triſectionem angulorum ſolvuntur, nihil differt.

§. 477. Eodem modo reperiri poteſt forma æquationis quinti ordinis, cuius radices inveniuntur arcu in quinque partes æquales diviſo, & forma æquationis ſexti ordinis, cuius radices diviſionem in ſex partes æquales exigunt, & ita porro. Verum quia calculus, ea determinans, quæ ad conſtructionem requiruntur, tanto complicatior fit, quo altior eſt æquationis ordo, alia methodo reductionem harum æquationum ad eas, quæ per ſectiones angulorum ſolvuntur, ſuſcipere præſtat, quæ ſequentibus nititur, quorum & alias ingens vſus eſt.

PROBLEMA LVI.

§. 478. *Æquationem, in qua quantitas incognita denotatur per* x, *in aliam, cuius incognita eſt* y, *ita transformare, vt, ſi in poſteriori æquatione detur* y, *detur &* x *prioris.*

SOLVTIO.

§. 479. Si data fuerit æquatio iſta:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

finge quamcunque æquationem aliam, in qua x & y occurrunt, atque præterea quantitates notæ vel pro re nata determinandæ: vt iſtam $x^2 + xy = aa$. Hanc æquationem cum ſuperiori per regulas §. 175. & 232. traditas ſic coniunge, vt excidat x. Si ergo ita producatur æquatio huius formæ

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0,$$

vel cuiuscunque alterius, data in hac æquatione y, dabitur & x per æquationem aſſumptam $x^2 + xy = aa$, quia in hac iam y datum notabit.

Scholion.

§. 480. Solutio generalis eſt: ſed raro ad transformationes iſtas æquationes complicatiores aſſumuntur. Suſcipitur autem æquationis transformatio, vel quia regulæ eas plene ſolvendi ad certas formas adſtrictæ ſunt, vel quia tentamina, quibus ad radices detegendas ſæpe opus eſt ob regularum defectum, ea re facilitantur.

Exemplum I.

§. 481. Sit æquatio propoſita

$$x^3 - px^2 - qx + r = 0$$

aſſumpta vero ſit $x = -y$, erit nova

$$-y^3 - py^2 + qy + r = 0$$

quæ a priori non differt niſi eo, quod ſigna terminorum, in quibus x occurrebat cum exponente impari, mutata ſint in contraria. Hæc autem æquatio ordinatur in iſtam

$$y^3 + py^2 - qy - r = 0$$

in qua iam ſigna coefficientium ad eas dignitates incogniti, quarum exponentes pares ſunt, & ipſius r, in contraria ſunt mutata. Æquationis ergo ita productæ radices y ſignis gaudent, quæ oppoſita ſunt illis, quibus gaudent radices x æquationis prioris: id eſt, radices affirmativæ prioris æquationis ſunt negativæ in poſteriori; & quæ ibi negativæ erant, hic ſunt affirmativæ.

Exemplum II.

§. 482. Sit propoſita æquatio

$$x^3 - 12x^2 - 21x + 136 = 0$$

aſſumpta vero ſit $x = \frac{m}{n}y$, erit æquatio nova

$\frac{m^3}{n^3}y^3$

$\frac{m^3}{n^3}y^3 - 12\frac{m^2}{n^2}y^2 - 21\frac{m}{n}y + 136 = 0$, cuius termini, ſi multiplicentur per $\frac{n^3}{m^3}$,

fit $$y^3 - 12\frac{n}{m}y^2 - 21\frac{n^2}{m^2}y + 136\frac{n^3}{m^3} = 0.$$

In hac iam æquatione, ſubſtitutis pro n & m numeris, complura præſtari poſſunt.

1) Poteſt effici, vt quicunque coefficiens fiat datæ magnitudinis. Vt ſi coefficientem ſecundi termini velim eſſe 2, facio $m = 6$ & $n = 1$, & hos numeros vbique in locum litterarum ſubſtituo. Sic terminus vltimus erit 17, ſi poſuero $n = 1$, & $m = 2$, quo fit $\frac{n^3}{m^3} = \frac{1}{8}$, ſed $\frac{136}{8} = 17$. Patet autem facile idem præſtari poſſe, ſi coefficientes æquationis propoſitæ non numeros notaverint, ſed alias quascunque quantitates.

2) Si in locum numerorum harum æquationum reponantur litteræ, a, b, c, ſcribanturque adeo æquationes hunc in modum

$$x^3 - ax^2 - bx + c = 0$$

& $$y^3 - \frac{n}{m}ay^2 - \frac{n^2}{m^2}by + \frac{n^3}{m^3}c = 0$$

patet numerorum in novam æquationem intro-

ducto-

ductorum $\frac{n}{m}a$, $\frac{n^2}{m^2}b$, $\frac{n^3}{m^3}c$, aliquos vel omnes integros fieri poſſe, ſi numeri a, b, c vel eorum aliqui fracti fuerint. Sit $a=\frac{f}{g}$, $b=\frac{h}{k}$, $c=\frac{p}{q}$, ſi ergo fiat $m=1$ & $n=gkq$, erit

$$\frac{n}{m}a=\frac{gkqf}{g}=kqf,$$

$$\frac{n^2}{m^2}b=\frac{g^2k^2q^2h}{k}=g^2kq^2h$$

$$\frac{n^3}{m^3}c=\frac{g^3k^3q^3p}{q}=g^3k^3q^2p.$$

3) Si vero numerorum a, b, c aliqui irrationales fuerint, huius formæ $a=f\sqrt{g}$, vel $b=\frac{h}{\sqrt{k}}$, vel cuiuscunque alterius, factorum quoque irrationalium aliqui, & ſi fieri poſſit, omnes tollentur, valoribus litterarum m & n convenienter aſſumptis, qua in re nulla difficultas eſt, quia nihil impedit, quo minus m vel n irrationalis ſumatur.

4) Generatimque ſi numeri a, b, c vel eorum aliqui compoſiti fuerint ex pluribus factoribus, horum aliqui eadem hac lege tolli poterunt ex quocunque coefficiente, vt ſi fuerit $b=4f$,

$b = 4f$, fiatque $m = 2$ & $n = 1$, erit coefficiens, qui in illius locum ſuccedit in nova æquatione, $\frac{4f}{4} = f$.

Exemplum III.

§. 483. Sit iterum propoſita æquatio

$$x^3 - ax^2 - bx + c = 0$$

aſſumpta vero ſit hæc $xy = e$, vel $x = \frac{e}{y}$, erit nova

$$\frac{e^3}{y^3} - \frac{ae^2}{y^2} - \frac{be}{y} + c = 0,$$

cuius termini ſi multiplicentur per y^3, fit

$$e^3 - e^2ay - eby^2 + cy^3 = 0$$

vel $$y^3 - \frac{eby^2}{c} - \frac{e^2ay}{c} + \frac{e^3}{c} = 0$$

& ſi pro arbitrio aſſumenda e fuerit $= c$,

$$y^3 - by^2 - acy + cc = 0$$

Huius æquationis radices dicuntur eſſe *reciprocæ* radicum æquationis datæ, fitque minima radicum æquationis productæ, ex radice maxima æquationis propoſitæ, & maxima huius ex illius minima, & ſic reliquæ, ſervato ordine magnitudinis.

Exem-

Exemplum IIII.

§. 484. Sit iam data æquatio

$$x^3 - ax^2 + bx + c = 0$$

atque aſſumpta hæc $x = y + f$

$$\begin{array}{lllllll} \text{erit } x^3 & = & y^3 & + 3fy^2 & + 3ffy & + f^3 \\ - ax^2 & = & & - ay^2 & - 2afy & - aff \\ + bx & = & & & + by & + bf \\ + c & = & & & & + c \end{array}$$

In æquatione ita producta

$$\begin{array}{lllll} y^3 & + 3fy^2 & + 3ffy & + f^3 & = 0 \\ & - ay^2 & - 2afy & - aff & \\ & & + by & + bf & \\ & & & + c & \end{array}$$

omnes radices prioris x data quantitate imminutæ ſunt vel auctæ, prout vel affirmativæ fuerunt vel negativæ. Sint radices x illius æquationis AB & AC affirmativæ, & AD negativa, ſitque AE $= f$; erit loco minoris affirmativarum AB, in nova æquatione affirmativa minor EB, maior vero EC loco maioris AC. Contra negativa radix ED in æquatione producta maior erit negativa prioris, ſi abſolute ſpectetur. F. 35.

§. 485. Mutata quantitate f, effici poteſt vt punctum E in B cadat, quo facto vna radicum ex æquatione evaneſcit, quia iam EB $= 0$. Si porro creſcat f, puncto E cadente inter B & C, radices duæ, quæ nempe terminantur apud puncta B & D, negativæ fiunt, ſuperſtite vna affir-

affirmativa, quam terminat C, quæ ipſa quoque evaneſcit, vbi porro creſcente f, E cadit in C. Si vero aſſumpta f etiam radicem AC exceſſerit, E extra C cadente, omnes æquationis radices fient negativæ.

§. 486. Sed ſi f negativa ſumatur, puncto E intra A & D cadente, radices affirmativæ, quæ terminantur apud B & C, augebuntur, imminuta negativa: ſi E ceciderit in D, evaneſcet radix negativa, atque ipſa quoque in affirmativam convertetur, ſi vlterius aucta f, iam E extra D ceciderit. Horum ergo quodvis, transformata ita æquatione, evenire poteſt, ſi f ſumatur pro arbitrio, quia radices æquationis ignotæ ponuntur.

§. 487. Subſtituta autem $y + f$ vel $y - f$ loco x in æquatione, cuius vnus alterve terminus deficit, æquatio completur. Patet enim æquationem ita productam ex ea, quæ in hoc exemplo data fuit,

$$x^3 - ax^2 + bx + c = 0$$

plenam fore etiamſi in hac a vel b fuerit $= 0$, vel vtrumque. Hoc modo in antecedentibus §. 462. completæ ſunt æquationes, quæ per ſectiones arcuum ſolvi poterant.

§. 488. Si vero f aſſumatur debitæ magnitudinis, viciſſim ex æquatione propoſita quilibet terminus tolli poteſt. Si ſumatur f ita, vt

ſit

ſit $3f - a = 0$, vel $f = \frac{1}{3}a$, tolletur in caſu præſenti terminus ſecundus, evaneſcente coefficiente quantitatis y^2. Si fuerit $3ff - 2af + b = 0$, tolletur terminus tertius, evaneſcente eius coefficiente, & ſi fuerit $f^3 - aff + bf + c = 0$, quartus terminus evaneſcet, atque æquatio hac transformatione producta erit huius formæ

$$y^3 + Py^2 + Qy = 0$$

quæ diviſa per y ad gradum inferiorem deprimetur. Verum f, per quam quartus æquationis terminus tollitur, per æquationem cubicam demum datur: ſique plures ſint æquationis termini, æquationes quibus reperitur f, quo tollitur aliquis terminorum quarto poſterior, cubica etiam altiores ſunt. Tertius autem æquationis terminus, etſi tolli ſemper poſſit, reperto ex æquatione quadratica $3ff - 2af + b = 0$, f ad id vſurpando, plerumque tamen ſecundi tantum termini ſublatio vtilis eſt, ad quem f per æquationem ſimplicem huius formæ $nf = A$, in omni caſu datur.

Corollarium.

§. 489. Æquationes ſimplici altiores, ſi in iis tollatur terminus ſecundus, ad has formas redeunt:

$$y^2 + P = 0$$
$$y^3 + Py + Q = 0$$
$$y^4 + Py^2 + Qy + R = 0$$
$$y^5 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$$
$$y^6 + Py^4 + Qy^3 + Ry^2 + Sy + T = 0$$
$$y^7 + Py^5 + Qy^4 + Ry^3 + Sy^2 + Ty + V = 0$$

Æquationes autem §. 435, per quas dantur coſinus arcuum ſimplicium ex coſinu eorum, qui ſimplicium illorum multipli ſunt ſecundum quoſcunque numeros integros, ſi in iis coſinus anguli multipli dicatur a, & coſinus ſimplicis y, hæ fiunt

I. $y - a = 0$
II. $yy - \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}ra = 0$
III. $y^3 - \frac{3}{4}r^2y - \frac{1}{4}r^2a = 0$
IIII. $y^4 - r^2y^2 + \frac{1}{8}r^4 - \frac{1}{8}r^3a = 0$
V. $y^5 - \frac{5}{4}r^2y^3 + \frac{5}{16}r^4y - \frac{1}{16}r^4a = 0$
VI. $y^6 - \frac{3}{2}r^2y^4 + \frac{9}{16}r^4y^2 - \frac{1}{32}r^5a = 0$
VII. $y^7 - \frac{7}{4}r^2y^5 + \frac{7}{8}r^4y^3 - \frac{1}{64}r^6y - \frac{1}{64}r^6a = 0$

vbi numeri romani notant eos, per quos arcus multiplicati ſunt.

Comparatis iam his æquationibus cum ſuperioribus, facile perſpicitur, quænam æquationum illarum per ſectiones arcuum ſolvi poſſint. Sic æquationis quinti gradus, poſtquam ſecundus eius terminus eliminatus eſt,

$$y^5 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$$

radi-

radices reperientur, arcu in quinque partes æquales ſecto, ſi fuerit vel ſumi poſſit $P = -\frac{5}{4}rr$, $Q = 0$, $R = \frac{5}{16}r^4$ & $S = -\frac{1}{16}r^4a$. Neceſſe ergo primo eſt in æquatione, præter ſecundum, etiam quartum terminum deficere, deinde quia $rr = -\frac{5}{4}P$, & hinc $r = \sqrt{-\frac{5}{4}P}$, neceſſe eſt coefficientem P negativum eſſe; tertio, debet eſſe $R = \frac{1}{5}PP$, quod reperitur ſi in $R = \frac{5}{16}r^4$, loco rr ſcribatur $-\frac{4}{5}P$, & hinc $\frac{16}{25}PP$ loco r^4. Ea ſi ſint, reperietur ſemper $S = -\frac{1}{16}r^4a, = -\frac{1}{25}PPa$, & hinc $a = -\frac{25S}{PP}$.

Æquationis ergo, quæ ita ſolvi poteſt, hæc forma erit:

$$y^5 - Py^3 + \tfrac{1}{5}PPy \mp S = 0,$$

quæ quidem ſatis reſtricta eſt, ſed tamen oſtendit, æquationis quinti ordinis quinque eſſe poſſe radices reales. Eodem vero modo conſideratis æquationibus ſuperiorum ordinum generatim, perſpicietur, cuiuscunque æquationis tot eſſe poſſe radices reales, quotus eſt æquationis ordo.

Scholion.

§. 490. Sed ſi tot numero eſſe poſſunt æquationis radices reales, vel ex antecedentibus apparet, non ſemper eſſe, cum & quadraticæ æquationes occurrerint, quarum radix realis prorſus nulla eſt. Detegendæ tamen ſunt æquationis cuiuscunque radices, ſiquidem problema plane ſolutum velimus, reales certe, &, ſi fieri poſſit, etiam imaginariæ: quod eo modo præſtare, quemadmodum quadraticarum æquationum radices deteguntur, vel earum quæ per ſectiones arcuum ſolvuntur, vt ſcilicet radices vniverſaliter exprimantur ex coefficientibus æquationis, etſi nemo adhuc plane docuerit; multum tamen rei intricatæ lucis adfundet generalis æquationum conſideratio, quam aggredimur.

SECTIO VIIII.

DE

RADICIBVS ÆQVATIONVM GENERATIM.

THEOREMA III.

§. 491.

Si A *factum denotet, ex certis quibuscunque factoribus ſimplicibus, qui ſcilicet in alios ſimpliciores dividendo reſolvi non poſſint; non producetur* A *& ex aliis factoribus ſimplicibus, a prioribus diverſis.*

DEMONSTRATIO.

Sint inter factores ſimplices facti A, hi duo α & β; ſique A dividatur per α, prodeat a, ſimplex vel ex aliis factoribus multiplicando compoſitus; ſi vero A dividatur per β, prodeat b, itidem vel ſimplex vel compoſitus: erit $\alpha a = \beta b$, quia vtrumque $= A$. Hinc $\alpha = \frac{\beta b}{a}$. Quare cum α inſtar numeri integri ſit, & $\frac{\beta b}{a}$ integer erit, divideturque adeo βb per a, quod fieri non poſſe niſi a in duos factores ſolvi queat, quorum alter dividat β alter vero b, facile patet, ſi inter eos factores & vnitas admittatur, & β & b. Sint factores iſti m, n, erit $mn = a$, & $\alpha = \frac{\beta}{m} \times \frac{b}{n}$, atque & $\frac{\beta}{m}$ integer erit & $\frac{b}{n}$. Cum ergo β ſimplex ſit, erit vel $m = 1$, vel $m = \beta$.

Sit 1°) $m = 1$, erit $\alpha = \beta \times \frac{b}{n}$, id eſt $\beta \times \frac{b}{n}$ erit æqualis ſimplici α, quod eſſe non poteſt, niſi $\frac{b}{n} = 1$, & hinc $b = n$. His autem in $\alpha a = \beta b$ introductis, fit $\alpha n = \beta n$, hinc $\alpha = \beta$, atque diviſores α, β qui diverſi eſſe ponebantur, non deprehenduntur diverſi.

Sit 2°) $m = \beta$, erit $\frac{\beta}{m} = 1$, & $a = mn = \beta n$. Sed $\alpha = \frac{b}{n}$, ſive $\alpha n = b$. His vero iterum in $\alpha a = \beta b$ introductis, fit $\alpha \beta n = \beta \alpha n$; quo pateſcit neque hoc ſumpto, A in diverſos factores ſimplices ſolvi.

Corollarium.

§. 492. Ergo & æquatio quæcunque huius formæ

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + q = 0,$$

ex certis tantum æquationibus ſimplicibus $x + \alpha = 0$, $x + \beta = 0$ *&c.* componetur, non ex aliis atque aliis. Manifeſtum autem eſt, numerum harum æquationum ſimplicium maiorem eſſe non poſſe, quam eſt exponens ſummæ dignitatis, ad quam x in æquatione adſcendit, vel index ordinis n, ad quem æquatio pertinet. Minor vero quam eſt exponens iſte, numerus æquationum ſimplicium, ex quibus data compoſita eſt, quæque viciſſim ex ea dividendo elici poſſunt, vtique eſſe poterit, ſiquidem α, β in iis æquationibus notare ponuntur quantitates reales, ſive rationales eæ fuerint, ſive irrationales. Non enim quælibet quantitas diviſores admittit, & ſi admittat, ii diviſo-

diviſores non neceſſario datæ formæ ſunt, vt $x+\alpha$. Verum ſi ea litteris α, β, γ æquationum ſimplicium poteſtas tribuatur, qua & quantitates impoſſibiles comprehendant, tot ſemper erunt æquationes ſimplices, quot vnites in numero n. Semper enim imaginari licet aliquod inſtar quantitatis, quod additum ad quantitatem realem, vel ad nihilum, reddat α, quod porro iunctum cum x, efficiat vt æquatio propoſita per $x+\alpha$ poſſit dividi.

Scholion.

§. 493. Cæterum ex hactenus dictis facile perſpicitur, ſi in æquatione, in qua coefficientes litteræ, quæ notat incognitum, ſunt numeri, in locum litteræ ſubſtituatur aliqua radicum æquationis, æquationem evaneſcere debere, numeris ita productis ſeſe per contraria ſigna deſtruentibus: &, ſi numeris aliis atque aliis in locum litteræ illius ſubſtitutis, incidamus in aliquem, quo æquatio ita deſtruitur, id indicio eſſe, numerum eum eſſe aliquam ex radicibus æquationis. Neque enim æquatio aliud vult, quam vt pro x ſumatur numerus, qui datis ex modo, qui per ſigna indicatur, iunctus, efficiat, vt prius æquationis membrum æquale fiat poſteriori, vel vt id, quod oritur omnibus æquationis terminis ad eandem partem locatis, ſit nihilum. Id ergo, ſi numerus aliquis loco litteræ ſubſtitutus efficiat, eum radicem eſſe neceſſe eſt.

Sic in æquatione

$$x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$$

ſi ponatur $x = 5$, prius æquationis membrum mutatur in $125 - 125 - 80 + 80$, quod nihilum eſſe vltro apparet; quare 5 eſt vna radicum huius æquationis.

Neque difficilius perſpicitur, idem verum fore, ſi coefficientes litteræ illius x, quæ notat incognitum, non fuerint numeri, ſed litteræ alia quæcunque quanta notantes, quæ ſemper eo modo compoſitæ, quem æquatio imperat, nihilum reddent, ſi pro x aliqua radicum ſumpta fuerit. Verum omnis quantitas per numerum exprimi poteſt; eſtque numerorum compoſitio, quæ hic requiritur, plerumque multo facilior ſyntheſi geometrica, ſive deſcriptione figurarum. Et, poſtquam coefficientes ad numeros reducti ſunt, ſæpe, per tentamina ſecundum hæc inſtituta, in radices æquationum rationales ſatis prompte incidimus.

THEOREMA IIII.

§. 494. *Æquatione in ſimplices reſoluta, quarum multiplicatione conflatur, quælibet harum continet vnam radicum æquationis. Et, ſi* a *fuerit aliqua radicum æquationis, cuius inco-*

incognita deſignatur per x, *dividetur ea æquatio per* x — a.

DEMONSTRATIO.

Sit propoſita æquatio quæcunque

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

quæ multiplicando compoſita ſit ex ſimplici $x - a = 0$, & aliis, atque in has viciſſim reſolvi poſſit. Diviſa ergo æquatione illa per $x - a$, ſi prodeat quotus Q, erit

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x - a)\,Q.$$

Hic vero, ſi ponatur $x = a$, fit $x - a = 0$, & hinc $(x - a)\,Q = 0\,Q = 0$, Ergo $x^3 + px^2 + qx + r$ in nihilum convertitur, quare a æquationis propoſitæ radix erit §. 493. quod erat primum.

Ad ſecundum, ponatur $x = a$, atque eadem æquatione per ſimplicem $x - a$ diviſa, quotum prodiiſſe Q, remanente R, in quo x non ineſt, (ſemper enim diviſio eousque produci poteſt) erit $x^3 - px^2 + qx - r = (x - a)\,Q + R$. Sed $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, & quia $x = a$, & hinc $x - a = 0$, erit quoque $(x - a)Q = 0$, & hinc $R = 0$. Quare æquatio per $x - a$ dividetur absque reſiduo.

Corollarium I.

§. 495. Hinc ſequitur numerum æquationum ſimplicium, in quas data quæcunque dividendo

videndo ſolvi poteſt, vel ſoluta intelligi, ſemper æqualem eſſe numero radicum æquationis. Adeoque in qualibet æquatione ineſſe radices tot, quot vnitates habet exponens ſummæ dignitatis, ad quam incognita æquationis adſcendit.

Corollarium II.

§. 496. Vnde &, ſi æquatio reſolvatur in alias, ſive ſimplices fuerint, ſive non ſimplices, quælibet harum æquationum tot æquationis reſolutæ radices continebit, quot vnitates inſunt in indice ordinis eius, ſic vt harum æquationum radicibus exhibitis, æquationis quoque ita reſolutæ radices exhibeantur. Sit æquatio ſeptimi ordinis, quæ dividendo ſolvatur in vnam ordinis tertii, & in duas ſecundi. Tres ergo radices æquationis ordinis tertii, cum quatuor iis, quarum duæ ex vna æquatione ordinis ſecundi eliciuntur, reliquæ duæ ex altera, eædem erunt cum ſeptem radicibus æquationis ordinis ſeptimi.

Scholion.

§. 497. Radix affirmativa in æquatione ſimplici, per quam datur, ſemper afficitur ſigno $-$, negativa ſigno $+$. Sit $x = a$, erit a radix affirmativa, cum æquatio ſimplex qua exhibetur, ſit $x - a = 0$. Sit $x = -a$, erit $-a$ radix negativa, quæ datur per æquationem

nem ſimplicem $x + a = 0$, vtraque harum radicum, ſiquidem rationalis ſit, vel numerus integer eſt, aut quantitas per modum numeri integri expreſſa, vel numerus fractus, aut quantitas, cuius expreſſio formam fracti habet.

§. 498. Porro etſi omnis æquatio eo reduci poſſit, vt ſummæ dignitatis incogniti præter vnitatem coefficiens nullus ſit, hic tamen eæ quoque conſiderabuntur, in quibus ea dignitas per numerum multiplicata eſt vel quantitatem, vnitate maiorem vel minorem. Poteſt autem omnis æquatio, in qua coefficientes litteræ incognitum notantis fracti ſunt, ad eiusmodi æquationem eo effectu reduci, vt iam coefficientes illi omnes ſint integri. Sit

$$x^2 - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{4}{5}x + 9 = 0$$

erit, ſublatis denominatoribus,

$$15x^2 - 10x^2 - 12x + 135 = 0.$$

Numeris his, vel quantitatibus, quæ eorum loco ſunt, ſi aliquis diviſor communis fuerit, diviſione æquatio concinnior reddetur, quod factum eſſe, ſemper ponemus.

THEOREMA V.

§. 499. *Si primus æquationis legitime ordinatæ terminus a multiplicatore purus fuerit; reliquorum autem terminorum coefficientes, & terminus vltimus, fuerint rationales & integri,*

gri, nulla radicum æquationis numerus rationalis fractus erit, vel quantitas forma fracti rationalis expreſſa.

DEMONSTRATIO.

Æquatio

$$mx^3 + px^2 + qx + r = 0$$

cuius radices vel integri eſſe poſſunt, vel fracti §. 498. multiplicetur in ſimplicem radicis fractæ, quæ ad minorem denominationem reduci non poſſit $x + \frac{e}{c} = 0$, prodibit

$$\begin{aligned} mx^4 &+ px^3 + qx^2 + rx \\ &+ \frac{em}{c}x^3 + \frac{ep}{c}x^2 + \frac{eq}{c}x + \frac{er}{c} = 0 \end{aligned}$$

cuius æquationis coefficientes $p + \frac{em}{c}$, $q + \frac{ep}{c}$, $r + \frac{eq}{c}$, $\frac{er}{c}$ integri non erunt, niſi $\frac{em}{c}$, $\frac{ep}{c}$, $\frac{eq}{c}$, $\frac{er}{c}$ fuerint integri, quia eorum partes reliquæ p, q, r integri eſſe ponuntur. Verum $\frac{em}{c}$ integer non erit, niſi c diviſerit m, quia e & c diviſorem communem nullum agnoſcere ponuntur. Et eodem modo oſtendetur, c dividere debere p, & q & r, ſiquidem

dem & coefficientes reliqui, vnacum termino vltimo, in integros convertendi ſint. Id autem ſi ſit, c communis terminorum m, p, q, r diviſor erit, quod eſſe non poteſt, quia æquatio ponitur concinnata eſſe, diviſoribus illis communibus, ſi qui fuerint, ſublatis. Per omnem ergo multiplicationem, quæ in æquationem radicem fractam infert, fracti quoque fiunt aliqui coefficientium æquationis, qui ſi integri ſint reddendi, primus æquationis terminus multiplicandus eſt. Quare, ſi æquatio a fractionibus libera, atque primus eius terminus purus fuerit, nulla eius radicum fractus rationalis erit.

Scholion.

§. 500. Sit $\frac{e}{c}$ radix æquationis cuiuscunque $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ in qua ergo aliqui coefficientium p, q vel r fracti erunt, ſi $\frac{e}{c}$ vere fractus fuerit; dividetur æquatio illa per ſimplicem $x - \frac{e}{c} = 0$, id eſt, ſi pro r ſcribatur $\frac{et}{c}$, ſumpto t eo, vt fiat $r = \frac{et}{c}$, quod fieri ſemper poteſt, $x^3 + px^2$ $+ qx$

$+qx+\frac{et}{c}$ dividetur per $x-\frac{e}{c}$. Multiplicetur & æquatio dividenda & diviſor per idem c. Dividetur & æquatio ita producta $cx^3+px^2+qx+et=0$ per ſimplicem $cx-e=0$. Sique omnes termini æquationis multiplicentur per quemcunque factorem, vt ſcilicet tollantur denominatores coefficientium, ſi qui fuerint, vel in alium quemcunque finem, æquatio ea multiplicatione producta, tamen per $cx-e=0$ dividetur. §. 120. Quare omnis æquatio, ſive purus a factore fuerit primus eius terminus, ſive non, per æquationem ſimplicem formæ $cx-e=0$ dividetur, quæ aliquam eius radicem exhibet, ſi reducatur in $x=\frac{e}{c}$. Poteritque, ſi e & c rationales fuerint, ſemper æquatio ita reduci, vt e & c etiam integri fiant, quamvis fractos eſſe nihil impediat, vel etiam irrationales aut impoſſibiles.

§. 501. Solent autem ad evitandas ambages duæ potius radicum formæ conſiderari, quæ ex vniverſali fiunt ponendo vel c vel $e=1$, iſtæ $x-e=0$, & $cx-1=0$, quarum loco hic ſcribetur $x-a=0$ vel $x-b=0$, & ita porro, atque $0=1-ax$, $0=1-bx$, $0=1-cx$, vel quid ſimile.

PROBLEMA LVII.

§. 502. *Modos, quibus radices inſunt in æquationibus, per harum compoſitionem detegere.*

SOLUTIO.

§. 503. Sint 1°) æquationis radices a, b, c, d, e &c. quarum quamvis indifferenter denotet x. Formatis ergo æquationibus ſimplicibus iſtis $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, $x-e=0$, orietur æquatio radices has continens, æquationibus ſimplicibus in ſe ductis. §. 494. Multiplicata autem $x-a$ per $x-b$, quod hinc prodit per $x-c$ & ita porro, æquationes fiunt

I.

$$\begin{array}{llll} xx & -ax & +ab & =0 \\ & -bx & & \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -ax^2 & +abx & -abc & =0 \\ & -bx^2 & +acx & & \\ & -cx^2 & +bcx & & \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -ax^3 & +abx^2 & -abcx & +abcd & =0 \\ & -bx^3 & +acx^2 & -abdx & & \\ & -cx^3 & +bcx^2 & -acdx & & \\ & -dx^3 & +adx^2 & -bcdx & & \\ & & +bdx^2 & & & \\ & & +cdx^2 & & & \end{array}$$

IIII.

$$\begin{array}{llllll}
x^5 & - ax^4 & + abx^3 & - abcx^2 & + abcdx & - abcde = 0 \\
 & - bx^4 & + acx^3 & - abdx^2 & + abcex & \\
 & - cx^4 & + bcx^3 & - acdx^2 & + abdex & \\
 & - dx^4 & + adx^3 & - bcdx^2 & + acdex & \\
 & - ex^4 & + bdx^3 & - abex^2 & + bcdex & \\
 & & + cdx^3 & - acex^2 & & \\
 & & + aex^3 & - bcex^2 & & \\
 & & + bex^3 & - adex^2 & & \\
 & & + cex^3 & - bdex^2 & & \\
 & & + dex^3 & - cdex^2 & &
\end{array}$$

§. 504. Si vero 2°) radices æquationis fuerint $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$ &c. quæ exhibentur per æquationes ſimplices $0 = 1 - ax$, $0 = 1 - bx$, $0 = 1 - cx$, $0 = 1 - dx$, $0 = 1 - ex$, æquationes, quæ duas harum radicum, tres, quatuor, pluresve continent, ſimili multiplicatione producentur iſtæ:

I.

$$\begin{array}{lll}
0 = 1 & - ax & + abx^2 \\
 & - bx &
\end{array}$$

II.

$$\begin{array}{llll}
0 = 1 & - ax & + abx^2 & - abcx^3 \\
 & - bx & + acx^2 & \\
 & - cx & + bcx^2 &
\end{array}$$

III.

$$\begin{array}{llllll}
0 = 1 & -ax & +abx^2 & -abcx^3 & +abcdx^4 \\
 & -bx & +acx^2 & -abdx^3 & \\
 & -cx & +bcx^2 & -acdx^3 & \\
 & -dx & +adx^2 & -bcdx^3 & \\
 & & +bdx^2 & & \\
 & & +cdx^2 & &
\end{array}$$

IIII.

$$\begin{array}{llllll}
0 = 1 & -ax & +abx^2 & -abcx^3 & +abcdx^4 & -abcdex^5 \\
 & -bx & +acx^2 & -abdx^3 & +abcex^4 & \\
 & -cx & +bcx^2 & -acdx^3 & +abdex^4 & \\
 & -dx & +adx^2 & -bcdx^3 & +acdex^4 & \\
 & -ex & +bdx^2 & -abex^3 & +bcdex^4 & \\
 & & +cdx^2 & -acex^3 & & \\
 & & +aex^2 & -bcex^3 & & \\
 & & +bex^2 & -adex^3 & & \\
 & & +cex^2 & -bdex^3 & & \\
 & & +dex^2 & -cdex^3 & &
\end{array}$$

§. 505. His autem atque huiusmodi æquationibus reliquis conſideratis, pateſcit:

1°. Si æquatio completa ſit, dignitatibus x^0, x^1, x^2, x^3 & ita porro ordine ad ſummam aſcendente, vel a ſumma deſcendente, vel, ſi dignitates forte deficientes ſuppleantur; numerum radicum ſemper vnitate minorem eſſe numero terminorum æquationis, vel dignitatum incognitæ x diverſarum, quæ in æquatione inſunt, ſiquidem x^0 ſimul in numerum eum adſciſcatur. Atque hinc numerum radicum æqualem eſſe numero combinationum, quæ fieri poſſunt, quemlibet æquationis terminum iungendo proximo, vel cuiuslibet termini ſignum cum ſigno termini proximi.

2°. Si iam in vtriusque generis §. 503. 504. æquationibus primus terminus dicatur, qui primo loco ſcriptus eſt, ſecundus qui ſecundo, & ita porro: coefficientem primi termini ſemper eſſe 1. Per vnitatem enim multiplicatur altiſſima incogniti dignitas in æquatione, ex ſimplicibus formæ $x-a=0$ conflata, & x^0 in æquatione, cuius ſimplices formam habent $0=1-ax$.

3°. Coefficientem ſecundi termini eſſe ſummam algebraicam litterarum a, b, c, d, e, quæ indicant radices in æquationibus prioris generis, & denominatores fractionum, quibus radices æquationum poſterioris generis exprimuntur, ad numeratorem $=1$.

4°. Coefficientem termini tertii eſſe ſummam algebraicam eorum, quæ fiunt binis quibusvis harum litterarum in ſe ductis.

5°. Coefficientem termini quarti eſſe ſummam algebraicam factorum, ex tribus quibusvis harum litterarum.

6°.

6°. Coefficientem termini quinti, quatuor quibusvis earundem litterarum in ſe ductis, oriri.

7°. Vbique autem vſurpanda eſſe ſigna ea, quibus litteræ hæ afficiuntur in æquationibus ſimplicibus formæ $x - a = 0$, vel $0 = 1 - ax$, quarum multiplicatione æquationes conflantur, vel quæ debentur factis, ſi hæ litteræ illis ſignis affectæ ſumantur.

Scholion.

§. 506. Quod ad ſignum attinet ipſius coefficientis cuiuslibet termini, qui oritur iis, quæ modo deſcripta ſunt, in ſummam collectis; quamvis id ſignum in quolibet caſu ſeſe vltro offerat: iuvabit tamen modum, quo ea ſigna prodeunt, preſſius conſideraſſe.

§. 507. Quæcunque autem ſint æquationis ſigna, ſi multiplicetur per ſimplicem, quæ radicem negativam continet, hoc modo:

$$\begin{array}{l}
2x^5 + 4x^4 - x^3 - 5x^2 + 9x - 6 = 0 \\
4x + 3 = 0 \\
\hline
+8x^6 + 16x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 24x \\
\qquad\quad + 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 27x - 18 \\
\hline
+8x^6 + 22x^5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + 21x^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + 8x^4 - 23x^3 \;.\;.\;.\;.\; + 3x - 18
\end{array}$$

duæ inter multiplicandum producuntur ſignorum ſeries, plane geminæ cum inter ſe, tum ſeriei ſignorum æquationis multiplicatæ, ſed quarum poſterior vno loco magis verſus dextram promota eſt; quo fit, vt quodlibet ſignum poſterioris ſeriei ſit idem cum ſigno ſeriei prioris, quod illud vno loco præcedit.

§. 508. Si vero per æquationem ſimplicem radicis affirmativæ multiplicetur aliqua æquatio, ſecundum hoc ſchema:

$$\begin{array}{l}
2x^5 + 4x^4 + x^3 - 5x^2 - 9x - 6 = 0\\
4x - 3 = 0\\ \hline
+8x^6 + 16x^5 + 4x^4 - 20x^3 - 36x^2 - 24x\\
\qquad - 6x^5 - 12x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 27x + 18\\ \hline
+8x^6 + 10x^5 \ldots\ldots\ldots - 21x^2 \ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots - 8x^4 - 23x^3 \ldots\ldots + 3x + 18
\end{array}$$

ſigna prioris ſeriei, inter multiplicandum productæ, nunc quoque ſignis ſeriei multiplicatæ gemina ſunt; poſterioris autem ſeriei ſigna illis ita adverſantur, vt quodlibet huius ſeriei ſignum contrarium ſit ſigno prioris, quod illud vno loco præcedit.

§. 509. Ex ſignis iam harum ſerierum, atque ex magnitudine terminorum, quorum alter imminet alteri, colligenda ſunt ſigna æquationis multiplicando productæ, per notas additionis regulas. Patet autem in ſignis iſtis locandis ſemper initium faciendum eſſe a ſigno primi termini prioris ſeriei, qui in his exemplis

plis eſt $8x^6$, atque deinde, locando ſigna prioris ſeriei, pergendum donec ad terminum deveniatur, cui maior cum contrario ſigno ſubſcriptus eſt. Is ſi occurrat, deſerta ſerie priori, deinde ex ſerie poſteriori ſigna petenda erunt, donec ad terminum deveniatur, cui maior in ſerie ſuperiori imminet. Superioris enim iam ſeriei ſigno, loco inferioris, ſumpto, quæ id deinceps ſequuntur ſigna ex eadem ſerie petenda erunt, & ita alternatim; obicem ſemper ponente ea terminorum conditione quam diximus. Deſinendum autem tandem erit in ſigno inferioris ſeriei, cui in ſerie ſuperiori nullus terminus imminet, qui id mutare poſſit. Hæc vt clarius pateſcerent, æquatio §. 507 & 508. multiplicatione producta in duabus lineis ſic ſcripta eſt, vt in priori ſint eius termini, quorum ſigna e priori ſerie petita ſunt, in poſteriori autem illi, quorum ſigna petita ſunt ex ſerie inferiori.

§. 510. Hinc autem ſequitur, quotcunque tales transgreſſiones ex ſerie in ſeriem æquatio multiplicanda exigat; numerum tamen earum, quæ ex ſerie priori faciendæ ſunt in poſteriorem, ſemper vnitate maiorem eſſe, numero regreſſuum e poſteriori in priorem.

§. 511. Cæterum cum tranſitus ex ſerie in ſeriem fieri numquam debeat, niſi termini ſerierum,

rierum, quæ additæ æquationem multiplicatam exhibent, illi, quorum alter ſcriptus eſt ſub altero, ſigna contraria habuerint: ſi æquatio multiplicetur per ſimplicem radicis negativæ, duo hi erunt ſignorum ordines, apud quos tranſitus fieri ſolos debet:

I.	II.
A + — C	A + — C
D + + B	D — + B
vel	vel
A — + C	A — + C
D — — B	D + — B

Ponitur transeundum eſſe vel a ſigno A ad ſignum B, vel a D ad C. Signum ergo A cum ſigno B idem erit, quia multiplicatoris ſigna ponuntur eſſe + +: ſignum vero C, cum adverſum ſit ſigno B, idem quoque ſigno A contrarium erit. Sed D vel convenire poteſt cum ſigno B, vt ſub I, vel ei adverſari, vt ſub II.

§. 512. Si autem æquatio multiplicetur per ſimplicem radicis affirmativæ, cuius adeo ſigna ſunt + —, ordo ſignorum in iis ſerierum locis, apud quæ tranſitus fieri debet, erit alteruter ex iſtis:

III.	IIII.
A + + C	A + + C
D — — B	D + — B
vel	vel
A — — C	A — — C
D + + B	D — + B

Signum B, cum per naturam multiplicationis huius adverſum ſit ſigno A, ſitque, quia tranſitus ponitur faciendus ab A ad B, vel a D ad C, & C ſigno B adverſum, erit C idem cum ſigno A. Sed D vel idem erit cum ſigno B, vel ei adverſum.

§. 513. Si iam duæ diſtinguantur binorum ſignorum ſucceſſiones, prima ſignorum ſimilium + + vel — —, altera vero ſignorum adverſorum + — vel — +, ordinibus ſignorum, apud quos ſolos tranſitus ex ſerie in ſeriem fieri debet, conſideratis pateſcit, per omnem tranſitum ab A ad B vel a D ad C, ſucceſſionem ſignorum in oppoſitam mutari: atque in deſcenſu quidem ab A ad B, quo in locum ſigni C ſuccedit B, ex + — fieri + +, & ex — + fieri — — in ordinibus I, & II, atque ex + +, fieri + —, & ex — — fieri — + in ordinibus III & IIII. Contra ſi aſcendatur a D ad C, quo in locum ſigni B ſuccedit C, ex + + fieri + —, & ex — — fieri — +

— + in ordinibus I & III, atque ex + — fieri + +, & ex — + fieri — — in ordinibus II & IIII.

THEOREMA VI.

§. 514. *Si æquatio quæcunque multiplicetur per ſimplicem radicis realis negativæ; numerus ſucceſſionum ſimilium ſignorum in æquatione producta, minimum vnitate maior ſit numero ſucceſſionum ſimilium ſignorum in æquatione multiplicata. Sed magis quam pro numero transgreſſionum ex ſerie in ſeriem, quibus ſecundum expoſita determinantur ſigna æquationis productæ, harum ſucceſſionum numerus in æquatione iſta, numerum ſimilium ſucceſſionum in æquatione multiplicata, excedere non poteſt. Si vero æquatio multiplicetur per ſimplicem radicis affirmativæ; idem de numero ſucceſſionum ſignorum contrariorum verum eſt.*

DEMONSTRATIO.

Cum inter multiplicandum duæ producantur ſignorum ſeries, ex quibus, atque ex magnitudine terminorum iis ſignis adfectorum ſigna æquationis productæ colligenda ſunt: ſint primo illæ ſeries ad eum caſum, quo multiplicatoris ſigna ſunt + +, iſtæ:

$$+\overset{a}{+},\ -\overset{b}{-}\overset{c}{-},\ +-,\ +-+,\ \overset{d}{-}-,\ +$$

$$+\underset{a}{,}\ +-\underset{b}{-}\underset{c}{,}\ -+,\ -+-,\ +-\underset{d}{,}\ -+$$

Signen-

Signentur omnes ſucceſſiones ſimilium ſignorum + + vel — — per literas a, b, c, d in ſerie priori, & per *a*, *b*, *c*, *d* in poſteriori. Erit numerus litterarum in id adhibendarum æqualis numero ſucceſſionum + + vel — — in æquatione multiplicata. Signentur etiam loca, apud quæ ex ſerie in ſeriem transeundum eſt, ſigna æquationis poſituro, quæ multiplicando producitur. Sint ea, apud quæ ſcripta ſunt (,) ea lege, vt indicent, a ſigno quod huic commati adiacet ad ſiniſtram in vna ſerie, transeundum eſſe ad ſignum, quod ei ad dextram adiacet in ſerie altera. Erunt ordines ſignorum apud loca ita ſignata non alii, quam I & II §. 511. quare comma non cadet inter ſigna ſimilia in prima ſerie; in altera vero vel inter ſimilia ſigna cadere poterit, vt apud *a*, *c*, *d* vel inter contraria. Per omnem ergo deſcenſum aliqua ſucceſſionum + — vel — +, quæ inſunt in æquatione multiplicata, mutabitur in ſucceſſionem + + vel — —, adeoque numerus ſucceſſionum ſimilium ſignorum eius æquationis tot eiusmodi ſucceſſionibus augebitur, quot ſunt deſcenſus. Per aſcenſum vero itidem ſucceſſio + — vel — + in ſucceſſionem ſimilium ſignorum convertetur, ſi comma ceciderit inter ſigna adverſa: quoties autem inter ſigna ſimilia ceciderit, toties vna ſucceſſio ſimilium ſignorum, quæ in æquatione multiplicata inſunt, deſtruetur, converſa in ſucceſſionem ſignorum adverſorum, eaque re vniverſus ſucceſſionum $+\ +$ vel $-\ -$ numerus, qui alias prodiiſſet, imminuetur. §. 513. Quare, ſi numerus ſucceſſionum æquationis multiplicatæ, quæ hic indifferenter notantur litteris a, b, c, d, vel *a, b, c, d* generatim fuerit n, & numerus vicium, quibus in colligendis ſignis facti aſcendendum fuit, m, adeoque §. 510. numerus deſcenſuum $m + 1$, & hinc numerus omnium transgreſſionum, ſive aſcendendo ſive deſcendendo fiant, $2m + 1$; erit numerus ſucceſſionum in æquatione producta, ſi per omnem aſcenſum talis ſucceſſio deſtruatur, $m + 1 + n - m = n + 1$; ſique & per quemlibet aſcenſum talis ſucceſſio ad reliquas acceſſerit, is numerus erit $m + 1 + n + m = n + 2m + 1$. In reliquis vero caſibus aliquis numerus inter duos iſtos $n + 1$ & $n + 2m + 1$ intermedius.

Secundo, ſi æquatio multiplicanda ſit per ſimplicem radicis affirmativæ, cuius adeo ſigna ſunt $+\ -$, ſint ſignorum ſeries inter multiplicandum productæ, ex quibus colligenda ſunt ſigna facti, hæ:

$$\overset{a}{+ -},$$

$$+\overset{a}{-},\ -\overset{b}{+}\overset{c}{-},\ --,\ --,\ -\overset{d}{+},\ +$$

$$-\underset{a}{,}\ +\underset{b}{+}-\underset{c}{,}\ ++,\ ++,\ ++\underset{d}{,}\ --$$

omnibus ergo vt prius præparatis, numerus litterarum a, b, c, d vel *a*, *b*, *c*, *d* numero ſucceſſionum + — vel — + in æquatione multiplicata æqualis erit: commata autem, quæ ſignant loca, apud quæ ex ſerie in ſeriem transeundum eſt, in ſerie priori, inter ſigna contraria non cadent, quia iam ſignorum ordines apud ea loca, apud quæ magnitudo terminorum tranſitum ex ſerie in ſeriem imperare poteſt, erunt III vel IIII, §. 512: in poſteriori vero ſerie commata illa vel inter contraria ſigna cadere poterunt vt apud *a*, *c*, *d*, vel inter ſimilia. Per omnem ergo deſcenſum aliqua ſucceſſionum + + vel — —, quæ inſunt in æquatione multiplicata, mutabitur in ſucceſſionem + — vel — +; per aſcenſum vero vel itidem ſucceſſio ſimilium ſignorum in ſucceſſionem contrariorum convertetur, vt apud commata, quibus nulla littera adſcripta eſt; qua re ad numerum vniverſarum huius generis ſucceſſionum vna accedet; vel vna contrariorum ſignorum ſucceſſio, in ſucceſſionem ſimilium ſignorum converſa, deſtruetur, vt apud commata litteris ſignata, ſi ibi aſcenſus fiat.

Quare,

Quare, ſi iam litteræ m & n numeros ſucceſſionum adverſorum ſignorum notaverint, eadem de his ſimili modo concludentur, quæ priori caſu evicta ſunt.

Scholion.

§. 515. In ſchemate primi caſus numerus ſucceſſionum ſignorum ſimilium æquationis productæ ita numerabitur. Prima eſt a vel a, altera accedit deſcendendo inter a & b, tertia eſt b, quarta foret c, ſed hæc deſtruitur per aſcenſum: ergo quarta fit quæ accedit rurſus deſcendendo, quinta quæ accedit iterum aſcendendo, ſexta eſt d, & ſeptima quæ accedit per vltimum deſcenſum. Eſt ergo in hoc exemplo numerus ſucceſſionum ſimilium ſignorum, per multiplicationem, tribus eiusmodi ſucceſſionibus auctus, cum tranſitus facti ſint in vniverſum quinque.

In ſchemate vero ſecundi caſus eædem ſucceſſiones ita numerabuntur. Prima eſt a vel a, altera quæ accedit apud a deſcendendo, tertia b, quarta foret c; verum hæc per aſcenſum deſtruitur, vnde quarta eſt, quæ accedit per deſcenſum, ad quam accedit quinta per aſcenſum, ſexta eſt d, cui ſeptima per deſcenſum accedit. Sunt ergo in æquatione multiplicando producta ſeptem ſignorum adverſorum ſucceſſiones, cum in æquatione multiplicata tantum

tum quatuor fuerint a, b, c, d vel a, b, c, d, ad quas ergo tres acceſſere; tranſitus autem facti ſunt quinque.

Corollarium I.

§. 516. Per quamlibet ergo æquationis multiplicationem, per quam nova radix negativa in eam infertur, vna minimum ſimilium ſignorum ſucceſſio, + + vel — — ad earum, quæ in æquatione multiplicata infuerunt, numerum accedit; & per quamlibet multiplicationem, per quam in æquationem infertur nova radix affirmativa, vnitate minimum augetur numerus ſucceſſionum ſignorum contrariorum + — vel — +. Quare numerus radicum æquationis negativarum numero ſucceſſionum ſignorum ſimilium, vel numerus affirmativarum numero ſucceſſionum ſignorum oppoſitorum, in eadem æquatione, maior nunquam erit; vel numerus ſucceſſionum radicum numero minor. De radicibus realibus agitur: impoſſibiles enim proprie nec affirmativæ ſunt nec negativæ.

Corollarium II.

§. 517. Si ergo in æquatione omnia ſigna fuerint eadem, nulla æquationis radix realis affirmativa erit. Si foret vel vna, vna minimum in ea deprehenderetur ſignorum adverſorum ſucceſſio. Vnde ſi huiusmodi æquatio, præter reales negativas, alias radices habuerit, eæ impoſſibiles erunt.

Corollarium III.

§. 518. Si in æquatione quodlibet ſignum vtrique vicinorum adverſum fuerit, non inerit in æquatione radix realis negativa. Si foret vel vna, vna minimum in æquatione foret ſimilium ſignorum ſucceſſio. Quare ſi in eiusmodi æquatione, præter reales affirmativas, aliæ radices fuerint, hæ impoſſibiles erunt.

THEOREMA VII.

§. 519. *In omni æquatione, cuius omnes radices reales ſunt, numerus ſucceſsionum ſignorum adverſorum æqualis eſt numero radicum eius affirmativarum; & numerus ſucceſſionum ſignorum ſimilium numero radicum eiusdem æquationis negativarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit N numerus radicum æquationis negativarum & n numerus ſucceſſionum $++$ vel $--$ eiusdem æquationis: M autem ſit numerus radicum æquationis affirmativarum, & m numerus ſucceſſionum $+-$ vel $-+$. Erit $n + m = N + M$. §. 505. Sed n non minor eſt quam N, neque m minor quam M. §. 516. Si vero ponatur $n > N$ erit $m < M$: quare

quare n neque minor neque maior erit quam N. Ergo $n = N$, & hinc $m = M$.

Corollarium I.

§. 520. Si ergo vndecunque conſtiterit, numerum radicum æquationis realium negativarum numero n, ſimulque numerum radicum realium affirmativarum numero m, æqualem non eſſe: concludendum erit, aliquas radices æquationis impoſſibiles eſſe.

Corollarium II.

§. 521. Si aliquis æquationis terminus defecerit, poterit eius loco ſcribi vel $+ 0$ vel $- 0$, perinde enim eſt. Quodſi ergo, alterutro horum ſumpto, alius numerus radicum affirmativarum vel negativarum ex ſucceſſionibus ſignorum eliciatur, quam ſi ſumatur alterum; id indicio erit, æquationem radices impoſſibiles continere. Nequit enim in eadem æquatione alius atque alius numerus radicum affirmativarum ineſſe.

Scholion.

§. 522. Continget autem id, vt per dictas poſitiones diverſi radicum affirmativarum vel negativarum numeri producantur, ſi ſignum termini, qui deficientem præcedit, idem fuerit cum ſigno termini deficientem ſequentis, non aliter. Sit $y^3 * + py - q = 0$. Si in locum termini deficientis ponatur $+ 0y^2$, æquatio fit $y^3 + 0y^2 + py - q = 0$, cuius duæ producuntur radices negativæ, & vna affirmativa. Si vero eodem loco ſcribatur $-0y^2$, omnes æquationis radices per ſigna indicantur affirmativæ. Vtrumque cum eſſe non poſſit, neceſſe eſt earum aliquas impoſſibiles eſſe.

Corollarium III.

§. 523. Si ex æquatione aliquis terminus eliminetur, methodo §. 488. oſtenſa, indeque hoc indicio deprehendatur æquationem productam, in qua ſcilicet iam aliquis terminus deficit, radices impoſſibiles continere; etiam prioris illius totidem radices impoſſibiles eſſe, concludendum erit. Fit enim ea termini eliminatio ex æquatione, cuius cognita notatur per x, introducta in eam y, ex æquatione $x = y + t$, in qua t convenienter ſumpta ponitur; eoque facto y notat radices æquationis productæ. Si vero y impoſſibilis fuerit, etiam $y + t$ impoſſibilis erit, quia t realis ponitur.

Corollarium IIII.

§. 524. Si in æquatione plures vno termini deinceps defecerint, radicum aliquas impoſſibiles eſſe conſtabit, niſi in locum cuiuslibet terminorum deficientium $+0$ & -0 ſubſtituto, omnes ſignorum combinationes, quæ ita

ita oriuntur, eundem radicum affirmativarum vel negativarum numerum prodiderint. Id ergo cum eſſe non poſſit, omnes eiusmodi æquationes radices impoſſibiles continebunt.

Scholion.

§. 525. Sit æquatio $x^3 * * + a = 0$ vel $x^3 * * - a = 0$, in qua duo deinceps termini deficiunt. Surrogato ergo in locum cuiusvis, nunc $+ 0$ nunc $- 0$, quatuor hi ſignorum ordines prodeunt,

ex priori	ex poſteriori
+ + + +	+ — + —
+ + — +	+ — — —
+ — + +	+ + + —
+ — — +	+ + — —

quorum primi indicant omnes radices negativas eſſe vel affirmativas, reliqui autem non omnes. Patet autem vel ex his exemplis, manentibus ſignis extremis, ſi intermedia, omni quo poſſunt, modo coordinentur, fieri non poſſe, vt idem per omnes hos ordines radicum affirmativarum vel negativarum numerus indicetur.

Corollarium V.

§. 526. Æquatione quacunque, per quamcunque ſimplicem radicis affirmativæ multiplicata, numerus radicum affirmativarum in æquatione producta vnitate maior fieri debet: idemque debet contingere radicibus negativis, ſi radix æquationis ſimplicis datam multiplicantis fuerit negativa. Id ergo augmentum niſi per ordinem ſignorum radicis, ea multiplicatione productæ, indicetur, aliquas radicum æquationis multiplicatæ impoſſibiles eſſe, conſtabit.

Scholion.

§. 527. Ita ſi æquatio $x^3 + x^2 + 3x + 5 = 0$ cuius tres radices negativæ indicantur, multiplicetur per $x - 2 = 0$ prodit $x^4 - x^3 + x^3 - x - 10 = 0$, cuius tres radices affirmativas ordo ſignorum exhibet, & vnam negativam. Debebat autem eſſe vna affirmativa & tres negativæ. Ergo æquatio continet radices impoſſibiles.

PROBLEMA LVIII.

§. 528. *Invenire limites æquationis; id eſt duas aſſignare quantitates, quarum altera maior ſit quauis radice æquationis reali, altera autem minor.*

PRÆPARATIO.

F. 36. §. 529. Sint datæ æquationis radices reales affirmativæ AB, AC, & negativa AD, quas indifferenter notet x æquationis. Sumpto

pto ergo puncto E pro lubitu, ſi dicatur $AE = p$ & $EC = z$, vt fiat $x = p + z$, introducaturque §. 484. hæc expreſſio in æquationem: eius, quæ ita producitur, radices erunt EC, EB, ED, omnes prioribus minores (ſiquidem quantitas negativa minor dicatur, quæ abſolute maior eſt); B autem punctum per radicem negativam dabitur, quod ante dabatur per affirmativam. Creſcente hinc p, EC porro decreſcens, tandem evaneſcet, ac inde ipſa quoque negativa fiet, E cadente extra C. Ergo viciſſim AE quavis radice æquationis datæ maior erit, ſi omnes eius radices hoc modo converterit in negativas. Sed ſi, recta p a puncto A in partem contrariam producta, E ceciderit extra D, in F, omnes æquationis radices reales, per quas ſcilicet puncta D, B, C dantur, affirmativæ reddentur; & ſi affirmativæ redditæ fuerint omnes radices, id indicio erit AF minorem eſſe quavis radice æquationis datæ. Radices autem æquationis reales an omnes affirmativæ vel negativæ ſint, ordo ſignorum clare monſtrat. §. 517. 518.

SOLVTIO.

§. 530. Sit data æquatio

$$x^3 - x^2 - 57x + 105 = 0$$

fiat

fiat $x = z + p$, ac introducatur hæc expreſſio in æquationem; erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & z^3 + 3pz^2 + 3p^2z + p^3 \\ -x^2 & = & - \quad z^2 - 2pz - p^2 \\ -57x & = & \quad -57z - 57p \\ +105 & = & \quad +105. \end{array}$$

Patet ergo omnia æquationis ita productæ ſigna fore eadem, adeoque omnes eius radices negativas, ſi ſumatur $p = 10$; erit adeo 10 maior qualibet radice æquationis. Verum magis arctari hic limes poteſt. Si fiat $p = 8$, eadem ſigna + locum inventura eſſe apud priora membra facile patet. Vltimum autem membrum erit $512 - 64 - 456 + 105$. ipſum quoque affirmativum. Limes ergo radicum affirmativarum erit 10, vel hoc paullo arctior 8.

§. 531. Si hoc etiam arctiorem limitem tentemus 7, quem priores termini facile permittunt, vltimus terminus fit $343 - 49 - 399 + 105$, id eſt nihilum: atque æquatio redigitur in hanc

$$z^3 + 20z^2 + 76z = 0$$

quæ cum dividi poſſit per z, vel $z - 0$, ſequitur vnam eius radicum contineri hac æquatione ſimplici $z - 0 = 0$, §. 494. eſſeque adeo radicem illam $z = 0$; quare in æquatione data maxima radicum affirmativarum

rum erit 7, ac ſimilis in ſimilibus caſibus omnibus erit concluſio. Reliquæ radices continentur æquatione quadratica $z^2 + 20z + 76 = 0$, §. 496, e qua facile haberi poſſunt.

§. 532. Si tamen eadem ratione quærere lubeat limitem radicum æquationis datæ negativarum, patet in æquatione transformando producta

$$\begin{array}{llll} z^3 + 3pz^2 & + 3p^2z & + p^3 & = 0 \\ \quad - z^2 & - 2pz & - p^2 & \\ & - 57z & - 57p & \\ & & + 105 & \end{array}$$

ordinem ſignorum fore hunc + − + −, ſi ponatur $p = -10$. Quare hac poſitione omnes æquationis radices affirmativæ redduntur, eſtque adeo -10 minor quavis radice æquationis datæ. Verum magis arctari hic limes poteſt. Si enim fiat $p = -8$, cum facile perſpiciatur priora ſigna eodem ordine proditura eſſe, vltimus terminus fit $= -512 - 64 + 456 + 105 = -15$, atque huius quoque ſignum ordini congruit, radices affirmativas indicanti.

Corollarium.

§. 533. Si limites radicum ita quæſiti in vnum coiverint, quantum fieri potuit arctati, id indicio erit, æquationis radicem realem nullam eſſe.

eſſe. Neque enim intra vnum limitem, a & a, quicunque ſit, radix realis contineri vlla poteſt præter o; quæ nunquam in cenſum venit, quia ante tolli ſolet, æquationem ſecundum ea, quæ in ſolutione dicta ſunt, per x dividendo. Coincidunt autem in vnum limites, vt in hac æquatione

$$x^2 + 5x + 10 = 0.$$

quæ poſita $x = z + p$, evadit

$$\begin{array}{l} z^2 + 2pz + p^2 = 0 \\ \quad\;\; + 5z + 5p \\ \qquad\qquad + 10 \end{array}$$

Si iam fiat $p = -\frac{5}{2}$, & hinc $p^2 = \frac{25}{4}$, æquatio mutatur in hanc

$$z^2 \mp 0z + \frac{15}{4} = 0,$$

obtineturque ſimul cum ille ſignorum ordo, qui ad limitem radicum affirmativarum pertinet, tum qui ad limitem negativarum, nam o ſemper vtrolibet ſigno adfici poteſt. Radices ergo æquationis datæ reales inter limites $-\frac{5}{2}$ & $-\frac{5}{2}$ continentur, id eſt, nullæ ſunt.

PROBLEMA LVIIII.

§. 534 *Cuiuſcunque æquationis propoſitæ radicem rationalem reperire, vel æquationem ſimplicem, in qua terminus cognitus rationalis eſt, per quam propoſita dividitur.*

PRÆPARATIO.

§. 535. Sit data æquatio huius formæ vniverſalis

$$mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

quæ contineat radicem rationalem, quam exhibet eius diviſor ſimplex $\mu x + \varkappa$: erunt $\varkappa$ & μ diviſores rationales & integri, ille quidem termini c, hic autem coefficientis m, vel communis denominatoris, ad quem reducuntur termini æquationis, coefficiente primi ſublato, vt æquatio fiat

$$x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$$

atque diviſor eius ſimplex, $x + \frac{\varkappa}{\mu}$.

SOLVTIO.

§. 536. Si ergo data æquatio, per ſimplicem dividenda, ſit hæc:

$$3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$$

quærantur §. 530. limites radicum æquationis

$$x^3 - \tfrac{29}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{60}{3} = 0$$

in quam illa convertitur, coefficiente primi termini ſublato. Hi limites erunt —1 & 10. Deinde inveſtigentur omnes diviſores termini æquationis cogniti 60, qui extra hos limites non cadunt, qui quidem ſunt —1, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Solvatur quoque coefficiens m

æquationis vniverſaliter expreſſæ, qui hic eſt 3, in factores ſuos 1 & 3. Si ergo æquationis propoſitæ aliqua radix rationalis ſit, erit aliqua ex hisce, -1, $-\frac{1}{3}$; 1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, $\frac{4}{3}$, 5, $\frac{5}{3}$, 6, atque æquatio ſimplex eam radicem continens, vt $3x - 5 = 0$ æquationem propoſitam dividet. Tentata ergo diviſione per quamvis æquationum ſimplicium ex his numeris formandarum ſi quis ſit diviſor, is vtique detegetur.

Æquatio propoſita per $3x - 5$ dividitur, prodeunte $x^2 - 8x - 12 = 0$. Eſt ergo radix huius æquationis rationalis, quæ continetur æquatione $3x - 5 = 0$, reliquæ inſunt in quadratica per diviſionem producta, ſed hæ irrationales ſunt.

Scholion.

§. 537. Non eſt negligenda hæc diviſio æquationis per ſimplicem rationalem, vbicunque inſtitui poteſt, non propterea tantum, quod vnam radicum æquationis exhibet, æquationem vero ad ordinem inferiorem deprimit, cuius radices ſæpe in poteſtate ſunt; verum ob vlteriorem etiam ſcopum, qui deinde declarabitur.

§. 538. Cæterum in methodo propoſita incommoda ſæpe eſt multitudo diviſorum termini plane cogniti, qui in æquatione vniverſali dictus

dictus eſt c, quorum quilibet, an radix ſit, tentari debet. Sed ii ad multo pauciores reducentur hunc in modum. Pone in æquatione propoſita $x = y - n$. Erit quælibet radix æquationis, quæ ita producitur, quantitate n maior radice, quæ illi in æquatione data reſpondet §. 484. Sique t limitem notaverit radicum realium æquationis datæ vnum vel alterum, erit æquationis productæ limes $t + n$.

§. 539. Data ergo eadem æquatione, quam hucusque tractavimus, $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$, cuius limites reperti ſunt, 10 & —1, ſi ponatur $x = y - 1$, ſumpto ſcilicet 1 pro vniverſali n, erunt limites 0 & 11. Æquatio vero ita transformabitur:

$$\begin{array}{rl}
3x^3 = & 3y^3 - 9y^2 + 9y - 3 \\
-29x^2 = & \quad\; -29y^2 + 58y - 29 \\
+4x = & \qquad\qquad\;\; + 4y - 4 \\
+60 = & \qquad\qquad\qquad\;\; + 60, \text{ vnde fit} \\
\hline
0 = & 3y^3 - 38y^2 + 71y + 24.
\end{array}$$

Huius iam æquationis radices rationales ſi quærendæ ſint modo præſcripto, cum numeri 24 factores, qui cadunt intra limites 0 & 11, ſint 1, 2, 3, 4, 6, 8, prodibunt numeri, præter quos radix eſſe nullus alius poſſit, 1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, $\frac{4}{3}$, 4, 6, 8, $\frac{8}{3}$.

§. 540. In eadem æquatione ſi ponatur $x = y + 1$, ſcripto iam -1 pro n, erunt limites æquationis productæ $10 - 1 = 9$, & $-1 - 1 = -2$. Æquatio autem ita transformabitur:

$$\begin{array}{rcrrrr}
3x^3 & = & 3y^3 & + 9y^2 & + 9y & + 3 \\
-29x^2 & = & & -29y^2 & - 58y & - 29 \\
+ 4x & = & & & + 4y & + 4 \\
+ 60 & = & & & & + 60 \\
\hline
0 & = & 3y^3 & - 20y^2 & - 45y & + 38
\end{array}$$

In hac æquatione, diviſores termini 38, qui cadunt intra limites -2 & $+9$, ſunt $-1, 1, 2$, non alii. Vnde radix rationalis huius æquationis, ſi non fuerit aliqua ex numeris $-\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2$, nulla erit.

§. 541 Scriptis iam numeris ita repertis ordine, poſitisque in primam ſeriem iis, inter quos reperiri debet radix rationalis æquationis ad quam $x = y + 1$, in ſecunda, qui reperti ſunt ad æquationem datam, in tertia vero illis, qui pertinent ad eam, ad quam $x = y - 1$, hoc modo:

$-\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2.$

$-1, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 5, \frac{5}{3}, 6.$

$1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 6, 8, \frac{8}{3}.$

patet

patet nullum numerorum ſecundæ ſeriei poſſe eſſe radicem æquationis datæ, ad quam hæc ſeries pertinet, niſi inter numeros primæ ſeriei occurrerit aliquis, qui ex illo oritur, ſi ad eum addatur -1, & inter numeros ſeriei tertiæ alius, qui ex eodem illo fit, ſi ad eum addatur $+1$; quia, cum in ſerie ſecunda illa radix dicatur x, eſt radix æquationis, ad quam pertinet ſeries prima, $x-1$, & radix æquationis, ad quam ſeries tertia pertinet, $x+1$.

Examinatis autem ſerierum ita repertarum numeris apparet, nullos dictarum conditionum eſſe, præter ſequentes, quorum prima ſeries deſumpta eſt ex prima repertarum, ſecunda ex ſecunda, tertia ex tertia,

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & \frac{2}{3} \\ 2, & 3, & \frac{5}{3} \\ 3, & 4, & \frac{8}{3} \end{array}$$

Ergo radix æquationis propoſitæ

$$3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$$

rationalis, ſi aliqua ſit, erit vel 2, vel 3 vel $\frac{5}{3}$, adeoque æquatio illa dividetur vel per $x - 2 = 0$, vel per $x - 3 = 0$, vel per $3x - 5 = 0$. Atque ita diviſores tentandi ad tres reducti ſunt, qui antea fuere duodecim, magno vtique laboris compendio.

§. 542. Poterant autem his quoque pauciores diviſores, qui tentandi ſint, reperiri, ſi præter ea, quæ ſumſimus, poſita quoque fuiſſet $n = 2$ vel $n = -2$ vel vtrumque, deinde $n = 3$ vel $n = -3$ vel vtrumque, quo facto raro plures vno diviſores, qui tentandi ſunt, relinquuntur, ſi omnino vllus relinquitur. Poteſt quoque labor nonnihil abbreviari, negligendo operationes ſuperfluas, atque ea, quæ producuntur, ordine concinno ſcribendo. Sed rarioris hæc vſus ſunt. Quare facilitati comprehenſionis potius, quam laboris compendio, conſulendum putavi.

§. 543. Cæterum quæ ita oſtenſa ſunt de numeris, ad litteras facile applicabuntur, ſi hæ pro coefficientibus fuerint.

PROBLEMA LX.

§. 544. *Æquationem rationalem, ex duabus eiusmodi æquationibus aliis, quarum neutra ſimplex eſt, multiplicando conflatam, in has dividendo reſolvere.*

SOLVTIO.

§. 545. Sit æquatio hæc

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 18x^2 + 9x - 40 = 0$$

in duas ſolvenda, quarum vna quadratica ſit, altera cubica. Finge æquationes eſſe has,

$$\begin{array}{l} x^3 + px^2 + qx + r = 0 \\ x^2 + mx + n \qquad = 0 \end{array}$$

ac multiplica priorem per alteram: producetur,

$$\begin{array}{llllll} x^5 + px^4 & + qx^3 & + rx^2 & + mrx & + nr = 0 \\ + mx^4 & + mpx^3 & + mqx^2 & + nqx & \\ & + nx^3 & + npx^2 & & \end{array}$$

Hanc æquationem eandem eſſe pone cum data, quod erit, ſi fuerit

$$\begin{array}{ll} p + m = -2 & mr + nq = 9 \\ q + mp + n = -10 & nr = -40. \\ r + mq + np = 18 & \end{array}$$

Ex his iam æquationibus elice valores coefficientium aſſumptorum, m & n. Verum quia æquationes, quæ oriuntur, has in vnam conflando, prout ſolvendi leges iubent, plerumque difficiles, & ſæpe ne quidem tractabiles prodeunt: litteras n & r data notare pone, vtpote quarum valor ex facto, quod produxere, dato, tentando haud difficillime reperitur. Reſtabit quærenda m, quam dico y. Erit ex prima æquatione $p = -2 - y$, quo ſubſtituto in reliquis, fit ſecunda

$$\begin{array}{ll} & q - 2y - yy + n = -10 \\ \& & q = -10 + 2y + yy - n \end{array}$$

tertia vero eadem ſubſtitutione fit;

$$r + qy - 2n - ny = 18$$

In hanc ſi introducatur q, ex æquatione ſecunda prodit

$$r - 10y + 2y^2 + y^3 - 2ny - 2n = 18$$

$$\text{vel}\quad \begin{array}{lllll} y^3 & + 2y^2 & - 2ny & - 2n & = 0. \\ & & - 10y & + r & \\ & & & - 18 & \end{array}$$

In quartam autem æquationum initio formatarum ſi pariter valor litteræ q repertus introducatur, fit

$$ry - 10n + 2ny + nyy - nn = 9$$

$$\text{vel}\quad \begin{array}{llll} ny^2 & + 2ny & - nn & = 0 \\ & + ry & - 10n & \\ & & - 9 & \end{array}$$

§. 546. Duabus eiusmodi æquationibus pro quovis caſu confectis, quantitas data æquationis $nr = -40$ ſolvetur in duos factores, quorum alteruter ponetur $= n$, alter $= r$, ac his valoribus, tanquam certi eſſent, in vtraque æquatione ſubſtitutis, quærentur earum radices rationales, vel, ex vna reperta radix tentabitur, an quoque ſit radix alterius. Quæ vtriusque æquationis radix eſt, eſt y vel m quæſita, vtpote quæ per vtramque æquationum repertarum datur. Si talis non reperiatur, aliter dividendum erit nr, idque toties, donec exhauriantur omnes modi, quibus in duos factores rationales & integros ſolvi poteſt. Eo demum facto, ſi nulla

nulla radix vtrique æquationi communis reperiatur, ſolutionem æquationis propoſitæ in duas rationales impoſſibilem eſſe, pronunciandum erit.

§. 547. In hoc caſu ſi n ponatur $= -5$, & $r = 8$, quia $-5 \times 8 = -40$, fit æquatio poſterior

$$-5y^2 - 2y + 16 = 0$$

vel $y^2 + \frac{2}{5}y - \frac{16}{5} = 0$, cuius radices ſunt, $\frac{8}{5}$ & -2. Poſterior etiam prioris æquationis $y^3 + 2y^2$ &c. radix eſt, quia in illa loco litteræ y ſubſtituta, omnia in nihilum redigit. Eſt ergo æquatio quadratica propoſitam dividens $x^2 - 2x - 5 = 0$, qua diviſione producitur quotus, $x^3 - 5x + 8 = 0$.

§. 548. Poterat eadem y etiam facilius reperiri, aſſumpto valore litteræ n, id eſt -5, in æquatione cubica ſubſtituto. Fit eo facto hæc æquatio $y^3 + 2y^2 = 0$, reliquis terminis evaneſcentibus, vnde ſequitur $y = -2$. Atque ad hunc modum ſemper procedi poterit: ſed labor tanto magis creſcet, tantoque pluribus æquationibus opus erit, quo altior fuerit gradus diviſoris, qui quæritur.

Scholion.

§. 549. Quod de diviſione æquationis per ſimplicem dictum eſt, §. 537. huc quoque trahi hi debet. Æquatio, quæ in duas pluresve rationales ſolvi poteſt, ſemper ſolvenda eſt, non ob eam modo rationem, quod ita radices facilius deteguntur, ſed ob alium etiam magni momenti vſum. Quare neque proprie quadratica putatur æquatio, quæ ex duabus ſimplicibus rationalibus multiplicando conflata eſt, vel cubica, quæ orta eſt multiplicando ſimplicem rationalem in quadraticam, vel in factam ex duabus ſimplicibus rationalibus aliis. Ea demum vere cubica eſt æquatio, quæ per rationalem dividi nullam poteſt: idemque tenendum de reliquis. Cæterum diviſio, ſi fieri poteſt, ſemper poteſt intelligi per æquationem fieri inferiorem ea, quæ pro quoto prodit, vel cum ea æque altam, nunquam per altiorem. Æquatio rationalis, quæ æquationem quinti ordinis dividat, vt quadratica altior ſumatur, numquam opus eſt, quia cubicus ſi ſit diviſor, is in quotientis locum poteſt transferri. Cæterum raro ad regulas hic traditas confugiendum eſt æquationem ſoluturo, cum plerumque diviſor, ſi quis ſit, vltro ſeſe offerat. Quare generatim rem indicaſſe contentus, ad ſpecialiora atque ad caſus difficiliores hic deſcendendum non putavi.

§. 550. Cæterum ad modum huius ſolutionis complures aliæ, circa æquationes, quæſtiones expedientur. Vt ſi dicendum ſit, an æquatio data duas pluresve radices inter ſe æquales habeat, & quænam ſint eæ radices. Sit æquatio iſta,

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

Fingatur æquatio vniverſalis, ex duabus ſimplicibus æqualium radicum, hæc $x^2 - 2fx + ff = 0$, ac multiplicetur per aliam æquationem vniverſalem eius gradus, qui ea multiplicatione producat æquationem eiusdem gradus cum propoſita. Sumenda in hoc exemplo erit æquatio ſimplex, quæ ſit $x - g = 0$. Producetur

$$\begin{array}{l} x^3 - 2fx^2 + ffx - ffg = 0 \\ \qquad - gx^2 + 2fgx \end{array}$$

Hæc iam æquatio ponatur cum propoſita eadem eſſe, quod erit, ſi fuerit:

$$-2f - g = 3 \qquad\qquad -ffg = 5.$$

$$ff + 2fg = -9,$$

Ex his æquationibus quæratur valor litteræ f. Si enim aliquis reperietur, erit f vna radicum, cui alia in eadem æquatione æqualis eſt: ſi impoſſibile fuerit reperire hanc f, nulla radicum æquationis alii eiusdem æquationis radici æqualis erit.

Eſt autem ex harum æquationum prima $g = -2f - 3$, quo ſubſtituto, fit altera $ff - 4ff - 6f = -9$, vel $3ff + 6f = 9$, aut $ff+2f=3$. Tertia autem æquatio, eiuſdem $g=-2f-3$ ſubſtitutione, fit $2f^3+3ff=5$. Duæ iam hæ æquationes vnientur, ſi fiat, ex priori $2f^3+4f^2=6f$, ſumaturque differentia, quæ dabit $f^2=6f-5$. Hæc vero æquationi $f^2+2f=3$ eodem modo iuncta, reddet $2f=-6f+8$, vel $8f=8$, ergo $f=1$. Erunt ergo in æquatione propoſita duæ radices æquales, quas dant ſimplices $x-1=0$, & præterea tertia, quam continet $x+5=0$.

§. 551. Sic ſi quærantur duæ radices æquales, ſi quæ ſint, in æquatione $x^4-4x+3=0$, æquatione vniverſali cuius duæ radices æquales ſunt, $xx-2fx+ff=0$ multiplicata per vniverſalem quadraticam $xx-px+q=0$ formabitur æquatio eiuſdem cum data gradus, duas continens radices æquales, hæc:

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -2fx^3 & +ffx^2 & -ffpx & +ffq=0 \\ & -px^3 & +2fpx^2 & -2fqx & \\ & & +qx^2 & & \end{array}$$

quæ ſi ponatur eadem eſſe cum data, erit

$$\begin{array}{ll} 2f+p=0, & ffp+2fq=4, \\ ff+2fp+q=0 & ffq=3. \end{array}$$

Ex prima harum æquationum elicitur $p=-2f$, quod ſi inferatur in ſecundam, prodit $q=3ff$. Hinc ex tertia fit $-2f^3+6f^3=4$, vel $f^3=1$. Cui ſi quarta refragaretur, concludendum foret,

ret, non dari in æquatione propoſita duas radices æquales. Non autem refragatur. Dat enim $3f^4 = 3$, & hinc $f^4 = 1$ vel $f = 1$. Sunt ergo & huius æquationis duæ radices æquales vnitati.

§. 552. Non multo aliter procedemus, ſi detur æquatio $x^3 - ayx + y^3 = 0$, quæraturque quanta ſumenda ſit y, vt duæ æquationis radices, quas denotat x, fiant eiusdem magnitudinis? Comparata enim æquatione iſta cum cubica duarum radicum æqualium, quam ſupra compoſuimus §. 550.
reperitur $2f + g = 0$, $ff + 2fg = -ay$, & $-ffg = y^3$.
Ex prima harum æquationum eſt $g = -2f$, vnde fit altera $ff - 4ff = -ay$, & $3ff = ay$.
Tertia vero æquatio eadem ſubſtitutione fit $2f^3 = y^3$. Vt ex duabus æquationibus ita repertis eliminari poſſit f, facio ex prima $6f^3 = 2afy$, & ex altera $6f^3 = 3y^3$, erit $2afy = 3y^3$, vel $2af = 3y^2$, & hinc $4a^2f^2 = 9y^4$, atque $f^2 = \frac{9y^4}{4a^2}$.
Hoc in æquationem $3f^2 = ay$ illato, prodit $\frac{27y^4}{4a^2} = ay$, vel $27y^3 = 4a^3$, vnde

$$y = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

Si & f deſideretur, vna ſcilicet radicum æqualium, in æquationem $2af = 3y^2$ pro y^2 illato $\frac{1}{9}a^2\sqrt[3]{16}$, erit $2af = \frac{1}{3}a^2\sqrt[3]{16}$, hinc $f = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{\frac{16}{8}} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$.

THEOREMA VIIII.

§. 553. *In quacunque æquatione, cuius omnes termini ad eandem partem translati ſunt, ſi in alia parte loco* o *ſcribatur* y; *dato* x, *quæ æquationis incognitam notet, datur* y. *Si iam duobus quibuscunque valoribus realibus litteræ illi* x *tributis,* y *ad vnum eorum affirmativum prodierit, ad alterum autem negativum, ſemper vna minimum æquationis radix realis erit, eaque inter duos illos valores intermedia.*

DEMONSTRATIO.

Sit æquatio

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} + \ldots + \eta = y,$$

in qua y poſita eſt loco o, coefficientes autem α, β, γ quascunque quantitates affirmativas vel negativas notare poſſunt. Quicunque ergo valor determinatus litteræ x tribuatur, y determinata prodibit, quia eo facto per æquationem ſimplicem datur. Poſito iam $x = a$, ſi y prodierit affirmativa $= +\alpha$, negativa autem $= -\beta$ ſi ſumatur $x = b$; ponatur

natur x ab a ad b continuo creſcere vel decreſcere. Mutabitur quoque eius valor, quantitas ſcilicet $+ \alpha$ continuo creſcendo vel decreſcendo, ſed ſic vt tandem deſinat in $- \beta$. Cum vero valor ille litteræ y ad quemlibet valorem x magnitudinis determinatæ ſit, non poterit y ab $+ \alpha$ ad $- \beta$ tranſire, niſi aliquando fiat $= 0$. Erit ergo ſemper aliqua quantitas ipſius x, inter a & b intermedia, ad quam, evaneſcente y, fit $x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} + \ldots \eta = 0$, ea autem eſt radix huius æquationis realis.

Corollarium I.

§. 554. Si m, index termini æquationis primi, numerus impar fuerit, vna minimum æquationis radix realis erit. Creſcente enim x, eam tandem maiorem fieri neceſſe eſt quam α, & x^2 maiorem quam β, & x^3 maiorem quam γ & ita porro, adeoque x^m tandem ſuperare omnes æquationis terminos reliquos, primo quidem ſeorſim, deinde coniunctim etiam: Quo facto y affirmativa erit, etiamſi omnes hi termini negativi fuerint. Contra ſi x negativa ponatur, etiam x^m negativa erit, quia m ponitur impar eſſe; atque ad hanc partem creſcente x, eodem modo x^m æquationis terminos reliquos ſuperabit, atque y negativam reddet, etiamſi omnes ii termini affirmativi fuerint.

Inter duos autem illos litteræ x valores, quorum vnus y affirmativam exhibet, alter negativam, æquationis radicem realem eſſe neceſſe eſt, minimum vnam.

Corollarium II.

§. 555. Si vero m exponens ſummæ dignitatis incognitæ x, in æquatione propoſita, notaverit numerum parem, fueritque præterea quantitas æquationis plane cognita η negativa, duæ minimum æquationis radices reales erunt. Repetitis enim, quæ de x creſcente modo obſervata ſunt, patet primo y poſitivam fieri, quando x poſitiva ingens eſt. Verum cum, ſi x ſumatur negativa, x^m tamen poſitiva fiat, ſi m numerus par ſit, poſitiva quoque fit y ad ingentem x negativam. Sed eadem negativa fit, ad $x = 0$, quia hic reliquis terminis evaneſcentibus, eſt $y = \eta$, quæ η negativa eſſe ponitur. Bis ergo in tali æquatione y e poſitivo negativum & viciſſim e negativo poſitivum fit, ergo duæ minimum ſunt æquationis radices reales.

Corollarium III.

§. 556. Si vero in æquatione ad quam numerus m par eſt, is terminus, quem η denotat, affirmativus fuerit, poſſunt in ea æquatione & radices reales nullæ ineſſe, cum hoc caſu nihil ſit, quod y evaneſcere cogat. In hac certe æquatione $x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0$ radices

reales

reales nullæ ſunt, cum y ſemper poſitiva prodeat, quicunque valor tribuatur litteræ x, adeoque nihilo æqualis eſſe non poſſit.

PROBLEMA LXI.

§. 557. *Numeros decimales colligere, cuivis cuiuscunque æquationis radici reali quantumvis propinquos.*

SOLVTIO.

§. 558. Sit data æquatio

$$x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$$

cuius limites per dicta §. 528. reperti, ſunt 15 & -11. Incipiendo ergo a numero -11, ſubſtitue in locum x numeros ab hoc termino ordine, conveniente inter duos proximos intervallo relicto, & collige valores litteræ y, ſcriptæ loco 0. Conde ex his tabulam huiusmodi:

Si fuerit $x = -11$, erit $y = -261$
-10 . . . . $+150$
-5 . . . . $+1125$
0 . . . . $+850$
$+5$ . . . . $+75$
$+10$ . . . . -450
$+15$ . . . . $+25$

Si ergo duorum y hoc modo repertorum adverſa fuerint ſigna, inter x illis reſpondentes radix cadet §. 553. cuius magnitudo proxime colligetur ex numeris, per quos y exprimitur hunc in modum. Quia in hac æquatione ad $x = -11$ reperta eſt $y = -261$, & ad $x = -10$ alia $= +150$, inter -11 & -10 vna minimum cadet æquationis radix. Verum eodem ratiocinio & aliarum radicum limites deteguntur. Cadit nempe harum vna intra 5 & 10, altera intra 10 & 15. Neque tamen plures tribus radicibus in æquatione propoſita ineſſe poſſunt. Ergo intra limites -11 & -10 vna tantum radix erit, & intra 5 & 10 altera, tertia intra 10 & 15. Iam quia $x = -10$ notabiliter minorem dat y, quam $x = -11$, colligi porro debet hanc radicem priori numero propiorem eſſe, quam poſteriori, eſſeque adeo circiter $-10, 3$, vel $-10, 4$.

Eadem ratione radix quæ intra 5 & 10 cadit exactius determinabitur, faciendo, vt intervallum inter duos y his numeris reſpondentes, ad intervallum inter duos eos x, ſic y prior, ad exceſſum radicis ſupra priorem y, id eſt, vt $75 + 450$ ad 5, ita 75 ad exceſſum quæſitum, qui adeo reperietur 0, 7, vnde radix hæc erit 5, 7 proxime. Haud aliter radix tertia propius determinabitur, reperto exceſſu eius ſupra 10, hoc $\frac{450 \times 5}{475} = 4, 7$: vnde

vnde hæc radix numero 14, 7 proxime æqualis colligitur.

§. 559. Sed tamen numeri ita reperti ſi non longiſſime, tamen longe ſatis a veris radicum valoribus aberrare poſſunt. Corrigendi ergo ſunt, quod fiet eodem modo, quo primo ſunt inventi. Sit corrigendus numerus repertorum maximus 14, 7, atque radici æquationis maximæ propinquior reddendus. Pono iam in æquatione $x = 14, 7$, ac reperio ei reſpondens $y = -45, 377$. Cum ergo ad $x = 15$ pertineat $y = +25$, radicem paullo maiorem eſſe iudico reperta, vtpote quæ cadit intra 14, 7 & 15. Ex valoribus autem his litteræ y, per methodum approximandi oſtenſam, prodit exceſſus radicis ſupra 14, 7 hic 0, 19, quo addito, fit numerus exactior 14, 89, atque radici ſic ſatis propinquus. Si enim in æquatione loco x ſubſtituatur, prodit $y = -1, 528$. Vnde apparet numerum nunc quoque radice minorem eſſe, ſed differentia modica; quæ quidem eadem methodo imminui poteſt. Reperitur per eam exceſſus radicis ſupra numerum vltimo repertum $= 0, 00633$, quo addito fit numerus 14, 89633, qui ſi operæ pretium fore videatur, eadem via porro corrigi poteſt. Reddit autem hic numerus, loco x

in

in æquatione ſubſtitutus, y vix maiorem quam $+0,0005$, vnde apparet, eum paullulum peccare exceſſu.

Scholion.

§. 560. Non ſemper hac methodo prima opera omnes radices deteguntur, maxime ſi maiuſcula relinquuntur inter numeros, in æquatione pro littera x ſubſtitutos, intervalla. Sic ſi in hoc exemplo neglectus fuiſſet numerus $+10$, detectæ non fuiſſent duæ radices affirmativæ, quarum minor cadit inter 5 & 10, altera inter 10 & 15. Coniici tamen potuit præter radicem negativam & alias radices in æquatione reales ineſſe, cum ex limitibus æquationis -11 & $+15$, qui pro vnica radice nimis laxi ſunt, tum ex eo, quod numeri pro y reperti, qui primo creverant, deinde decreſcunt ſatis celeriter. Vnde concludi potuit y æquale nihilo futurum, ſurrogato in locum litteræ x numero non multo maiore, quam 5, quod ita ſeſe habere, numerus 10, quem omiſſum fuiſſe poſuimus, pro x ſubſtitutus, mox erat declaraturus. Et ſemper ſi ita reperti valores litteræ y, quando x paullo maior vel minor ponitur, quam a, ad nihilum accedant, & quando x ponitur paullo minor vel maior quam b, viciſſim ab eo recedant, ſuſpicio eſt inter a & b eſſe valorem litteræ x, ad quem ſit $y = 0$, quique adeo eſt radix æquationis.

§. 561. Si longum videatur dignitates numeri, pro valore litteræ x aſſumpti, in æquatione ſubſtituere; poteſt is labor contrahi hunc in modum. Si æquationi ſimplici $\alpha x + \beta = 0$ in radicem ſuam x ductæ, addatur quantitas data γ, fit æquatio quadratica $\alpha xx + \beta x + \gamma = 0$; quæ ſi denuo ducatur in eandem x, eique, quod hinc prodit, facto $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ adponatur data δ, æquatio cubica obtinetur $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, quæ in biquadraticam convertitur ſimili multiplicatione, & additione novæ quantitatis datæ ε, quo fit $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$, & ita porro. Manifeſtum autem eſt, omnem æquationem ita componi poſſe, ſumptis pro litteris α, β, γ, coefficientibus æquationis, ſed ita, vt ſi forte aliquis eius terminorum deficiat, pro littera, per quam ei in æquatione vniverſali reſpondens multiplicatus eſt, ponatur 0, atque multiplicationes nihilominus fiant. Vt ſi ita componenda ſit æquatio $\alpha x^4 + \delta x + \varepsilon = 0$ in qua $\beta = 0$ & $\gamma = 0$, formanda eſt ſimplex $\alpha x + 0$, atque multiplicanda per x, quo fiat $\alpha x^2 + 0x = \alpha x^2$, tum denuo addita 0, multiplicando producenda $\alpha x^3 + 0x = \alpha x^3$. Huic demum addita δ, vt fiat $\alpha x^3 + \delta$, reliqua ſecundum regulæ præſcriptum abſolvenda ſunt.

§. 562. In æquatione, quam hic tractavimus $x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$, eſt $\alpha = 1$, $\beta = -10$, $\gamma = -130$ & $\delta = 850$. Iam ſi quæratur, quænam in ea loco 0 proditura ſit y, ſi ponatur $x = 6$,

eſt $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6.$

$x - 10 = \ldots\ldots\ldots\ldots - 4.$

$x^2 - 10x = \ldots\ldots\ldots - 24.$

$x^2 - 10x - 130 = \ldots\ldots - 154.$

$x^3 - 10x^2 - 130x = \ldots - 924.$

$x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = - 74.$

Si ergo x ponatur $= 6$, fit $y = -74$, quod cum reliquis huius litteræ valoribus in ſolutione repertis ſi conferatur, patet radicum affirmativarum minorem parum differre a 5,5, quæ media arithmetica eſt inter 5 & 6, eamque per laxiores limites nimis magnam evaſiſſe, ſcilicet 5,7.

PROBLEMA LXII.

§. 563. *Numerum decimalem, alicui æquationis radici propinquum, corrigendo, quantumvis accuratum reddere.*

PRÆPARATIO.

§. 564. Si in æquatione, quæ hic commode inverſa ſcribetur

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \text{ \&c,}$$

quantitates datæ A, B, C, D &c. non multum diverſæ fuerint, vel certe conſequentes D, E non vehementiſſime exceſſerint eas, quæ antecedunt A, B, C; radicum autem earum quæ denotantur per z aliqua fuerit admodum parva, pars puta centeſima vel milleſima vnitatis: erit zz pars eius vnitatis multo minor, & z^3 hac in eadem ratione minor, & ita porro: quia ſcilicet 1, z, z^2, z^3 ſunt in progreſſione geometrica. Multiplicatis ergo, per hos progreſſionis terminos, quantitatibus A, B, C, D, E &c. ipſos æquationis terminos conſequentes præ antecedentibus admodum parvos evadere neceſſe eſt, vt minimo errore negligi poſſint. Quo facto æquatio convertetur in aliquam harum

$$0 = A + Bz$$
$$0 = A + Bz + Cz^2$$
$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3$$

in quarum qualibet radix earum, quæ ei inſunt, minima, admodum parum differet a radice minima æquationis propoſitæ, ex qua hæc curtando formata eſt.

§. 565. Poteſt autem hæc radix errore quantumvis parvo reperiri multis modis. Prima æquatio cum ſimplex ſit, exhibet, $z = -\frac{A}{B}$; altera ſolvetur per regulas conſuetas. Tertia absque errore ſenſibili ad quadraticam deprimi poteſt, ſi in termino vltimo loco vnius z ſcribatur $-\frac{A}{B}$, vt hic terminus evadat $-\frac{AD}{B}z^2$. Commode etiam hic valor in ſecundam æquationem inſeretur, quæ ea re convertetur in ſimplicem,

$$o = A + Bz - \frac{AC}{B}z$$

$$\text{vel } o = AB + BBz - ACz$$

$$\text{vnde fit } z = \frac{AB}{AC - BB},$$

quo hic vtemur.

SOLVTIO.

§. 566. Si iam data ſit æquatio

$$x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = o$$

cuius radicum vnam ab 5, 5 parum differre, repertum eſt, ponatur vera radix eſſe 5, 5 + z ſubſtituaturque hic valor in locum x eius æquationis, neglectis dignitatibus litteræ z, quæ quadraticam excedunt: erit

$$\begin{array}{rcllll}
x^3 & = & 166{,}375 & + \; 90{,}75z & + \; 16{,}5zz \\
-10x^2 & = & -302{,}5 & - \; 110{,}\; z & - \; 10{,}\; zz \\
-130x & = & -815{,} & - \; 130{,}\; z & \\
+850 & = & +850{,} & & \\
\hline
o & = & -101{,}125 & - \; 139{,}25z & + \; 6{,}5zz
\end{array}$$

Hæc

Hæc iam æquatio ſi cum vniverſali quadratica $o = A + Bz + Czz$ comparetur, apparet eſſe, correctis erroribus, qui in æquationem irrepſerunt,

$$A = -\ 1,125$$
$$B = -\ 149,25$$
$$C = 6,5$$

Hinc vero fit
$$AB = 167,90625$$
$$AC = -\ 7,3125$$
$$BB = 22275,5625$$

& hinc porro $AC - BB = -\ 22282,875$. quæ ſi ſubſtituantur in locum litterarum regulæ $z = \frac{AB}{AC - BB}$, per quam radix æquationis $o = A + Bz + Czz$ vero proxima detegitur, reperitur

$$z = \frac{167,90625}{-\ 22282,875}$$

quæ fractio per numeros decimales expreſſa dat $z = -\ 0,0075352$.

Quare cum ſit numerus $5,5 + z$ æquationis propoſitæ radici illi, quam quæri poſuimus, admodum propinquus, erit radix illa proxime $= 5,5 - 0,0075352 = 5,4924648$.

Hoc quoque numero ſi quis exactiorem deſideraverit, poſito iam $x = 5,4924648 + z$, idem calculus denuo inſtituendus erit.

Scholion.

§. 567. Per eandem regulam numerorum radices cubicæ, quartæ, quintæ, & his ſuperiores extrahentur. Sit numeri 30 radix cubica quantumvis accurate exhibenda. Quia ergo 3 eſt radix cubi dato hoc numero proxime minoris; ponatur radix quæſita eſſe $3+z$; erit $30 = 27 + 27z + 9zz$, neglecto ſcilicet z^3 ob parvitatem: & $0 = -3 + 27z + 9zz$. Eſt ergo in regula $A = -3$, $B = 27$ & $C = 9$; hinc $AB = -81$, & $BB = 729$, $AC = -27$, & $AC - BB = -756$. Ergo $z = \frac{81}{756} = 0,1071$, & radix quæſita proxime $= 3,1071$.

THEOREMA X.

§. 568. *Si quantitas quæcunque realis* E *diviſa per impoſſibile* $R + I$, *compoſitum ex reali* R *& imaginario quocunque* I, *quotum reddiderit cuiuscunque formæ; eadem diviſa per* $R - I$, *quotum reddet, a priori ſolis ſignis imaginariorum differentem.*

DEMONSTRATIO.

Diviſo enim E per $R + I$ quotus partim ex realibus conſtabit, partim ex imaginariis: quia ſive ex ſolis realibus conſtare ponatur, ſive ex ſolis imaginariis, multiplicatus in $R + I$ quantitatem realem E producere nequit. Notet *r* omnes terminos quoti reales, *i* autem

i autem omnes imaginarios coniunctim. Erit $E = Rr + Ri + Ir + Ii$; atque Rr quidem & Ii quantitates reales erunt, §. 421. reliquæ autem Ri & Ir imaginariæ. Iam quia E realis ponitur, erit $Rr + Ii = E$, & $Ri + Ir = 0$. Ergo quoque $Rr + Ii - Ri - Ir = E$, id eſt $E = (R - I)(r - i)$. Quare E diviſa per $R - I$ reddet quotum $r - i$, qui a priori $r + i$ ſolis ſignis imaginariorum differt.

Corollarium I.

§. 569. Hinc, ſi æquatio dividi poteſt per ſimplicem $x + r + i$, notante nunc quoque i quantitatem imaginariam, & r realem, ſitque adeo $-r-i$ radix æquationis, eadem quoque per $x + r - i$ dividetur, atque radicem continebit impoſſibilem $+r+i$. Eunt ergo radices impoſſibiles in æquationibus ſemper numero pari; poteſtque, quacunque earum ſumpta, reperiri alia, quæ, ſi illi addatur, ſummam realem exhibeat. Nam $r + i + r - i = 2r$, & $-r + i - r - i = -2r$.

§. 570. Æquationum autem ſimplicium, per quas duæ iſtæ radices impoſſibiles exhibentur, altera ducta in alteram, æquatio quadratica rationalis fit. Nam $x + r + i$ ſi multiplicetur in $x + r - i$, factum prodit $(x + r)^2 - ii$, in quo vtrumque quadratum reale eſt.

Corollarium II.

§. 571. Cum ergo & æquatio ſimplex, quæ radicem realem exhibet, in aliam eius generis æquationem ſimplicem ducta, æquationem quadraticam realem det, etſi non ſemper rationalem: quælibet æquatio alicuius eorum ordinum, quorum index eſt numerus par, ex æquationibus quadraticis realibus conſtabit in ſe invicem ductis; ſi vero impar fuerit exponens ordinis, ad quem æquatio pertinet, ad quadraticas iſtas æquationes ſimplex accedet, itidem realis. Si index ordinis fuerit $2n$, erit n numerus æquationum iſtarum quadraticarum: ſi vero index ordinis fuerit $2n+1$, ad eundem quadraticarum numerum æquatio ſimplex accedet.

Corollarium III.

§. 572. Separata primo, ſi opus ſit, reali ſimplici, ſi æquatio in quadraticas reales ſoluta intelligatur, quarum hæc forma generalis erit

$$x^2+px+q=0$$

radices eius omnes, præter illam, quæ in ſimplici ſeparata ineſt, ad hanc formam redibunt:

$$x=-\tfrac{1}{2}p\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}pp-q)}\quad.$$

neque erit in æquatione radix impoſſibilis, quæ per hanc formam exhiberi nequeat: in qua cum p & q quantitates reales ſint, licet non ſemper ſint rationales, impoſſibilitas ab eo ſolo pen-

pendebit, quod $\frac{1}{4}pp - q$ ſit quantitas negativa. Quare omnis radix impoſſibilis, cuiuscunque æquationis, reduci poterit ad hanc formam $\alpha \mp \sqrt{-\beta}$, indeque porro ad ſimpliciſſimam iſtam $\alpha \mp \beta\sqrt{-1}$, notantibus α & β quantitates reales.

Scholion.

§. 573. Reperiri etiam poſſunt radices æquationum cubicarum & biquadraticarum vniverſales, & particulares, quæ ſcilicet ad æquationes certarum formarum reſtringuntur, aliæ. Verum hæc adeo parvi vſus ſunt, vt hic non videantur addenda eſſe.

SECTIO X.

DE PROBLEMATIBVS INDETERMINATIS.

PROBLEMA LXIII.

§. 574.

Invenire duos numeros, quorum quadrati in ſummam collecti dent cubum alterutrius eorum numerorum.

PRÆPARATIO.

§. 575. Sint numeri x & y; erit $x^2 + y^2 = y^3$, in qua æquatione cum duæ ſint literæ

teræ incognitæ, neque præter eam alia æquatio in problemate contineatur: non poterit id ita ſolvi, vt numeri determinati producantur. Quod præſtari poteſt, id ſolum eſt, vt æquationi ea forma inducatur, quæ clariſſime oſtendit, quomodo vnus numerorum quæſitorum pendeat ab altero; quo ſcilicet, vno numerorum pro arbitrio ſumpto, alterius inventio, quantum poteſt, facilitetur.

SOLVTIO.

§. 576. Æquatio autem $x^2 + y^2 = y^3$, transpoſitis terminis fit $x^2 = y^3 - y^2$, & hinc

$$x = \mp y\sqrt{(y-1)}.$$

Vnde patet, ſi aſſumatur numerus y, cuius cubo ſumma quadratorum æqualis ſit reddenda, duos ſemper x quæſtioni ſatisfacere, poſitivum alterum, alterum negativum, ſed eiusdem magnitudinis; ſique y maior ſumatur vnitate (vt, integer atque poſitivus) numerum x ſemper poſſibilem fore, atque tanto magis a nihilo receſſurum, quo maior ſumitur y: ſed ſi y negativus ſumatur vel fractus verus, x fore impoſſilem, quia $\sqrt{(y-1)}$ in hac ſumptione imaginarium evadit: tandem x rationalem futurum, ſi y quadratum aliquem vnitate exceſſerit, atque integrum, ſi y fuerit integer; adeoque minimum nume-

rorum

rorum integrorum, qui pro y ſurrogatus, x integrum atque rationalem reddit, eſſe 2; deinde 5, 10, 17 & ita porro, æque vtiles eſſe; qui quidem dant x iſtos: ad $y = 2$, eſt $x = 2$; ad $y = 5$ eſt $x = 10$, ad $y = 10$ eſt $x = 30$, ad $y = 17$ eſt $x = 68$, generatimque ſeries numerorum x reperitur, ſi numerus quadratum vnitate excedens, per eius quadrati radicem multiplicetur. Fit ergo his poſitis y neceſſario quæſitorum minor.

§. 577. Et hoc modo x elicitur ex aſſumpto y. Sed ſi x ſumatur, non ita facile reperitur y, quia æquatio $y^3 - y^2 = x^2$ vel $y^3 - y^2 - x^2 = 0$, per quam y ex littera x datur, cubica eſt, ex qua tamen præcipuæ affectiones numeri y ad quemlibet x colligi poſſunt.

Scholion.

§. 578. Hæc eſt ſolutio problematum, quæ *Indeterminata* dicuntur. Quia certus aliquis quæſiti valor, vel pauci aliqui valores, per problema non ſuggeruntur; neceſſe eſt, vt quærantur omnes, qui prodeunt, litterarum x, y, & ſimilium, quæ in problema ingrediuntur, quavis hoc vel illo modo explicata: quod aliter fieri non poteſt, quam ſi mente percurramus omnes magnitudines, quæ litteræ illi tribui poſſunt, atque omnia quantitatum genera, quæ poteſt denotare, atque ex theorematibus, de æquationum natura, traditis, quanta ac qualia ad quamvis ſumptionem futura ſint, quæ per reliquas eius generis litteras denotantur, concludamus.

§. 579. Poteſt autem quælibet quantitas, perinde ac linea recta finita, porro creſcere, ac creſcendo ſuperare omnem magnitudinem finitam, datam vel dabilem. Poteſt decreſcere ſic, vt tandem minor fiat quacunque eiusdem generis magnitudine finita, data vel dabili, atque deinde prorſus evaneſcere. Id de quantitate negativa non minus verum eſt, quam de affirmativa, vtpote quæ ab illa per naturam ſuam non differt. Verum & quantitas affirmativa, ſi vltra nihilum decreſcere ponatur, negativa fit, ac porro decreſcens, id eſt, negative creſcens, omnem tandem quantitatem negativam ſuperat.

DEFINITIO X.

§. 580. Quantitas omni dabili maior etiam *infinite magna* dicitur, & quantitas omni dabili minor, *infinite parva*.

Scholion.

§. 581. Infiniti notio negativa eſt; excludit terminos, qui vel per naturam rei nulli ſunt, vel non conſiderantur. Id ipſum quoque

que vocabulum innuit; eſt enim *infinitum*, quod finitum non eſt, ſive, quod terminis caret. Non poteſt quantitas exiſtere, niſi cum terminis ſuis, vt linea recta, cum initio & fine. Sed ad terminos iſtos attendere non opus eſt, vbi nihil in re mutatur, quicunque ſumantur. Si linea recta aliam eius generis lineam ad angulos rectos ſecet, non mutantur anguli, vtcunque vna illarum linearum vel vtraque producatur: vt generatim, cruribus anguli rectilinei vtcunque productis, ipſe tamen angulus perſeverat. Quare rectas angulum includentes tanquam infinitas conſideramus, ſolentque geometræ, cum vnam rectarum alteri ad perpendiculum ducere iubent, ſæpe addere, eas rectas infinitas intelligi, vt innuant, earum magnitudinem hic in cenſum non venire, vtpote a qua ſitus vnius ad alteram, vel magnitudo anguli quem includunt, nullo modo pendet.

§. 582. Quod autem ad ideam *infinite magni* attinet, quod & ipſum ſæpe abſolute infinitum dicitur, eius vera ratio exemplo optime declarabitur. Rectæ AB ſint in dato plano perpendiculares AC & BD, quæ ergo parallelæ erunt. Is paralleliſmus, quid ſibi velit, breviſſime quis exprimet & clariſſime, ſi dixerit, rectas AC, BD non concurrere, vtcunque pro- F.37.

ductas.

ductas. Qui ait eas concurrere poſſe apud quodcunque plani punctum, errat. Sed minus errat qui punctum illud concurſus magis ab AB removet, quam qui minus: poteſtque punctum illud adeo removeri, vt idem nobis naſcatur ſenſus, ſive parallelas quis dicat rectas AC, BD, ſive concurrentes ad eam diſtantiam; vt ſi nominetur ea, ad quam aliqua ſtellarum fixarum a nobis remota eſt. Verum qui punctum concurſus ponit ad diſtantiam hac quoque maiorem, imo maiorem omni alia, quæcunque dari vel mente concipi poteſt, omnem prorſus errorem aufert, ac idem plane dicit, ponendo AC, BD concurrere in infinitum productas, quod indicat, qui eas concurrere vnquam poſſe negat. Talis eſt conceptus infinite magni, ipſe quoque, ſi recte examinetur, negativus. Adhibetur autem vtiliſſime, cum ad declarandas connexiones idearum, tum quod propoſitionibus negativis induit ſpeciem affirmativarum, quæ per ſigna algebraica exprimi ſolæ poſſunt.

§. 583. Quantitas *infinite parva* multis modis concipi poteſt, inter quos eſt diviſio quantitatis cuiuscunque finitæ per infinite magnam. Si enim ſit $A : V = B : Q$, notet autem V quantitatem aliquam datam, quæ, ſi velimus, dici poſſit vnitas, & B aliam itidem datam, quæ-

quæque adeo finitæ eſt magnitudinis, perinde ac V; creſcatque A, neceſſe eſt decreſcere Q, atque præ B tanto minorem fieri, quo maior ſit A reſpectu V. Nullus eius decrementi finis eſt; nam prorſus evaneſcere, vel in nihilum converti, Q ita decreſcens non poteſt. Si iam A omni dabili maior ſumatur, Q omni dabili minor erit.

§. 584. Quantitates infinite magnas ac infinite parvas determinatas non eſſe, vel ipſa denominatio innuit. Non mutatur infinite magni conceptus, ſi maius id cogitem; imminuere quoque id poſſum, dummodo non adeo minuam, vt quantitate aliqua determinata minus evadat. Sic & ſi quantitatem cogitem infinite parva minorem, ea tanto magis infinite parva erit. Ergo & inverſe quantitas infinite parva alia eius generis quantitate maior eſſe poterit.

§. 585. Id autem non impedit, quo minus infinite magni ad aliud infinite magnum quælibet eſſe poſſit ratio, vel infinite parvi ad infinite parvum. Si duæ rectæ ab eodem termino, continuo puncti fluxu, ita creverint, vt quod ad vnam dato tempore accedit, ſemper æquale ſit ei, quod ad aliam accedit eodem tempore; eæ rectæ æquales erunt quocunque temporis inſtanti ſumantur, ſumma autem dupla

pla erit alterutrius. Verum rectæ illæ, ſi ita creſcere pergant, tandem omnem magnitudinem dabilem ſuperant. Sic & ſi iterum ſumatur A : V = B : Q, prætereaque A : V = C : P, litteris A, V eadem notantibus in vtraque analogia, erit ſemper B : Q = C : P, & B : C = Q : P, quæcunque fuerint quantitates, per A, V denotatæ. Atqui ſi A infinite magna ſumatur, ad V, B & C finitas, Q & P infinite parvæ erunt.

§. 586. Differt idea alicuius magnitudinis ingentis, ab idea infinite magni; & idea vehementer parvi ab infinite parvi idea. Verum quo maius ingens illud concipitur, etiamſi ſemper concipiatur tanquam determinatum, eo propius eius idea ad ideam infinite magni accedit; neque aliter idea minutiſſimi cuiusdam determinati, cum idea infinite parvi, in mente noſtra tandem confunditur.

§. 587. Atqui ſi ad rem ingentem acceſſerit id, cuius reſpectu ingens dicitur, ſemel, bis, ter, vel ſecundum alium numerum non valde magnum, quantitatem illius rei non concipimus mutari, etſi vtique augeatur. Si in oceanum incidat aquæ guttula, is vtique creſcit, tantoque magis, ſi ei mille guttæ accedant. Verum cum ingentis illius aquarum copiæ nulla nobis clara idea ſit, ideam quantitatis pri-

priſtinæ, ab idea eiusdem tantillo auctæ, non diſtinguimus. Sic etſi pulcre noverim, centrum cuiuscunque ſtellæ fixæ magis ab oculo meo diſtare, quam punctum aliquod ſuperficiei, minus autem, quam huic oppoſitum; tamen tres has magnitudines mihi non aliter obverſantur, quam ſi forent prorſus eædem, quia earum nullam clare percipio.

§. 588. Ergo tanto minus quantitas infinite magna creſcet, ſi ad eam acceſſerit illa, reſpectu cuius infinite magna concipitur, id eſt, quæcunque determinata; vel decreſcet, determinatæ alicuius ſubtractione. Neque magis quantitas quæcunque determinata, per additionem infinite parvæ augebitur, aut minuetur huius ſubtractione. An minor ſit tangens anguli recti, ſi ab ea radius, vel decuplum aut millecuplum radii, ſubtrahatur?

§. 589. Habet ergo quantitas finita quæcunque ad infinite magnam, rationem nihili, vtpote, cuius additione vel ſubtractione hæc non magis mutatur, quam quantitas creſcit additione nihili, vel decreſcit, eius ſubductione. Eſtque adeo, vt nihilum ad quantitatem quamcunque finitam; ſic eadem quantitas finita, vel quæcunque alia, ad infinite magnam. Hoc ſenſu quantitates finitæ quævis dici poſſunt nihila: relative ſcilicet, non abſolute.

§. 590. Et, quia quantitatis infinite parvæ eadem ad quantitatem finitam habitudo eſt, quæ eſt finitæ ad infinite magnam: etiam infinite parvi ad quantitatem quamcunque finitam eadem erit ratio, quæ eſt nihili ad eandem quantitatem finitam, vel quamcunque aliam; poteritque hoc ſenſu quantitas infinite parva nihilum dici, quamvis ſpectetur vt aliquid. Relative certe nihilum eſt.

§. 591. Solet quantitas infinite magna hoc charactere ∞ notari, qui non aliter vſurpatur, quam aliqua ex litteris, per quas quantitates deſignantur. Quantitas ergo infinite parva generatim hoc modo $\frac{1}{\infty}$ denotari poteſt. Vnde patet quid ſibi velit $\infty + a = \infty$; $\infty - a = \infty$, $a + \frac{1}{\infty} = a$; $a - \frac{1}{\infty} = a$, & quæ ſunt huiusmodi.

§. 592. Quia $0 : a = b : \infty$, erit $\frac{0}{a} = \frac{b}{\infty}$, quascunque quantitates finitas notaverint a & b, & $\frac{a}{0} = \frac{\infty}{b}$, & $0 \times \infty = ab$. Quantitas $\frac{b}{\infty}$ infinite parva eſt, & $\frac{\infty}{b}$ infinite magna.

§. 593. Similia & ex hac analogia $0 : a = \frac{1}{\infty} : b$ deducuntur, ſcilicet $\frac{0}{a} = \frac{1}{\infty b}$, & $\frac{a}{0} = \infty b$, & $\frac{a}{\infty} = 0b$. Quantitas $\frac{1}{\infty b}$ hic itidem infinite parva eſt, & ∞b infinite magna.

§. 594. Sed $0 : 0$ notat rationem quamlibet, quia quælibet ratio, vtroque eius termino in 0 ducto, fit $0 : 0$, atque ex æqualibus factis $0.a = 0.b$ proportio $0 : 0 = a : b$ elicitur, quidquid notent a & b.

§. 595. Sic & $\infty : \infty$ notat rationem quamlibet pro arbitrio ſumendam, quia ex omni ratione $a : b$, ſi vterque terminus dividatur per 0, fit $a : b = \frac{a}{0} : \frac{b}{0} = \infty : \infty$.

§. 596. Secundum has ergo notiones percurrendi erunt valores vnius litterarum, quæ in æquatione problematis indeterminati notant quæſita, eritque examinandum, qualis ad quamlibet ſuppoſitionem prodeat valor litteræ alterius. Duas enim tantum ponimus huiusmodi litteras x & y. Si inſit & tertia z, huius valor primum determinandus eſt, deinde circa reliquas x & y eodem modo verſandum: tum vero valore tertiæ huius litteræ z aliter atque aliter ſumpto, idem quod primo, ad quamlibet

bet harum ſumptionum faciendum, quatenus ſcilicet ire licet. Neque enim omnia, quæ de æquationibus quæri poſſunt, detecta ſunt; repertorum autem præcipua tantum hic tradere licuit.

PROBLEMA LXIIII.

§. 597. *Invenire duos numeros, quorum alter pendet ab altero eo modo, quem æquatio* $x^3 - xxy = 43x - 9y - 42$ *definit, ſi alteruter numerus denotetur per* x, *alter vero per* y.

SOLVTIO.

§. 598. Tranſpoſitis æquationis terminis, fit

$$x^3 - 43x + 42 = xxy - 9y$$

& hinc $y = \frac{x^3 - 43x + 42}{xx - 9}$

vnde y colligi ſatis prompte poteſt, ſi aſſumatur x. Cum autem, vt problema cum aliqua vniverſalitate ſolvatur, percurrendi ſint præcipui numeri, qui per x denotari poſſunt; erit ad $x = \infty$, $y = \frac{x^3}{x^2} = x$, reliquis evaneſcentibus, cætera nihil novi habent, fitque adeo, ad

$x = +\infty$	$y = +x$
$+10$	$+6,7$
$+9$	$+5,3$
$+8$	$+3,8$
$+7$	$+2,1$
$+6$	0
$+5$	-3
$+4$	$-9,4$
$+3$	∞
$+2$	$+7,2$
$+1$	0
0	$-4,6$
-1	$-10,5$
-2	-24
-3	∞
-4	$+21,4$
-5	$+8,2$
-6	$+3,1$
-7	0
-8	$-2,1$
-9	$-4,1$
-10	$-5,8$
$-\infty$	$-x$

Scholion.

§. 599. Atque hoc modo, ſi y detur per quamcunque formulam, quam ingrediuntur x & conſtantes, ſubſtitutis in hac formula loco x numeris, qui ab 0 excurrunt verſus vtramque par-

partem, 1, 2, 3, 4 &c, vel -1, -2, -3 &c, vel qui ab $+\infty$ verſus $-\infty$ ſenſim decreſcunt, ſeries oritur numerorum, quorum quilibet per formulam illam generatim exprimitur: quare, alia atque alia formula aſſumpta, infinitæ produci poſſunt eiusmodi ſeries.

§. 600. Termini ſeriei, niſi ambigui ſint, vel affirmativi ſunt omnes, vel omnes negativi, vel partim affirmativi partim negativi, vt in ea, quam hic produximus. Poſſunt & partim poſſibiles eſſe partim impoſſibiles, ſerie modo ab his ad illos, modo ab illis ad hos, transſiliente. Vt, ſi poſita $zz = y$, vel $z = \sqrt{y}$, per formulam problematis quæratur, non y, ſed z, poſſibiles prodeunt z, ſi pro x ſumatur aliquis numerus poſitivus, maior quam 6, impoſſibiles, ſi ſumatur minor quam 6 maior autem quam 3, deinde iterum poſſibiles, ſi x minor ſumatur quam 3, maior autem quam 1, & ita porro. Eosdem terminos partim irrationales eſſe poſſe partim rationales, integros vel fractos, vltro apparet.

§. 601. Cæterum quod in ſerie numerorum y contigit, vt non fieret vnquam tranſitus ab y affirmativo ad y negativum, vel a negativo ad affirmativum, niſi per intermedium vel $y = 0$ vel $y = \infty$, vniverſaliter ita ſe habet, quando y ſecundum legem per aliquam for-

formulam determinatam, continuo mutatur creſcendo vel decreſcendo. Nequit enim quantitas ſenſim per omnes augmenti vel imminutionis gradus e poſitivorum conditione in conditionem negativorum tranſire, vel ex hac in illam, niſi per limitem, qui & poſitivus dici poteſt & negativus, cum proprie ſit neutrum. Talis autem eſt o, quia $+ 0 = - 0$. Talis etiam eſt ∞. Eſt enim $\frac{1}{0} = \frac{1}{-0}$. Sed $\frac{1}{0} = \infty$ & $\frac{1}{-0} = - \infty$, ergo $\infty = - \infty$. Præter hos autem poſitivi limes nullus eſt, quo a negativo dirimitur. Omnis enim quantitas determinata vel poſitiva eſt, vel negativa; quamvis ſæpe quæſtioni æque ſatisfaciat, ſive huius ſive illius conditionis ſumatur.

PROBLEMA LXIIII.

§. 602. *Datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.*

PRÆPARATIO.

§. 603. Si duo quadrati ponantur x^2 & y^2, æquatio $a^2 = x^2 + y^2$ oſtendit rem perfici poſſe infinitis modis, ſi numeri irrationales non excludantur. Tranſpoſitis autem terminis, vt fiat $a^2 - x^2 = y^2$, non minus clare perſpicitur, quomodo quæſitorum vnus ab altero, atque à numero dato, pendeat.

Verum quadrati proprie dicuntur, quorum radices rationales ſunt, atque hæ plerumque integræ deſiderantur, non fractæ. Ad hos ſi problema reſtringatur, tum demum alicuius momenti ſit, debet autem ad æquationem accedere alia, quæ numerorum quæſitorum quemvis rationalem reddat, ſi alter rationalis ſumatur. Rationalis autem eſt numerus, quicunque ex rationalibus aliis producitur per quascunque operationes arithmeticas, inter quas non eſt radicis alicuius extractio. Vt, ſi x, n, & a rationales fuerint & integri, erit $nx + a$, vel $nx - a$ neceſſario rationalis, & integer. Cum ergo numerus rationalis integer ex alio exprimi poſſit multis modis, ea hic eligetur formula, quæ ad æquationem ducat, ex qua facillime perſpicitur, qualis ſumendus ſit numerorum vnus, vt alterius forma fiat ea, quæ quæritur.

SOLVTIO.

§. 604. Sit primus numerorum quæſitorum x, alter vero, qui dictus fuit y, ſit iam $nx - a$, notante n numerum, ſecundum ea, quæ mox detegentur, pro lubitu ſumendum. Erit

$$aa = xx + nnxx - 2nax + aa,$$

hinc $0 = (1 + nn)xx - 2nax$

vel $(1 + nn)x = 2na$

& $x = \frac{2na}{1 + nn}$.

Si iam n rationalis ſumatur, & x rationalis erit, & hinc quoque y. Quis autem n ſumendus ſit, vt x integer prodeat, ſiquidem a^2 datus ſit, non ita facile apparet, hic certe tentaminibus relinquendum eſt.

Scholion.

§. 605. Sit $n = 2$, erit $x = \frac{4a}{5}$. Quare ſi $a = 5$ erit $x = 4$, & hinc $y = 8 - 5 = 3$. Numeri ergo erunt 4 & 3; & manifeſtum eſt eſſe $16 + 9 = 25$.

Ad hanc facilitatem calculus ſemper redibit, ſi fuerit $a = 1 + nn$, id eſt, ſi radix quadrati dati vnitate ſuperaverit aliquem quadratum: Eritque hoc caſu $x = 2n$ & $y = 2nn - a$. Quo obſervato, quadrati integri in duos quadratos integros ſolvendi, facile reperientur.

Sit $n = 1$, erit $nn + 1 = 2 = a$, ergo $x = 2$ & $y = 0$, eſtque $4 = 4 + 0$.

Sit $n = 2$, erit $nn + 1 = 5 = a$, ergo $x = 4$ & $y = 8 - 5 = 3$, quos numeros habuimus.

Sit $n = 3$, erit $nn + 1 = 10 = a$, ergo $x = 6$ & $y = 18 - 10 = 8$, eſtque $100 = 36 + 64$.

Sit $n = 4$, erit $nn + 1 = 17 = a$, ergo $x = 8$ & $y = 32 - 17 = 15$, eſtque $289 = 64 + 225$. Sit $n = 5$, erit $nn + 1 = 26 = a$, ergo $x = 10$, & $y = 50 - 26 = 24$, eſtque $676 = 576 + 100$.

PROBLEMA LXVI.

§. 606. *Invenire duos numeros quadratos, quorum differentia ſit itidem quadratus.*

SOLVTIO.

§. 607. Sit ſemiſumma numerorum x, ſemidifferentia y, erunt numeri, $x + y$, & $x - y$, quorum quadrati cum ſint $x^2 + 2xy + y^2$ & $x^2 - 2xy + y^2$, erit horum differentia $4xy$ quadratus, cuius radix non poteſt eſſe numerus impar. Sit ergo $2n$ radix iſta, vt ſit $4xy = 4nn$, erit $xy = nn$. Ergo quoque xy quadratus erit, ac ſumptus quicunque quadratus nn, ſi dividatur in duos factores, atque hi ſumantur pro x & y, poterit quæſtioni ſatisfieri.

Scholion.

§. 608. Sit $n = 1$, erit $nn = 1$. Si ergo fiat $x = 1$, $y = 1$, erit $x + y = 2$, & $x - y = 0$. E quibus numeris ſi fiant quadrati 4, 0, horum differentia eſt 4, quadratus.

Sit $n = 2$, erit $nn = 4$, ſi ergo fiat $x = 4$ & $y = 1$, erit $x + y = 5$ & $x - y = 3$, quorum quadrati ſunt 25 & 9. Horum autem differentia eſt 16, quadratus.

Atque hoc modo pergendo elici poſſunt iidem numeri integri, qui ſuperiori problemate reperti ſunt. Fracti eadem facilitate occurrent, ſi nn ſolvatur in factores fractos.

PROBLEMA LXVII.

§. 609. *Summam duorum quadratorum in alios duos quadratos ſolvere.*

Solutio.

§. 610. Quadrati dati ſint a^2 & b^2, radices autem quadratorum quæſitorum, $x-a$ & $nx-b$, erunt quadrati quæſiti $(x-a)^2$ & $(nx-b)^2$, atque

$$x^2-2ax+a^2+n^2x^2-2nbx+b^2=a^2+b^2$$

hinc $x^2-2ax+n^2x^2-2nbx=0$

vel $x-2a+n^2x-2nb=0$

& $x+n^2x=2nb+2a$

ergo $x=\frac{2nb+2a}{nn+1}$.

Poterit ergo quæſtioni ſatisfieri, quocunque numero pro n ſumpto, modo is non ſit vnitas. Si enim ponatur $n=1$, fit $x=b+a$, hinc numerorum quæſitorum is, qui dictus eſt $x-a$, fit b, & non ſolvitur ſumma quadratorum in quadrata a datis a^2, b^2 diverſa.

Si vero ponatur $n = 2$ fit $x = \frac{4b + 2a}{5}$, ſi ergo ſit $b = 2$, & $a = 3$, fit $x = \frac{14}{5}$, & hinc $x - a = - \frac{1}{5}$, & $nx - b = \frac{28}{5} - 2 = \frac{18}{5}$. Horum numerorum quadrati, $\frac{1}{25}$ & $\frac{324}{25}$ ſummam dant $\frac{325}{25} = 13$, qui numerus ſummæ quadratorum $4 + 9$ æqualis eſt.

PROBLEMA LXVIII.

§. 611. *Dantur duo numeri, eſtque cuilibet addendus tertius, qui eum, cui additur, quadratum reddat, ſive affirmativus ſit quilibet datorum, ſive negativus.*

SOLVTIO.

§. 612. Numeri dati ſint a & b, quæſitus autem x, erit $a + x$ quadratus, pariterque $b + x$. Sit radix prioris quadrati $m + n$, poſterioris, $m - n$. Erit

$$a + x = mm + 2mn + nn$$
$$b + x = mm - 2mn + nn$$

hinc $a - b = 4mn$.

Si ergo quarta pars differentiæ numerorum datorum mn in duos factores ſolvatur m & n; radices quadratorum, quæ quæſito ſatisfaciunt, $m + n$ & $m - n$, facile componentur. Ex alterutro autem horum quadratorum elicietur x.

Scholion.

§. 613. Sit $a = 17$, $b = 5$, erit $a - b = 12$, & hinc $mn = 3$. Sumpto ergo $m = 3$ & $n = 1$, erit $m + n = 4$ & $m - n = 2$. Ergo $a + x = 16$ & $x = -1$, quod idem prodit ex $b + x = 4$, & patet eſſe $17 - 1$ quadratum, pariterque $5 - 1$.

Sit $a = 14$ & $b = 6$, erit $a - b = 8$, & $mn = 2$. Si ergo fiat $m = 2$ & $n = 1$, erit $m + n = 3$ & $m - n = 1$. Ex priori fit $x = 9 - 14 = -5$, idemque prodit ex poſteriori $1 - 6$, eſtque $14 - 5 = 9$, & $6 - 5 = 1$.

Sit $a = -5$, $b = +19$, erit $a - b = -24$, & $mn = -6$, quare ſi ſumatur $m = -3$ & $n = +2$, erit $m + n = -1$, & $m - n = -5$. Prius dat $-5 + x = 1$, hinc $x = 6$. Eſtque $-5 + 6 = 1$ & $+19 + 6 = 25$.

Sit $a = 17$, $b = 7$, erit $a - b = 10$, hinc $mn = \frac{5}{2}$. Sit $m = 5$ & $n = \frac{1}{2}$, erit $m + n = \frac{11}{2}$, & $m - n = \frac{9}{2}$, ergo $x = \frac{121}{4} - 17 = \frac{121 - 68}{4} = \frac{53}{4}$. Eſtque $17 + \frac{53}{4} = \frac{121}{4}$, & $7 + \frac{53}{4} = \frac{81}{4}$, quarum fractionum vtraque quadrata eſt.

PROBLEMA LXVIIII.

§. 614. *Invenire duos numeros, a quorum quadratis ſi ſubtrahatur numerorum ſumma, relinquantur quadrati.*

SOLVTIO.

§. 615. Sit prior numerus x, alter $x+b$, erit numerorum ſumma $2x+b$, quadrati autem ex numeris x^2 & $x^2+2bx+b^2$. Patet ergo ſi fuerit $b=1$, ſubtracta a poſteriori quadrato x^2+2x+1 numerorum ſumma $2x+1$ relinqui quadratum xx. Reſtat vt eadem ſumma ab x^2 ſubtracta quadratus relinquatur, id eſt vt x^2-2x-1 ſit quadratus. Sumatur huius quadrati latus $x-n$, erit

$$x^2-2x-1=x^2-2nx+nn$$

$$2nx-2x=nn+1$$

$$x=\frac{nn+1}{2n-2}.$$

Sumpto ergo n quocunque, dabitur x & hinc $x+1$.

Scholion.

§. 616. Plurima huiusmodi problemata, in quibus non datæ magnitudinis numeri quærendi proponuntur, ſed datæ alicuius formæ, vt quadrati, cubi, biquadrati, vel ex dignitatibus atque ipſis numeris hoc vel illo modo compoſiti, vel ex *Arithmeticis Diophanti* poterant addi. Eſtque in his exemplorum copia in primis vtilis, quia vniverſalis harum ſolutionum via nulla eſt; ſpeciales fere ab analyſtæ pendent ingenio. Aliquando vnus numerorum immediate ex altero elicitur, aſſumpto, tanquam datus eſſet; aliquando tertius quidam ſumitur, ex quo quæſitorum vterque haberi poteſt, per formulam vel æquationem commodam. Neque aliter procedimus, vbi duobus plures numeri inveſtigandi ſunt. Non eſt difficile tales formulas excogitare; ſed prævidere, quænam id, quod per eas quæritur, quam ſimpliciſſime ſint oſtenſuræ, difficile eſt. In vniverſum autem tanto promptius quis quamlibet quæſtionem expediet, quo plura rei, circa quam ea quæſtio verſatur, attributa prænoverit. Sed nobis his immorari non licet.

PROBLEMA LXX.

§. 617. *Datis duobus numeris integris, invenire duos alios, qui ſi priorem datorum multiplicent, ac facta dividantur per alterum datorum, idem vtrinque relinquatur.*

SOLVTIO.

§. 618. Dati numeri ſint n & d, quæſiti x & y, quos oportet tales eſſe, vt ſi nx diviſus per d relinquit r, etiam ny per d diviſus eundem r relinquat. Sit quotus prioris diviſionis p, & quotus alterius q, numerus autem x maior quam y; erit

$$nx = dp + r$$

$$ny = dq + r,$$ hinc minori a maiore

ſubtracto $nx - ny = dp - dq$,

vel $n(x - y) = d(p - q)$.

Sumtis

Sumtis ergo quotis pro arbitrio, infiniti reperientur x & y quæſito ſatisfacientes.

Scholion.

§. 619. Imo differentiam quotorum aſſumſiſſe ſuffecerit. Sit $n=3$, $d=7$, $p-q=6$, erit $x-y=\frac{7.6}{3}=14$. Sumatur ergo $x=19$ & $y=5$, quorum numerorum differentia vtique eſt 14, erit $nx=57$ & $ny=15$. Horum autem numerorum vterque ſi dividatur per 7, idem relinquitur 1.

§. 620. Vt integri prodire poſſint x & y, debet $p-q$ ita ſumi, vt $d(p-q):(n$ fiat integer, quia, ſi differentia duorum numerorum x & y fractus ſit, vterque numerus integer eſſe non poteſt. Converſa autem æquatione in hanc fractionum æqualitatem

$$\frac{n}{d}=\frac{p-q}{x-y}$$

patet, ſiquidem n & d inter ſe primi non fuerint, nihil generatim impedire, quominus $p-q$ minor ſit quam n, & hinc $x-y$ minor quam d, etiamſi omnes hæ litteræ integros denotent, *Ar.* §. 102. Si vero n & d inter ſe primi fuerint, non poterit differentia $x-y$ minor eſſe quam d, niſi fracta fuerit *Ar.* §. 113, id eſt, niſi alteruter numerorum x vel y fuerit fractus.

ctus. Si autem x minor fuerit quam d, erit tanto magis y & $x - y$ eodem d minor.

Corollarium I.

§. 621. Quare propoſitis duobus numeris quibuscunque inter ſe primis n & d, non poterunt duo alii numeri integri reperiri, dato d minores, vt x & y, per quos ſi idem n multiplicetur, facta autem nx, ny dividantur per d, idem remaneat a diviſione reſiduum. Vnde ſi ſucceſſive fiat $\frac{n}{d}, \frac{2n}{d}, \frac{3n}{d} \ldots\ldots \frac{dn}{d}$, omnia reſidua hinc nata diverſa erunt. Cumque tot huius modi fractiones formari poſſint, quot ſunt vnitates ab 1 ad d, inter hæc reſidua omnes numeri ab 1 ad d occurrent. Poterit ergo cuiusvis fractionis per denominationem minimam expreſſæ $\frac{n}{d}$ numerator ita multiplicari per aliquem integrum x denominatore d minorem, vt, ſi factum nx dividatur per d, quilibet numerus r, diviſore d minor, maneat reſiduus. Sed x ille, ad datum reſiduum r, vnicus erit.

Corollarium II.

§. 622. Quare ſi N & D numeri illi inter ſe primi fuerint, & x hunc quoque notaverit inte-

integrum pro re nata ſumendum, minorem quam D, atque r numerum integrum datum, itidem minorem quam D; poterit ſemper x ita ſumi, vt $\frac{Nx - r}{D}$ evadat numerus integer. Si enim pro x numerus ſumatur, quo per datum N multiplicato, factoque Nx diviſo per D, reſiduus maneat r, vtique, reſiduo iſto a dividendo Nx ſubtracto, quotus integer prodibit.

Corollarium III.

§. 623. Ergo quoque ſub conditionibus poſitis $Nt - m + \frac{Nx - r}{D}$ integer erit, ſi t & m ſumantur integri. Reducantur omnia ad eandem denominationem; erit etiam

$$\frac{NDt - Dm + Nx - r}{D}, \text{ vel}$$

$$\frac{N(Dt + x) - (Dm + r)}{D} \text{ numerus integer.}$$

Atque $Dm + r$ omnem numerum integrum notare poteſt, quia r poteſt eſſe quilibet integrorum a 0 ad D, poteſtque is numerus etiam negativus eſſe, ſi m fiat negativus. Quare ſi pro $Dm + r$ ſcribatur R, & X pro $Dt + x$, ad formulam ita productam

$$\frac{NX - R}{D} = Q$$

ſemper

ſemper reperiri poterit numerus integer, qui pro X ſubſtitutus reddat Q integrum, quicunque detur R, dummodo nunc quoque N & D inter ſe primi ſint. Sed quia R hic non ponitur minor quam D, infinitus erit numerus integrorum, qui pro R vſurpari poſſunt.

Corollarium IIII.

§. 624. Numerus autem X, ſi aliter ſeſe non offerat, per ipſam hanc formulam facile reperietur, ſumpto Q pro arbitrio. Si fiat $Q = 1$, quæ ſuppoſitio eſt ſimpliciſſima, fit $NX - R = D$, & $X = \frac{D + R}{N}$.

PROBLEMA LXXI.

§. 625. *Numerum fractum* $\frac{N}{D}$, *cuius denominator in duos factores ſolvi poteſt inter ſe primos* m *&* n, *in duas fractiones dirimere, quarum denominatores ſint* m *&* n, *& quarum* $\frac{N}{D}$ *ſumma ſit vel differentia.*

Solvtio.

§. 626. Sint fractiones illæ $\frac{x}{m}$ & $\frac{y}{n}$, erit ſumma $\frac{nx + my}{mn}$, quæ ponitur $= \frac{N}{D}$. Cum ergo go ex hypotheſi ſit $mn = D$, erit quoque $nx + my = N$, & hinc

$$x = \frac{N - my}{n}.$$

Vel, ſi differentia fractionum quæratur, erit

$$x = \frac{N + my}{n}.$$

In quibus formulis m & n ſunt primi inter ſe. Poterit ergo ſemper numerus integer reperiri, qui ſubſtitutus in locum y, etiam x integrum reddat. §. 623. Quo facto fractiones $\frac{x}{m}, \frac{y}{n}$ regulares evadent, ac earum denominatores erunt, qui imperabantur.

Scholion.

§. 627. Sit ſolvenda fractio $\frac{7}{12}$, ſumpto ergo $m = 4$, $n = 3$, fit $x = \frac{7 - 4y}{3}$. Sit $y = 1$, erit $x = \frac{7 - 4}{3} = 1$, vnde fracti quæſiti erunt $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, quarum vtique ſumma eſt $\frac{7}{12}$.

Sit iisdem poſitis $y = 2$, erit $x = \frac{7 + 8}{3} = 5$, hinc fractiones erunt $\frac{5}{4}$, $- \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$. Sit $y = 5$, erit $x = \frac{7 + 20}{3} = 9$. Ergo fractiones erunt $\frac{9}{4}$ & $\frac{5}{3}$, eſtque $\frac{9}{4} - \frac{5}{3} = \frac{7}{12}$.

§. 628. Poteſt adeo problema multis modis ſolvi. Si vero denominator in plures factores ſolvi poſſit inter ſe primos, labore repetito tot fractiones reperientur, ſimul ſumptæ æquales datæ illi, quot ſunt numeri inter ſe primi in quos denominator ſolvi poteſt.

§. 629. Solvetur autem quilibet numerus compoſitus, vt hic 2.2.2.3.3.5.7 in alios, qui omnes inter ſe primi ſunt, ſeorſim poſita dignitate cuiuslibet ſimplicis qui in eum ingreditur. Eruntque adeo in propoſito numeri inter ſe primi, 8, dignitas tertia ſimplicis 2; 9, dignitas ſecunda ſimplicis 3; & 5, 7 primæ ſimplicium 5, 7 dignitates. Præter 2, 3, 5, 7 nulli ſimplices in hoc numero inſunt.

PROBLEMA LXXII.

§. 630. *Numerum fractum, cuius denominator eſt alicuius numeri dignitas, in duos alios dirimere, quorum denominatores ſunt eiusdem numeri dignitates illa inferiores, & quorum datus ille fractus ſumma eſt vel differentia.*

SOLVTIO.

§. 631. Sit datus fractus $\frac{N}{D}$, qui quæruntur ſint $\frac{x}{m^r}$ & $\frac{y}{m^{t+r}}$, reductis ergo his fractionibus ad eandem denominationem, ſumma ma erit $\frac{m^{t+r}x + m^r y}{m^{t+2r}}$, vel ſub minima denominatione, $\frac{m^t x + y}{m^{t+r}}$. Huius ergo termini cum ponantur cum datis congruere, erit $D = m^{t+r}$, & $m^t x + y = N$. Vnde $y = N - m^t x$, eſtque y ſemper numerus integer, ſi x integer ſumatur. Poteſt autem ſolutio peragi diverſis modis, pro diverſo valore, qui tribuitur litteræ t.

Scholion.

§. 632. Sit fractio ſolvenda hæc $\frac{7}{8}$, erit $m = 2$ & $t + r = 3$, quia $8 = 2^3$. Si ergo ſumatur $t = 1$, & hinc $r = 2$, & $x = 1$ erit $y = 7 - 2x = 5$. Fractiones ergo erunt $\frac{x}{m^r} = \frac{1}{4}$ & $\frac{y}{m^{r+t}} = \frac{5}{8}$, quarum ſummam patet eſſe $\frac{7}{8}$.

Sit ad eandem fractionem $\frac{7}{8}$, $t = 2$, & hinc $r = 1$, erit $y = 7 - 4x = 3$, ſi x iterum ſit $= 1$, vnde fractiones erunt $\frac{x}{m^r} = \frac{1}{2}$ & $\frac{y}{m^{t+r}} = \frac{3}{8}$, patetque eſſe $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

§. 633. Eodem modo quælibet fractionum ita repertarum, cuius denominatoris dignitas altior eſt prima, denuo in duas alias dirimetur. Solent autem eæ potiſſimum quæri, quarum deno-

denominatores ſunt dignitates ſeſe ordine ſequentes. Ita ſi in fractione vltimo reperta $\frac{3}{8}$, vbi $N = 3$, $m = 2$, & $r + t = 3$, ponatur $r = 2$ & hinc $t = 1$ fit $y = 3 - 2x$, vnde ſi $x = 1$, eſt & $y = 1$. Fractiones ergo ſimul ſumptæ huic $\frac{3}{8}$ æquales, ſunt $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, quibus ſi addatur prius reperta $\frac{1}{2}$, eſt $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

§. 634. Poſſunt & fractiones per ſpecies algebraicas expreſſæ ſecundum easdem regulas eodem modo tractari. Verum eius rei ſpecialis ratio facile perſpicietur, vbi huius generis fractionum evolutio vſu venerit.

PROBLEMA LXXIII.

§. 635. *Datis poſitione duabus rectis* AB, AC *invenire punctum* D, *a quo ad rectas illas ſub datis angulis ductæ* DE, DF *ſint in data ratione.* F. 38.

PRÆPARATIO.

§. 636. Quia datur poſitio rectarum AB, AC, datur angulus CAB. Producta autem DE, donec rectæ AC occurrat, in triangulo AEC, cuius duo anguli A & E dantur, & tertius C dabitur. Punctum vero D non latebit, ſi dentur AE, & DE, vel duæ quæcunque rectæ aliæ, quarum vna per punctum D ducta, datæ AB occurrat ſub angulo dato, altera per hanc DE a recta AB abſcinditur.

SOLVTIO.

§. 637. Sit AE $= x$, & DE $= y$, ſinus autem datorum angulorum CAB, E, C, F dicantur a, e, c, f. Quia ergo eſt $\sin. C : \sin. A = AE : CE$, erit $CE = \frac{ax}{c}$, hinc $CD = \frac{ax}{c} - y$. Et quia $\sin. F : \sin. C = CD : FD$, erit $FD = \frac{ax}{f} - \frac{cy}{f}$. Quare ſi ratio DE : DF, quæ ponitur dari, ſit $m : n$, erit

$$m : n = y : \frac{ax - cy}{f}$$

& hinc $$nfy = max - mcy$$

vel $$nfy + mcy = max$$

& $$y = \frac{max}{nf + mc} = \frac{ma}{nf + mc} \cdot x$$

§. 638. Hæc æquatio omnes problematis conditiones continet: non ergo vnum aliquod punctum quæſito ſatisfaciet, ſed infinita, quæ idem præſtent, puncta poterunt reperiri, atque ad x quamlibet dari y, quæ in puncto, quale ſupponitur eſſe D, terminabitur, ſi ſub angulo E ad rectam AB ſic applicetur, vt pars huius rectæ inter illam & punctum A intercepta ſit $= x$. Vt ergo problema ſolvatur, aſſignanda erunt puncta illa omnia, quod ita fiet.

Sumpto in recta AB quocunque puncto B, age BG, quæ cum AB includat angulum dato E æqualem. Fac $AB : BG = nf + mc : ma$. Per puncta A & G duc rectam infinitam AG. Sumpto ergo in recta hac AG quocunque puncto H, ſi HK ducatur parallela rectæ BG, erit $AB : BG = AK : HK$. Quare ſi AK dicatur $= x$ & $HK = y$, erit quoque $nf + mc : ma = x : y$, & punctum H quæſtioni non minus ſatisfaciet, quam D.

Scholion.

§. 639. Eſt ergo recta AG locus omnium punctorum quæſitorum. Et generatim problema indeterminatum geometrice conſtruitur, aſſignato communi punctorum quæſitorum loco. Sed is non ſemper linea eſt in plano deſcripta, & raro recta.

§. 640. Scilicet locus puncti plane determinatus punctum eſt, quod ſemper reperitur ſi problema ſit determinatum. Si indeterminatum ſit problema, locus plerumque eſt linea in dato plano deſcripta, recta vel curva: quia problemata pleraque ad figuras in plano deſcribendas reſtricta ſunt. Poteſt autem locus & ſuperficies eſſe, vel linea, quæ in plano deſcribi non poteſt, quales ſunt omnes, quæ in ſuperficie ſphæræ deſcribi poſſunt præter circulos; & infinitæ aliæ. Superficies autem erit locus, ſi, verbi gratia, quæratur punctum, quod a dato plano dato intervallo diſtat. Ea enim diſtantia competit cuilibet puncto plani, dato, ad datum illud intervallum, paralleli. Sic locus puncti, cuius a puncto dato diſtantia datur, eſt ſuperficies ſphærica, ſiquidem diſtantia illa non ſumenda ſit in plano aliquo dato. Si enim in dato plano ſumenda ſit, locus eſt peripheria circuli.

§. 641. Si locus puncti aſſignetur in aliqua ſuperficie, & præterea in alia, quæ priorem illam ſecat, locus fit linea, quia ſuperficiei cum ſuperficie, præter lineam, nihil commune eſt. Si vero locus puncti in duabus lineis detur, quarum vna ſecat alteram, locus plane determinatur, punctis linearum infinitis ad vnum, vel pauca aliquot, reductis, in quibus vna earum linearum ſecat alteram.

PROBLEMA LXXIIII.

F. 39. §. 642. *Rectam* AB *per punctum* C *ſecat* DE *ad angulos rectos, eſtque, puncto* H *in* DE *pro arbitrio ſumpto, ab hoc puncto recta datæ magnitudinis* HF *in plano rectarum* AB, DE *ſic ponenda, vt &* HG *datæ magnitudinis evadat.* *Quæritur locus puncti* F.

PRÆ-

PRÆPARATIO.

§. 643. Si HF data ſit $= a$, & GF $= c$, atque hinc HG $= a - c$, poteſt locus puncti F ad quodlibet H reperiri, centro H intervallo $a - c$ peripheria deſcripta, quæ rectam AB in G ſecet, deinde recta HG in F producta, donec HF fiat datæ longitudinis a.

Sed neque per FI rectæ DE parallelam, atque per IC, locus determinabitur multo difficilius.

SOLVTIO.

§. 644. Ducatur enim FK parallela rectæ AB, & ſit hæc FK ſive IC $= x$, & FI $=$ CK $= y$. Reliquis ergo denominationibus, vt modo poſitæ ſunt, ſumptis, ex HF : FK $=$ FG IG, erit IG $= \frac{cx}{a}$. Vnde quia FGq $=$ FIq $+$ IGq, erit $c^2 = y^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2}$, vel $y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}$, per quam æquationem, ad quamlibet x, datur ei conveniens y, & ad quamlibet y vel CK pro arbitrio ſumptam, ad illam pertinens FK.

Scholion.

§. 645. Poteſt nempe locus puncti, quod problema indeterminatum quærit, per æquationem exprimi multis modis, prout hæc vel illa ratio concipitur, punctum illud geometrice reperiundi; fiuntque æquationes illæ ſæpe adeo faciles, vt neque opus ſit eas ſcribi. Per æquationes autem, quæ punctum quodlibet F, cuius locus quæritur, ad datam rectam AB referunt mediantibus rectis FI, quarum datur poſitio, qualis ſit locus puncti quæſiti, id eſt, an linea recta ſit, an curva, & ſi curva ſit, quæ ſit eius figura, plerumque perſpicitur facillime, ſi x vel y, vel primo illa, deinde hæc, a nihilo & affirmative & negative creſcere ponatur in infinitum, ſecundum ea, quæ §. 578. præcepta ſunt.

§. 646. In æquatione huius problematis,

$$y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}$$

ſi 1° ponatur $x = 0$, id eſt, ſi ponatur punctum I cadere in C, fit $y^2 = c^2$ & $y = \mp c$, (nam hic omnium minime particulares radicum extractiones ferri poſſunt) vnde patet, duo in rectam DE cadere lineæ puncta, quorum vnum a C tantundem diſtat verſus partem D, quantum alterum ab eodem puncto verſus E diſtat, eſſeque eam diſtantiam $= c$.

2°. Si x parva quidem, ſed tamen alicuius magnitudinis ponatur, ex eadem æquatione ſequitur, y iam minorem fore quam ad $x = 0$,

quia

quia $\frac{c^2x^2}{a^2}$, quantumvis parvum ſit, valorem tamen quadrati y^2, minorem reddit, quam cc. Creſcente deinde x, tanto magis imminuitur id, cui y^2 æquale eſt, quo maior fit x. Ergo linea continuo magis ad AB accedet, quo magis ſecundum hanc rectam verſus B procurrit.

3°. Verum, quicunque ſumatur valor litteræ x, æquatione ita reducta, $y = \mp \sqrt{(c^2 - \frac{c^2x^2}{a})}$ duae ad eandem x reperientur y, eiusdem magnitudinis, ſed quarum vna ad vnam rectæ AB partem cadit, altera ad alteram. Vnde, ſi F ſit punctum aliquod lineæ, quam hic conſideramus, producta FI, vt fiat $If = IF$, eadem linea per punctum f tranſibit.

4°. Si x negativa ſumatur, ſed eiusdem magnitudinis abſolutæ cum x quadam poſitiva; eædem prorſus reperiuntur ad eam pertinentes y, quia, ſive affirmativa ſumatur x ſive negativa, nihil mutatur in xx. Eodem ergo prorſus modo linea a recta DE verſus partem A procurrens ad AD accedet, quo ad eam acceſſit ad partem eiusdem rectæ B.

5°. Vbi x continuo incremento eo pervenit, vt iam ſit $x = a$ vel $x = -a$, fit $c^2 - \frac{c^2x^3}{a^3}$

$= c^2 - c^2 = 0$, ergo & $y = 0$, atque linea ad hanc a puncto C diſtantiam cum AB concurrit.

6°. Si x porro creſcens ponatur rectam a ſuperare, fit $\frac{c^2x^2}{a^2}$ maius quam c^2, & hinc $c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}$ quantitas negativa. Eſt ergo ad x iſtam, y imaginaria, neque linea ad diſtantiam, quam eſt a, maiorem ab ED recedit, quemadmodum neque ab AB magis receſſit, quam ad diſtantiam c.

7°. Linea ergo ADBE figuram terminat, cuius pars ſupra AB congruere poteſt eiusdem figuræ parti infra hanc AB; & pars ad dextram rectæ DE poſita, eius parti ad ſiniſtram: quæque adeo per rectas iſtas AB, DE in quatuor partes, ſimiles inter ſe & æquales, dividitur.

8°. Facile autem patet perimetrum huius figuræ lineam curvam eſſe, non compoſitam ex rectis, quia, ſi foret ex rectis compoſita, haberet angulos, apud quos ſubito notanda foret quantitas y, quod æquatio non permittit.

9°. Hæc autem figura longior eſt ſecundum AB, quam lata ſecundum DE, vel minus longa, prout a maior eſt, quam c, vel minor. Si fuerit $a = c$, longitudo figuræ eius latitudini æqualis erit.

10.

10. Eadem prorſus ſequentur, ſi ex y ſive CK pro arbitrio ſumpta, quæratur KF, id eſt, x, atque eodem plane modo: quia x in æquatione non aliter ineſt, quam y, quod clariſſime patet, ſi in hanc

$$a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2, \text{ vel}$$

$$a^2y^2 + c^2x^2 = a^2c^2$$

reducatur.

11°. Si in hac æquatione fiat $a = c$, convertitur in hanc,

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

$$\text{vel } y^2 + x^2 = a^2,$$

quam circulum deſignare & ex notiſſima huius proprietate, & ex ipſa conſtructione patet. Si enim $a = c$, eſt $a - c = 0$; atqui $a - c$ fuit HG.

12°. Ea vero curva, quæ hac lege deſcribitur ſumpta a maiore vel minore, quam c, & figura, quam terminat, dicitur *Ellipſis.* Poteſt & c negativa ſumi, vt punctum lineam deſcribens F cadat in HG non productam, eodem effectu. Nihil enim in æquatione mutatur, ſi c ſumatur negativa, quia cc nihilominus affirmativum fit.

PROBLEMA LXXV.

§. 647. *Datis poſitione duabus rectis* AB, F.40.
CD, *quæ ſeſe in* E *ſecent, & puncto* C, *ſi in*
AB

AB *ſumatur quæcunque* EF, *in* CD *autem* ED, *cuius ratio ad* EF *data ſit, deinde per* CF *recta producatur infinita, & per* D *alia ad* AB *parallela, determinare locum puncti* G, *in quo hæ rectæ ſeſe ſecabunt.*

SOLVTIO.

§. 648. Sit CE$=b$, ratio autem ED : EF, quæ datur, ſit $= a : b$, ED ſit x, & DG, y. Erit EF$=\frac{bx}{a}$; analogia autem CE : CD $=$ EF : DG ita expreſſa, $b : b+x = \frac{bx}{a} : y$, dabit æquationem $y = \frac{bx + xx}{a}$, vel

$$ay = bx + xx.$$

per quam DG quæcunque, ex aſſumpta ED, vel hæc ex illa, reperiri poterit; cadetque y ita reperta ad partem A rectæ infinitæ CD, ſi affirmativa fuerit, & ad partem eius B, ſi fuerit negativa; ſed x affirmativa ad partem D rectæ AB, negativa ad partem eius C.

Scholion.

§. 649. Æquatione ſecundum ea, quæ dicta ſunt, examinata, deteguntur affectiones lineæ, in quam puncta quævis G hoc modo reperta cadunt, iſtæ:

1°. Si x ponatur $= 0$, fit & $y = 0$, tranſit ergo linea per punctum E, duabus rectis AB, CD commune.

2°. Si x affirmativa ponatur, fit & y affirmativa. Lineæ ergo pars, quæ a puncto E procurrit per G, intra angulum AED continetur, atque dum ita a puncto E procurrit, cum neutra rectarum AE, ED, coit.

3°. Creſcente x affirmativa, creſcit & y; eadem ergo linea, intra angulum AED procurrens, ab vtroque laterum anguli perpetuo recedit. Et, quia nulla aſſumi poteſt rectæ x magnitudo, quin ei reſpondens y aliqua reperiatur, ſique x infinita ponatur, & y infinita fit; linea intra hunc angulum nuſpiam terminatur, tandemque ab EA & ED productis magis recedit, quam ad vllum intervallum dabile.

4°. Si x negativa fiat, fit & bx negativum, ſed xx affirmativum manet. Verum ſi x minor fit quam b, prævalet negativum. Ergo & y negativa, fit, atque linea a puncto E intra angulum CEB procurrit, ad aliquam diſtantiam.

5°. Nam ſi, creſcente x negativa, fiat tandem $x = b$, fit $bx + xx$ denuo $= 0$, ergo & $y = 0$, & linea in puncto C denuo cum recta CD concurrit.

6°. Ab hoc autem termino ſi x porro creſcat, ſit iam $xx > bx$, & hinc $bx + xx$ iterum poſitivum evadit. Ergo & y poſitivam fieri neceſſe eſt, lineamque a puncto C ad partem A rectæ CD excurrere. Verum hic quoque ad x quamcunque aliqua reperitur y, eaque infinita, ſi $-x$ ponatur $= \infty$. Ergo linea intra angulum CEA a puncto C in infinitum excurrens, ab vtraque rectarum EA, EC, verſus has partes itidem in infinitum productarum, recedet.

7°. Quia ad aſſumptam quamcunque x, vna tantum reperitur y, ductus lineæ, præter deſcriptum, nullus erit: quæ ergo rectam CD in punctis C & E, ſed præterea nullibi, ſecabit, rectam autem AB non niſi apud E. A qualibet autem recta ad AB parallela ſecabitur, ſed ſemel tantum ab eadem. Vnde clare apparet, lineam curvam eſſe.

8°. Si HG ducatur ad CD parallela, erit in parallelogrammo HD, $EH = DG = y$, & $HG = ED = x$; quo obſervato, x per æquationem reperta ad aſſumptam quamcunque y, commode in figuram traducetur. Si vero y primo ſumatur $= 0$, fit $bx + xx = 0$. Huius ergo æquationis cum duæ ſint radices, quæ continentur æquationibus $x = 0$, & $x + b = 0$, ſequitur, quod iam vidimus, lineam cum recta CD concurrere, cum apud punctum E, ad

quod

quod $x = 0$, tum apud C, ad quod $-x = b$.

9°. Si y ponatur negativa, æquatio hanc formam induit $xx + bx = -ay$

vnde $x = -\frac{1}{2}b \mp \sqrt{(\frac{1}{4}bb - ay)}$.

Duæ ſcilicet ſunt æquationis radices, vtraque poſſibilis, ſi ay minor ſit quam $\frac{1}{4}bb$, vel y minor, quam $\frac{bb}{4a}$. Aſſumpta ergo intra hunc terminum quacunque y, ſi per eius extremum ducatur rectæ CD parallela, curva bis ſecabitur. Si fuerit $ay = \frac{1}{4}bb$, vel $y = \frac{bb}{4a}$, evaneſcente radicis parte irrationali, erit $x = -\frac{1}{2}b$, atque, ſi ſumatur $EI = \frac{bb}{4a}$, parallela ad CD per I ducta, curvæ in vno tantum puncto occurret. Tandem, ſi ay maior fuerit quam $\frac{1}{4}bb$, erit $\sqrt{(\frac{1}{4}bb - ay)}$ imaginaria, & x impoſſibilis. Quare rectarum ad CD parallelarum, quæ maiori intervallo ab hac diſtant, quam punctum I, curvam nulla ſecabit.

10. Sed ſi y poſitiva ſit, fit

$$x = -\frac{1}{2}b \mp \sqrt{(\frac{1}{4}bb + ay)}$$

quarum radicum vtraque cum ſemper poſſibilis ſit, cuiuscunque magnitudinis ſumatur y, quælibet recta, rectæ CD parallela ad partem A, curvam in duobus punctis ſecabit.

11. Si CE bifariam ſecetur apud K, dicaturque KD $= z$, erit $z = \frac{1}{2}b + x$, & $x = z - \frac{1}{2}b$. Hic ergo litteræ x valor, ſi eius loco in æquationem $ay = bx + xx$ introducatur, fit

$$ay = bz - \tfrac{1}{2}bb + zz - bz + \tfrac{1}{4}bb,$$

ſive $ay = zz - \frac{1}{4}bb$.

Vnde, ſi per K recta infinita ducatur KL, ſumaturque in hac quæcunque KM pro y, erit $zz = ay + \frac{1}{4}bb$, & $z = \mp \sqrt{(ay + \frac{1}{4}bb)}$. Si ergo poſſibilitatis limes non excedatur, duæ ſemper reperientur z ad quamlibet y ita ſumptam; ſed eæ inter ſe æquales, & ad diverſas partes rectæ KL poſitæ. Quod indicio eſt, quamlibet rectam GM ad CD parallelam, ſi producatur in N, a recta KM ita ſecari apud M, vt partes eius intra curvam æquales evadant, NM = MG.

Atque hæ ſunt curvæ huius affectiones præcipuæ: dicitur autem *Parabola*.

PROBLEMA LXXVI.

F. 41. 42. §. 650. *Data trianguli baſi* AB, *ac ſumma vel differentia laterum* AC, CB, *invenire locum apicis* C.

SOLVTIO.

§. 651. Sit AB $= b$, AD $= x$, & DC baſi perpendicularis $= y$; erit DB $= b - x$, AC $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$, & CB $= \sqrt{(b^2 - 2bx + x^2 + y^2)}$.

Si

Si ergo primo ſumma laterum AC, CB detur, $= a$, quam oportet baſi b maiorem eſſe, erit

$$\sqrt{(x^2+y^2)} + \sqrt{(b^2-2bx+x^2+y^2)} = a,$$
$$\sqrt{(b^2-2bx+x^2+y^2)} = a - \sqrt{(x^2+y^2)}$$
$$b^2-2bx+x^2+y^2 = a^2-2a\sqrt{(x^2+y^2)} + x^2+y^2$$
$$-2bx = a^2-b^2-2a\sqrt{(x^2+y^2)}$$

vel ſi ponatur $a^2-b^2=c^2$

fit $-2bx = c^2-2a\sqrt{(x^2+y^2)}$

vel $2a\sqrt{(x^2+y^2)} = c^2+2bx.$

Hinc $4a^2x^2+4a^2y^2 = c^4+4bc^2x+4b^2x^2$

vel $4a^2y^2 = c^4+4bc^2x+4b^2x^2-4a^2x^2$

aut ſi hic quoque pro a^2-b^2 ſcribatur cc,

$$4a^2y^2 = c^4+4bc^2x-4c^2x^2$$

§. 652. Si ſecundo ponatur differentia laterum AC, BC data eſſe, dicaturque d, erit b maior quam d, quia in quolibet triangulo, quodcunque latus aſſumptum, maius oportet eſſe differentia reliquorum; vnde hic concinnius ponetur $b^2-d^2=e^2$. Reliqua ſeſe habebunt ſimili plane modo: nam ex $\sqrt{(x^2+y^2)}-\sqrt{(b^2-2bx+x^2+y^2)}=d$, fit $b^2-2bx+x^2+y^2=(d-\sqrt{(x^2+y^2)})^2$ vt prius,

& hinc $-2bx=d^2-b^2-2d\sqrt{(x^2+y^2)}$

vel $-2bx=-e^2-2d\sqrt{(x^2+y^2)}$

& $2d\sqrt{(x^2+y^2)}=2bx-e^2$

hinc $4d^2x^2+4d^2y^2=4b^2x^2-4be^2x+e^4$,

& $4d^2y^2=e^4-4be^2x+4e^2x^2$

Quæ æquatio a priori ſolis ſignis differt, fitque ex illa, ſi loco quadrati c^2, quod in illa poſitivum fuit, hic negativum ponatur quadratum e^2, ac pro a ſcribatur d.

Scholion.

§. 653. Æquationibus iſtis ſecundum variationes, quas admittunt x & y, examinatis, apparet generatim, locos repertos a rectis, baſi AB vtcunque productæ perpendicularibus, bis ſecari poſſe, & ad æquales ab hac AB diſtantias, quia y^2 ex aſſumpta x per æquationem puram datur. Etiam rectæ baſi parallelæ easdem lineas bis ſecare poterunt, ſed id in figura 41 non continget ad æquales diſtantias a recta KL, per punctum A baſi perpendiculari; quia x ex aſſumpta y per æquationem quadraticam impuram datur; ſimiliterque in figura 42.

§. 654. Speciatim autem ex æquatione priori §. 650.

F.41. $$4a^2y^2 = c^4 + 4bc^2x - 4c^2x^2$$

apparet, 1°. ſi x ponatur $= 0$, quo triangulum evadit rectangulum, fore $2ay = \mp c^2$, hinc $y = \mp \frac{c^2}{2a}$, & hinc rectam KL, per A baſi perpendicularem, quæ curvæ apud K & L occurrit $= \frac{c^2}{a}$. Idem valor rectæ y elicitur, ſi ponatur

natur $x = b$, quo fit $bx = x^2$, & $4bc^2x - 4c^2x^2 = 0$.

2°. Si x ponatur minor quam b, membrum æquationis $c^4 + 4bc^2x - 4c^2x^2$ affirmativum prodit, poteſtque aliqua y reperiri. Ergo omnis recta baſi AB intra puncta A & B perpendicularis, curvam bis ſecat.

3°. Si vero x ponatur maior quam b, prævalente quantitate negativa, impoſſibilis fieri poteſt y; idemque continget, ſi x negativa nimiæ magnitudinis ſumatur. Limites poſſibilitatis apparebunt, poſito $c^4 + 4bc^2x - 4c^2x^2 = 0$ ſive $x^2 - bx = \frac{1}{4}cc$. Hinc enim elicitur $x = \frac{1}{2}b \mp \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb)}$. Vel quia ex aſſumptis $c^2 + b^2 = a^2$, §. 651, eſt $x = \frac{1}{2}b \mp \frac{1}{2}a$. Vnde apparet poſſibilitatem reperiundi y ceſſare, vbi x maior ſumitur quam $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, vel minor, quam $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Ad hos autem terminos fit $y = 0$, & curva cum baſi AB producta, concurrit. Si AB apud E bifariam ſecetur, vt ſit $AE = \frac{1}{2}b$, fore EF = EG ex iisdem ſequitur.

4°. Si x ponatur $= \frac{1}{2}b$, fit

$$4a^2y^2 = c^4 + 2b^2c^2 - b^2c^2 = c^4 + b^2c^2$$

$$\text{hinc } y^2 = \frac{c^4 + b^2c^2}{4a^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2 + b^2}{4}$$

vel

vel ſi iterum a^2 ſcriptum intelligatur pro c^2+b^2, fit $y^2=\frac{c^2}{4}$ & $y=\frac{c}{2}$.

5°. Quodſi ex data y reperiendæ ſint x, æquatio ordinabitur hunc in modum:

$$x^2-bx=\frac{c^2}{4}-\frac{a^2y^2}{c^2},$$

vnde fit $x=\tfrac{1}{2}b\mp\surd\left(\tfrac{1}{4}c^2+\tfrac{1}{4}b^2-\frac{a^2y^2}{cc}\right)$

vel, ſi a^2 ſcribatur loco c^2+b^2,

$$x=\tfrac{1}{2}b\mp\surd\left(\frac{aa}{4}-\frac{a^2y^2}{cc}\right)$$

vnde apparet, ſi y ponatur $=\frac{1}{2}c$, vnicam fore ei reſpondentem x, $=\frac{1}{2}b$; ſi y maior ſumatur quam $\frac{1}{2}c$, prævalente negativo, x fore impoſſibilem; ſi vero x hac $\frac{1}{2}c$ ſumatur minor, duas ſemper prodituras x poſſibiles. Sumtis ergo EH=EI=$\frac{1}{2}c$, quælibet recta baſi AB parallela, quæ ſecat rectam HI, curvam quoque bis ſecabit.

6°. Ponatur in æquatione, quam conſideramus, $\frac{1}{2}b-z$, loco x. Denotabit z complementum cuiusvis x ad rectam AE, æquatio autem transformabitur in iſtam:

$$4a^2y^2=c^4+2b^2c^2-4bc^2z-b^2c^2+4bc^2z-4c^2z^2$$

quæ

quæ contrahitur in hanc,

$$4a^2y^2 = c^4 + b^2c^2 - 4c^2z^2,$$

ex qua, ſi iterum pro b^2 ſcribamus $a^2 - c^2$, fit

$$4a^2y^2 = c^4 + a^2c^2 - c^4 - 4c^2z^2,$$

vel $$4a^2y^2 = a^2c^2 - 4c^2z^2,$$

quæ æquatio eadem fit cum illa, quam ſupra §. 644. reperimus pro ellipſi, ſi linea, quam hic dicimus c, ponatur eſſe dupla illius, quæ ibi c dicta fuit, & a huius problematis, dupla lineæ a illius. Ex his enim, quæ ita ſumuntur, ſi æquatio, quam hic conſideramus, exprimenda fuerit, pro aa ſcribendum erit $4aa$, & pro cc, ponendum $4cc$, quo facto erit

$$16a^2y^2 = 16a^2c^2 - 16c^2z^2$$

vel $$a^2y^2 = a^2c^2 - c^2z^2.$$

Eſt ergo is quoque, quem modo tractavimus, locus *Ellipſis*, atque eadem curva vt multis modis deſcribi, ſic per æquationes exhiberi diverſas poteſt.

§. 655. Quod autem ad alteram æquationem attinet, quæ fuit §. 652. F.42.

$$4d^2y^2 = e^4 - 4be^2x + 4e^2x^2,$$

& ad quam $e^2 = b^2 - d^2$:

Si 1°. ſumatur $x = 0$, fit $y^2 = \frac{e^4}{4d^2}$, & $y = \mp \frac{e^2}{2d}$.

Si 2°. ſumatur x poſitiva, & maior quam b, fit bx minus quam xx, & hinc $-bx + xx$ affirmativa. Ergo & $4d^2y^2$ affirmativa erit, & y poſſibilis, cuiuscunque magnitudinis ſumatur x. Idem contingit ſi x negativa ſumatur, quia hoc facto bx poſitivum evadit. Quælibet ergo recta, baſi productæ extra puncta A & B perpendicularis, curvam, quam hic conſideramus, ſecabit.

Si vero 3°. poſitiva x minor ſumatur quam b, quia, prævalente bx, quantitas $e^4 - 4be^2x^2 + 4e^2x^2$ negativa fieri poteſt, y non ſemper erit poſſibilis, & ad quamlibet x huius magnitudinis. Limites rectæ x, apud quos y ex poſſibili fit poſſibilis, vt detegantur, fiat

$$e^2 + 4x^2 = 4bx,$$

erit $$x^2 - bx = -\tfrac{1}{4}ee$$

& $$x = \tfrac{1}{2}b \mp \surd(\tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{4}ee)$$

vel ſi loco $bb - ee$ ſcribatur dd, erit

$$x = \tfrac{1}{2}b \mp \tfrac{1}{2}d.$$

Biſecta ergo AB apud E, vt fiat AE $= \tfrac{1}{2}b$, ſi ſumatur EF $=$ EG $= \tfrac{1}{2}d$, ad puncta F & G y evaneſcet, atque curva cum baſi concurret. Ad x vero maiorem quam AF, minorem autem quam AG, y nulla reperiri poterit. Si enim x ſumatur $= \tfrac{1}{2}b \pm z$, vt fiat $bx = \tfrac{1}{2}bb \pm bz$, & $xx = \tfrac{1}{4}bb \pm z + zz$, æquatio

$$4d^2y^2 = e^2(e^2 - 4bx + 4xx)$$

muta-

mutatur in hanc

$$4d^2y^2 = e^2(e^2 - b^2 + 4zz)$$

vel in hanc $4d^2y^2 = e^2(4zz - dd)$
in qua y impoſſibilis erit, ſi $z < \frac{1}{2}d$, ſive affirmativa ſive negativa fuerit z. Verum, ſi $z < \frac{1}{2}d$, eſt $x\,(= \frac{1}{2}b + z) < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d$, & $x\,(= \frac{1}{2}b - z) > \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d$. Ergo quoque ſi x minor fuerit quam $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d$, maior vero, quam $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d$, y impoſſibilis erit, neque rectarum inter puncta FG baſi perpendicularium vlla curvam ſecabit: cuius ergo partes a ſe mutuo ſeiunctæ erunt.

4°. Si y ſumatur data, reperietur x, per æquationem ita ordinatam

$$x^2 - bx = \frac{d^2y^2}{e^2} - \frac{e^2}{4}$$

eritque $$x = \tfrac{1}{2}b \mp \sqrt{\left(\frac{d^2y^2}{e^2} - \frac{e^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)}$$

ſive $$x = \tfrac{1}{2}b \mp \sqrt{\left(\frac{d^2y^2}{e^2} + \tfrac{1}{4}d^2\right)}$$

vel ſimplicius

$$x = \tfrac{1}{2}b \mp \frac{d}{e}\sqrt{(y^2 + \tfrac{1}{4}e^2)}$$

cum ergo $\frac{d^2y^2}{e^2} + \frac{1}{4}d^2$, ſemper poſſibilis ſit, dabuntur duæ x ad quamcunque y, ac quælibet recta, ad quamcunque diſtantiam baſi AB paral-

parallela, curvam bis ſecabit. Quæ ergo a punctis F & G ad vtramque baſeos partem ſic excurret, vt & a baſi producta & a recta HI, baſin biſecante ad angulos rectos, in infinitum recedat.

5°. Si FK ducatur baſi perpendicularis, & quæcunque LM eidem parallela, curvæ in punctis L & M occurrens; erit LK $= \frac{1}{2}b - \frac{d}{e}\sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}e^2)}$ & KM $= \frac{1}{2}b + \frac{d}{e}\sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}e^2)}$, quarum vtrique ſi addatur NK $= -\frac{1}{2}b$, fit NL $= -\frac{d}{e}\sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}e^2)}$ & NM $= \frac{d}{e}\sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}e^2)}$. Recta ergo quælibet LM baſi AB parallela, & vtrinque in curva terminata, ab HI biſecabitur.

6°. Scripto in æquatione, quæ iam præ manibus eſt

$$4d^2y^2 = e^4 - 4be^2x + 4e^2z^2$$

$\frac{1}{2}b \pm z$ loco x, notat z complementum cuiusvis x ad FE, vel ED, diſtantiam alicuius rectæ CD ad HI parallelæ, a puncto E. Prodiit autem per hanc ſubſtitutionem n. 3°

$$4d^2y^2 = e^2(4zz - dd)$$

aut $4d^2y^2 = 4e^2z^2 - d^2e^2$.

quæ

quæ æquatio ab illa, quam ſupra §. 644. reperimus pro Ellipſi, ſolis ſignis differt, quod clarius etiam apparet ſi ponatur $d = 2a$, & $e = 2c$. Fit enim ex his:

$$a^2y^2 = c^2z^2 - a^2c^2.$$

§. 656. Dicitur autem quævis partium huius curvæ, ab altera penitus ſeiuncta, *Hyperbole*, vnde tota curva Hyperbolarum nomine de[illegible]nanda erit. Si in æquatione vltima ponatur $a = c$, fit $y^2 = z^2 - a^2$, æquatio ſolis ſignis diverſa ab ea, qua circulus definitur, cum ductus Hyperbolarum a circulo toto cœlo differat.

Corollarium.

§. 657. Hinc ſi ſuper datam baſin AB conſtruendum ſit triangulum, cuius latera reliqua ſummam exhibeant $= a$, differentiam vero $= d$, conſtructo ad AB vtroque loco, cum eo, qui pertinet ad ſummam, CDE, tum altero ad differentiam, GFCH, triangulum conſtruetur, ſi aliquod quatuor punctorum, quorum quodlibet eſt in vtroque loco, vt C, cum punctis A & B connectatur. Verum triangula, quæ ita fieri poſſunt, reliqua ab eo, quod deſcriptum eſt, ACB, poſitione laterum ſola diverſa erunt. Facile autem patet, quod ita per interſectionem curvarum præſtatur, ad omnia problemata extendi: ac, quemadmodum linea in plano F. 43.

deſcripta quamcunque æquationem indeterminatam, in qua duæ inſunt litteræ incognita notantes, ſecundum omnes ſuas conditiones exhibet: ſic duabus lineis, legitime combinatis, idem effici poſſe, quod obtinetur, duabus æquationibus indeterminatis per eliminationem alicuius litteræ, in vnam conflatis; atque vtroque modo valorem quæſiti per cognitam dari.

PROBLEMA LXXVII.

F.44. §. 658. *Norma* ABC *ad circulum ſic applicata, vt apex anguli recti* B *in peripheriam cadat, ductaque per punctum* D, *in quo crus* BC *peripheriam ſecat, recta* DE, *diametro* BF *perpendiculari, invenire punctum* E, *in quo hæc recta ſecat crus normæ alterum* AB.

SOLVTIO.

§. 659. Sit diameter BF $= a$, & BG $= x$, erit GF $= a - x$, & ex nota proprietate circuli, GDq $= ax - xx$. Si ergo GE dicatur y, quia, in triangulo rectangulo EBG, eſt GD : GB = GB : GE, erit $ax - xx : xx = xx : yy$, vel $a - x : x = xx : yy$, ergo $x^3 = ay^2 - xy^2$.

Scholion.

§.660. Si 1°. per hanc æquationem y^2 quæratur ex x, fit $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$

$$\& \quad y = \mp x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

duæ ergo reperiuntur y ad quamlibet x, inter ſe æquales, & a puncto G in diverſa tendentes; ergo diameter circuli BF quamlibet rectam EH ſibi perpendicularem, atque vtrinque curva, quam hic conſideramus, terminatam biſecat. Si x ponatur $= 0$, fit & $y = 0$, atque curva apud B cum diametro coit. Si x negativa ponatur, fit $\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ imaginarium. Rectarum ergo, quæ diametrum citra B productam ad angulos rectos ſecant, nulla curvæ occurrit. Si $x = \frac{1}{2}a$ fit & $y = \frac{1}{2}a$; ſi vero fiat $x = a$, $\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ evadit $\sqrt{\frac{a}{0}}$, id eſt infinita; ergo & y hoc caſu infinitæ erunt, atque curva ad rectam, IK, quæ circulum apud F contingit, continuo quidem accedet, attamen nunquam cum ea coibit. Nam omni x, cuius magnitudo continetur inter 0 & a, y finitæ magnitudinis reſpondet. Si autem

autem x ponatur maior quam a, $\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ denuo imaginaria ſit, & y impoſſibilis.

2°. Si vero y ponatur dari, atque ad eam quæratur x, ſolvenda eſt æquatio cubica

$$x^3 + y^2x - ay^2 = 0$$

cuius cum aliqua radix neceſſario ſit poſſibilis, ad y vtcunque ſumptam reperietur x aliqua. Sed vna plures hic dari non poſſe, ex ordine ſignorum apparet §. 522. Redit enim æquatio, ſi y dari ponatur, ad formam cubicæ huius $x^{3*} + px - q = 0$. Quælibet ergo recta diametro BF parallela curvam hanc ſecabit, ſed ſemel tantum. Conſiderata fuit a veteribus, & nominata *Ciſſois*.

PROBLEMA LXXVIII.

F.45. 46. 47. §. 661. *Sumpto extra rectam infinitam* AB *puncto quocunque* C, *ſi* CD *ducatur quæcunque, in eamque a puncto* D *ponatur* DE *datæ magnitudinis, definire locum puncti* E.

PRÆPARATIO.

662. A puncto D in rectam CD productam recta datæ magnitudinis DE ponetur, deſcripto centro D intervallo DE circulo. Verum hoc facto, præter E aliud punctum e reperitur, quod propoſito æque ſatisfacit.

Sed

Sed in ſolutione ad vnum tantum horum punctorum reſpicere neceſſe eſt, quia alterum per eandem æquationem dabitur, propterea, quod vtrumque ab aſſumptis eodem modo pendet, & per eandem conſtructionem geometricam determinatur.

SOLVTIO.

§. 663. Ducta per C recta ad AB perpendiculari, datur CF, quæ ſit b, ſed DE dicatur a. EG autem eidem AB perpendicularis, vel ei æqualis FH ſit $=y$, & $HE = FG = x$. Erit $CH : CF = HE : FD$, id eſt $b+y : b = x : FD$. Ergo $FD = \frac{bx}{b+y}$, & $DG = HE - FD = x - \frac{bx}{b+y} = \frac{xy}{b+y}$. Cum ergo $DE^q = DG^q + EG^q$, erit

$$a^2 = \frac{x^2y^2}{(b+y)^2} + y^2$$

ſive $(a^2 - y^2)(b+y)^2 = x^2y^2$,

hinc $x^2 = \frac{(a^2 - y^2)(b+y)^2}{y^2}$.

Scholion.

§. 664. Sumpta y tanquam data, ductus curvæ huius haud difficulter detegetur, quia x per æquationem quadraticam puram datur, e qua e qua 1°) mox apparet, cuilibet y duas reſpondere x, æquales, & vtrinque rectæ CF adiacentes.

2°) Si y ponatur $= a$, fit $a^2 - y^2 = 0$, evaneſcit ergo x. Si y maior ſumatur quam a, $a^2 - y^2$ negativum fit, & x impoſſibilis.

3°) Decreſcenti ab hoc termino y, ſemper poſſibiles reſpondent x, ſed eæ vehementer creſcunt, fiuntque, y penitus evaneſcente, omni dabili maiores. Nam ad $y = 0$, fit $x^2 = \frac{a^2b^2}{0} = \infty$.

4°) Idem valor producitur, ſi ponatur $y = -0$, verum, ab hoc termino y negative creſcente, x^2 iterum decreſcit. Decreſcit enim $a^2 - y^2$ & $(b + y)^2$, quod iam converſum eſt in $(b - y)^2$, quod autem pro denominatore eſt yy, maius fit.

5°) Vbi $-y$ fit $= a$, vel $-y = b$, fit x denuo $= 0$, ſed non eadem vtrinque ratione. Si enim $-y$ ponatur maior quantitate a, ob $a^2 - y^2$ negativum, x^2 impoſſibilis evadit. Sed ſi ponatur $-y > b$, fit quidem $b + y$ itidem negativa, non autem $(b + y)^2$, ergo x tamen dari poteſt, ſi id reliqua permittant. Scilicet a vel minor eſt quam b, *Fig.* 45, vel huic æqualis, *Fig.* 46, vel hac maior *Fig.* 47. Prioribus duobus caſibus $-y > b$ ponit eſſe $-y > a$,

vltimo

vltimo non item; quo ergo ad $-y$, quæ maior quidem ſit quam b, minor autem quam a, vtique reperietur aliqua x.

6°) Si ex x dato quærenda ſit y, ſolvenda eſt æquatio biquadratica, in quam prior convertitur, hæc

$$x^2y^2 = a^2b^2 + 2a^2by + a^2y^2 - b^2y^2 - 2by^3 - y^4$$

quæ ita ordinatur:

$$y^4 + 2by^3 + \begin{array}{l} b^2 \\ -a^2 \\ +x^2 \end{array} .y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$$

cuius ſi quatuor radices poſſibiles ſint, eidem x quatuor reſpondebunt y, duæ, ſi duæ. Ordo autem ſignorum oſtendit earum radicum vna plures affirmativas eſſe non poſſe. Nam ſive tertius terminus ſignum + habuerit, ſive —, id eſt, ſive $b^2 + x^2$ maius fuerit quam a^2, ſive minus, vna tantum erit ſignorum adverſorum ſucceſſio.

7°) Si fuerit $x = 0$, erunt y radices æquationis

$$y^4 + 2by^3 + \begin{array}{l} b^2 \\ -a^2 \end{array} .y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$$

quæ cum ex factoribus conflata ſit $y^2 - a^2$ & $(y+b)^2$, quorum quilibet in duos alios ſolvitur, prior in hos $y+a$, $y-a$, poſterior in iſtos, $y+b$, $y+b$, erunt ad hunc caſum quatuor y, quæ ſimplicibus his æquationibus

$y+a$

$y+a=0$, $y-a=0$, $y+b=0$, $y+b=0$ continentur; adeoque $y=a$; $y=-a$; $y=-b$; $y=-b$. Prima harum radicum eſt FI, altera FK, tertia & quarta notant FC; quæ radices FC, vbi $b=a$, cum FK coincidunt.

§. 665. Eſt autem in eo caſu, quo a maior eſt quam b, *Fig.* 47. valor radicis, quæ in puncto C terminatur, propterea duplex, quia in duobus curvæ arcubus terminatur. In eo autem caſu, quo $b=a$ *Fig.* 46. is valor triplex eſt, quia hoc caſu etiam punctum K cum duobus punctis C coincidit, quo hoc punctum quaſi triplex fit. Si vero a minor ſit quam b, etiamſi curva apud punctum C rectam CI non ſecet, id punctum nihilominus exhibetur, tanquam ad curvam pertinens, & quidem vt duplex.

Cæterum figura 45 eius caſus, quo a minor eſt quam b, nomen dediſſe curvæ huic videtur *Conchoidis*, quæ ſemper e duabus partibus conſtat, per rectam AB ſeiunctis.

PROBLEMA LXXVIIII.

F.48. §. 666. *Sumptis extra rectam infinitam* AB *duobus punctis* C *&* D, *ſi per* C *recta ducatur vtcunque, quæ infinitam* AB *ſecet, transferaturque in eam* EF$=$DE, *a puncto ſectionis* E, *invenire locum puncti* F.

PRÆPARATIO.

§. 667. Punctum F reperitur, circa centrum E per D deſcripta peripheria circuli. Hæc autem rectam CE, præter F, & in alio puncto f ſecat, quod propoſito æque ſatisfacit. Sed in ſolutione ad vnum horum punctorum attendere ſufficit. Nam per æquationem, per quam datur F, etiam f dari neceſſe eſt, quia hæc puncta ab aſſumptis eodem modo pendent.

SOLVTIO.

§. 668. Si ex punctis datis C, D ad AB perpendiculares demittantur CH, DG, dantur & perpendiculares iſtæ & GH. Sit DG $= a$, CH $= b$ & GH $= c$. Porro FI, rectæ AB itidem perpendicularis, ſit $= y$, & HI $= x$. Producta ergo FI, ductaque per C ad AB parallela, erit CK pariter $= x$, ſed FK $= y + b$, quæ dicatur v, vt fiat $y = v - b$.

Iam quia FK : CK = CH : HE = FI : EI, erit HE $= \frac{bx}{v}$, & EI $= \frac{vx - bx}{v}$, hinc GE $= c + \frac{bx}{v} = \frac{cv + bx}{v}$. Cumque DE^q = DG^q + GE^q, erit DE^q $= a^2 + \frac{(cv + bx)^2}{vv}$ $= \frac{a^2v^2 + c^2v^2 + 2bcvx + b^2x^2}{vv}$, Sic & FEq = FIq + EIq $= (v-b)^2 + \dfrac{(vx-bx)^2}{v^2}$.

Id eſt

$$FEq = \frac{v^4 - 2bv^3 + b^2v^2 + v^2x^2 - 2bvx^2 + b^2x^2}{vv}$$

Cum ergo EF = DE, erit quoque

$$\begin{aligned} v^4 - 2bv^3 + b^2v^2 + x^2v^2 - 2bx^2v + b^2x^2 = {} & a^2v^2 \\ & + c^2v^2 + 2bcxv + b^2x^2, \end{aligned}$$

atque iis, quæ ſeſe tollunt, ſublatis, reliquis autem per v diviſis,

$$\begin{array}{llll} v^3 - 2bv^2 & + b^2v & - 2bx^2 & = 0. \\ & + x^2v & - 2bcx & \\ & - a^2v & & \\ & - c^2v & & \end{array}$$

vel, ſi $a^2 + c^2$ dicatur $= d^2$, erit

$$\begin{array}{llll} v^3 - 2bv^2 & + x^2v & - 2bx^2 & = 0 \\ & + b^2v & - 2bcx & \\ & - d^2v & & \end{array}$$

Si iam in hanc æquationem introducenda ſit y, quia $v = y + b$, erit

$$\begin{array}{rlllll} v^3 & = & y^3 & + 3by^2 & + 3b^2y & + b^3 \\ -2bv^2 & = & & -2by^2 & - 4b^2y & - 2b^3 \\ + x^2v & = & & & + x^2y & + bx^2 \\ + b^2v & = & & & + b^2y & + b^3 \\ - d^2v & = & & & - d^2y & - d^2b \\ - 2bx^2 & = & & & & - 2bx^2 \\ - 2bcx & = & & & & - 2bcx \end{array}$$

Ergo

Ergo omnibus in ſummam collectis,

$$\begin{array}{l} y^3 + by^2 + x^2y - bx^2 = 0 \\ \qquad\quad - d^2y - 2bcx \\ \qquad\qquad\qquad - bd^2 \end{array}$$

Scholion.

§. 669. Ductus lineæ facile apparet, ſi per plura puncta deſcribatur, patetque eam ex ramo vtrinque in infinitum excurrente conſtare, & ex ovali, ſi aliqua ſit lineæ *a* magnitudo *Fig.* 49, 51; ſi nulla ſit, ovalem cum ramo coaleſcere in linea AB, quibus ſeiungebantur *Fig.* 50, 52. Evaneſcens *c* in his nihil mutat, reddit autem partes vtrinque lineæ HC vel DC adiacentes inter ſe ſimiles & æquales. *Fig.* 51. 52. Si autem *b* evaneſcat, linea convertitur in circulum. Fit enim

$$y^3 + x^2y - d^2y = 0$$

& hinc $y^2 + x^2 = d^2$.

§. 670. Iidem ductus & ex æquatione deteguntur; ſed quia *y* ad dignitatem tertiam aſcendit, paullo difficilius. Si *y* quæratur ex *x*, triplex eius valor prodit, quorum quilibet ſi poſſibilis fuerit, recta ad AB perpendicularis, in tribus punctis curvam ſecabit, alias in vno, quia vna iſtarum radicum neceſſario poſſibilis eſt. Hinc ſequitur curvam ſecundum AB vtrinque in infinitum excurrere. Sed *x* ex y per æquationem quadraticam datur: vnde nulla rectæ AB parallela in pluribus quam duobus punctis cum curva concurret.

Si y ponatur $= -b$, fit $x^2 + cx = 0$, cuius æquationis cum duæ radices ſint, $x = 0$ & $-x = c$, quælibet recta ad AB parallela, quæ per punctum C ducitur, curvæ bis occurret, primo in ipſo hoc puncto C, deinde in recta DG producta. Si fuerit $c = 0$, erit & $-x = 0$, atque duplex concurſus mutabitur in vnum.

Si vero y ponatur $= 0$, æquatio mutatur in hanc:

$$-bx^2 - 2bcx - bd^2 = 0$$

vel

$$x^2 + 2cx + d^2 = 0$$

cum ergo ſit $d^2 = c^2 + a^2$

erit $x^2 + 2cx + c^2 = -a^2$

cuius æquationis radices impoſſibiles erunt, ſi aliqua fuerit a, quantulacunque fuerit. Hoc ergo caſu AB curvam nuspiam ſecabit. Si nulla fuerit a, erit $x^2 + 2cx + cc = 0$, cuius æquationis cum iterum duæ radices ſint inter ſe æquales, AB curvam in eodem puncto, ad quod ſcilicet $x = -c$, bis ſecabit.

§. 671. Cæterum infinita excogitari poſſunt problemata indeterminata, quæ lineis in plano deſcriptis vniverſaliter ſolventur, & ſic, vt vt vnius litterarum indeterminatarum, quæ in æquatione inſunt, y, ad alteram x relatio in conſpectu ſit, ad quamvis huius magnitudinem. Poteſtque omnis eiusmodi linea, niſi inſtrumentum ad manus ſit, quod ei ductu continuo deſcribendæ ſerviat, per puncta manu libera ſatis accurate deſcribi, ſi horum idoneus reperiatur numerus. In exemplis adlatis, puncta ea admodum expedite reperta ſunt. Sunt autem ea ſtudio ſelecta, neque exiſtimari debet laborem nunquam maiorem eſſe. Verum quacunque ratione puncta ea detegantur, vel quicunque ad deſcribendam lineam adhibeatur modus alius: conandum eſt, ne aliqua omittantur, quæ partem lineæ vel ramum exhibere debebant; vtpote quo commiſſo, mutilam prodire lineam neceſſe eſt. In figuris 45, 46, 47 linea ex duabus partibus conſtabat, quarum vnam ab altera etſi recta AB plane ſeiungat, neutra tamen ſola problema indeterminatum plane ſolvit, & in omni caſu. Harum autem partium vnam tantum deſcribet, qui ea tantum reperit puncta, quæ ad vnam rectæ AB partem cadunt, iis, quæ cadunt ad alteram, neglectis. Sic & hyperbolæ ſemper duæ ſunt inter ſe coniugatæ, & ad idem pertinentes problema vniverſaliter propoſitum. Clariſſime autem patet partium connexio in figuris 49 & 51. Partes lineæ, quam ea ſchemata exhibent, vniantur in vnum continuum ductum, conſtantibus, quæ in æquationem ingrediuntur, mutatis, vt factum eſt ad figuras 50 & 52. Quare pro diverſis lineis haberi non poſſunt.

§. 672. Ex iisdem patet, admodum diverſas fieri lineæ, per datam æquationem exhibitæ, formas, ſi datæ æquationis quantitates mutentur. Verum in magis compoſitis, ductus illi multo magis contorti ſunt, atque multiplices. F.53. Ita ſi circulus detur, centro C deſcriptus, cum duobus punctis A & B, iubeamurque per vnum horum punctorum A rectam ducere infinitam, quæ circulum vtcunque ſecet; atque a quovis punctorum D & *d*, peripheriæ cum hac recta communium, in hanc rectam ponere, a D quidem DF & DG, æquales diſtantiæ DB puncti D a dato B; a puncto *d* vero *df* & *dg*, æquales diſtantiæ *d*B puncti *d* ab eodem B, tumque per puncta hoc modo reperta F, *f*, G, *g* curvam deſcribere; formæ multum diverſæ prodeunt, prout quodlibet punctorum A & B vel in peripheria circuli ſumitur, vel intra circulum vel extra, ad hanc vel illam a centro diſtantiam. Poteſt autem A & in infinitum a centro circuli removeri; quo facto rectæ, quæ per id punctum ducendæ erant, parallelæ fiunt. Porro puncta A & B vel in eandem circuli diametrum

metrum cadere poſſunt, vel in diverſas. Sed tamen omnes curvæ hac lege deſcriptæ, poſt aliquot ambages in ſeſe demum redeunt. Verum ſi loco peripheriæ circuli alia linea vſurpetur, poſſunt & curvæ in infinitum excurrentes prodire, quod faciunt, quæ in problemate deſcriptæ ſunt, vbi loco peripheriæ circuli eſt linea recta. Vt clarius pateſcerent hæ formarum mutationes, quatuor curvæ formæ deſcriptæ ſunt, modo expoſito, punctis A, C & B in eadem diametro, B vero in circuli peripheria, aſſumptis. In figura 54 punctum A extra limitem tabulæ cadit, diſtatque a centro C magis, quam tribus circuli ſemidiametris. Pars curvæ huic puncto A obverſa, ſimplex eſt, & tota introrſum flexa. In figura 55 AC tribus ſemidiametris æqualis eſt, curva autem apud A in cuſpidem deſinit. In figura 56 A pariter extra circulum ſumptum eſt, ſed ad diſtantiam a centro diametro minorem. Ea re nodus productus eſt in parte curvæ, quam potiſſimum conſideramus, apud punctum A. Denique in figura 57 puncto A intra circulum ſumpto, curva quaſi tota inverſa eſt, iis quæ ante cadebant extra, iam intra reliquorum ambitum incluſis. Non perdet operam, qui his & alios caſus addere, atque ſitum punctorum A, C, B ſenſim mutando, quemadmodum ea re ductus

F. 54. 55. 56. 57.

curvæ mutetur, diligenter conſiderare voluerit.

§. 673. Data ergo curvæ conſtructione, ſemper reperietur æquatio, omnia eius puncta ad rectam referens per rectas alias datæ poſitionis; dummodo omnia, quæ ad conſtructionem illam vſurpantur tanquam data, per lineas rectas poſſint exhiberi; generatimque nullus puncta curvæ determinandi concipietur modus, qui per ſigna algebraica exprimi nequeat. Si enim curvæ deſcriptio diviſionem arcus aut anguli, in quodlibet partes æquales, exegerit, vel vt recta dato arcui circuli æqualis ſumatur, vel vt recta ſumatur, quæ ſit ad aliam rectam, vt angulus ad angulum, vel quid ſimile, quod per geometriam effici non poteſt: neque in poteſtate erit æquatio, curvam dicto modo ad lineam rectam referens, per alias rectas. Æquatio dari poteſt; ſed ea quantitates involvet cum linea recta incomparabiles.

§. 674. Ex æquatione ductus curvæ non minus clare perſpicitur, quam ſi, in plano deſcripta, obverſaretur oculis, ſed pedetentim, & non ſine aliquo labore. Neceſſe autem eſt vt de poſitione linearum indeterminatarum, quæ plerumque denotantur per x & y, conſtet. Ad eas, quas adhuc confecimus, æquationes, diverſas x vel in eandem rectam cadere ſumſi-

ſumſimus; vel invicem parallelas eſſe, atque omnes y occurrere illis x ſub eodem angulo, recto vel vtcunque obliquo, ſed dato. Atque hic modus curvam referendi ad rectam omnium maxime concinnus iudicatur, a quo, niſi ob ſpeciales quasdam rationes, diſcedi non ſolet. Nam & eas ſumi poſſe x vel y, quæ productæ in aliquo puncto concurrant, vel quorum ſitus per aliam quandam legem generalem determinatur, facile patet. Ea vero re æquatio plerumque multum diverſa producitur ab ea, quæ ad y reperitur vel x, quarum omnium eadem eſt poſitio; quod vel ex iis perſpici poteſt, quæ adhuc vidimus.

SECTIO XI.

DE

CONSTRVCTIONE ÆQVATIONVM GEOMETRICA.

DEFINITIO XI.

§. 675.

In æquatione indeterminata, præter litteras quantitates datas notantes, duæ inſunt vel plures, quarum omnibus, præter vnam, pro arbitrio ſumptis, per æquationem determinatur reliqua illa. Hæ ergo quantitates *variabiles* dicuntur; datæ autem illæ etiam *conſtantes* audiunt.

Scholion.

§. 676. Cur conſtantes dicantur aliæ eiusmodi æquationum quantitates, aliæ variabiles, facile perſpicitur ex iis, quæ de ſolutione eiusmodi æquationum præcepta ſunt. Variabilium numerus in eadem æquatione ternarium raro ſuperat. Hic autem ne eæ quidem æquationes conſiderabuntur, in quibus variabiles duabus plures inſunt: ad quas, ab illis, quarum duæ tantum ſunt variabiles, non difficillimus eſt tranſitus. Æquationum autem, quæ duas tantum variabiles continent, quamvis geometrice exhiberi poſſe per lineam in plano deſcriptam, rectam vel curvam, ex hactenus oſtenſis patet.

§. 677. In æquatione $xy = aa$ littera a quantitatem conſtantem denotat, x autem & y notant variabiles. Sumpta ergo quacunque x, dabitur ei reſpondens $y = \frac{aa}{x}$, ſimilemque in modum, per y ſumptam, determinabitur x. Si ergo a, x, y denotaverint lineas rectas, poterit curva, per quam y ex aſſumpta x, vel hæc ex illa, reperiri poſſit, conſtrui multis modis.

modis. Vt, ſi rectæ AB perpendicularis AC F.58. ſumatur æqualis datæ a, traductisque per punctum C, plurimis rectis CD, ſumta quacunque x, vt AD, fiat vbique DE $= y = \frac{aa}{x}$, atque per puncta E ita reperta curva tranſire intelligatur, erit ad $x = \text{AF}$, $y = \text{FG}$, quæ vt reperiatur nihil opus eſt, quam vt per punctum datum C & aſſumptum F, producatur CG, donec curvæ apud G occurrat.

§. 678. Poſſunt & aliæ eiusmodi conſtructiones concipi infinito numero; maxime ſi eæ quoque admittantur, in quibus alterutra variabilium x, y, vel vtraque, angulum, aut partem peripheriæ circuli, aut aliam eiusmodi quantitatem denotare ponitur, cuius rationem ad aliam eiusmodi quantitatem, vel ad lineam rectam, geometria exhibere non poteſt. Vt ſi a F.59. peripheria AB, cuius centrum eſt C, reſectus ponatur arcus AD $= x$, atque in CD poſita CE, quæ per eandem æquationem $xy = aa$ ex conſtanti a & aſſumpto x determinatur, idemque intelligatur factum ad quamlibet aliam magnitudinem variabilis x, curva oritur HI, ad quam ſi ponatur $x = \text{AF}$, puncto F vtcunque aſſumpto, ducaturque CGF, fit CG ad x illam pertinens y.

§. 679. Verum ſimpliciſſima harum conſtructionum eſt, qua adhuc ſemper vſi ſumus, eaque ita recepta, vt regulariter alia ne quidem adhiberi ſoleat. F.60. Ducuntur in plano duæ rectæ infinitæ AB, CD, quæ ſeſe apud O ſub angulo quocunque, dato vel aſſumpto, ſecant. In recta AB, a puncto O ſumuntur x, affirmativæ verſus partem B, negativæ autem verſus partem A. Reperta autem ad x ita aſſumptam y, in rectam CD transfertur, ab eodem puncto O, & quidem verſus C, ſi affirmativa fuerit, & verſus D, ſi fuerit negativa. Vt, ſi ex æquatione $xy = aa$, ad $x = OG$ reperta ſit $y = OF$, ponentur puncta G & F, quemadmodum in figura appareat, ad hanc vel illam partem, prout affirmativæ ſunt OG, OF vel negativæ. Hoc facto, ſi compleatur parallelogrammum FG, vt fiat $FE = OG = x$, & $GE = OF = y$, eſt E punctum lineæ, quæ, ſi per infinita alia puncta hac lege reperta tranſire intelligatur, ſumta x quacunque, ſi fiat Og æqualis huic x, eſt ge ad CD parallela, y ad x illam pertinens: vel ſi Of ſumatur $= y$, ducaturque fe parallela ad AB, eſt hæc $fe = x$, quæ pertinet ad aſſumptam y.

§. 680. Cadet autem punctum curvæ E ita determinatum, in angulum COB, ſi vtraque variabilis x & y affirmativa fuerit; in angulum

gulum AOD, ſi vtraque fuerit negativa; in angulum AOC, ſi x negativa fuerit, & y affirmativa; & in angulum BOD, ſi affirmativa fuerit x, y autem negativa.

DEFINITIO XII.

§. 681. Rectarum infinitarum AB, CD, ſeſe in plano lineæ rectæ & curvæ HEI ſub dato angulo O ſecantium, ad quas puncta eius lineæ HEI referuntur per latera parallelogrammi FG, vnam AB, *baſin* dicam, alteram CD *latus*.

§. 682. Recta vero GE, & reliquæ lateri CD parallelæ, *ordinatæ* dicentur *ad baſin* AB, vel huic baſi *ordinatim applicatæ*, ſub angulo dato O. Eodemque modo recta FE eique parallelæ dicentur *ordinatæ* eſſe *ad latus* CD, vel ei *lateri ordinatim applicatæ*, ſub eodem angulo O.

§. 683. Duæ quævis harum rectarum FE & GE, quarum ſcilicet vna baſi parallela eſt, altera lateri, etiam *coordinatæ* dicentur, ſi altera referatur ad alteram. Vnde angulus coordinatarum erit is, quem comprehendunt, isque ſemper æqualis angulo O.

Scholion.

§. 684. Ordinatim applicatæ ad baſin vel latus, aliquando infinitæ concipiuntur, ſed ploplerumque in rectis illis atque in curva, vel vtrinque in curva, terminatæ. Quare dicendum foret quales in quovis caſu intelligendæ ſint, niſi id ſchemata ſatis declararent. Pro ordinatis vel ordinatim applicatis, ſæpe etiam *applicatas* nude dicimus.

DEFINITIO XIII.

§. 685. Si AB ſit baſis, & EG aliqua ad eam ordinatarum, baſis pars OG, inter datum punctum O & ordinatam EG intercepta, *abſciſſa* dicitur, ab ordinata illa EG. Punctum autem datum O *abſciſſarum origo* eſt, per quod concipitur latus CD ductum eſſe. Quare ſi CD fiat baſis, OF æqualis applicatæ EG, iam abſciſſa erit, & FE æqualis abſciſſæ OG, applicata, ad quodlibet curvæ punctum E.

DEFINITIO XIIII.

§. 686. Linea omnis, quæ per æquationem exhiberi poteſt algebraicam, ſecundum hactenus expoſita, per quam ſcilicet ad datam quamvis abſciſſam detur ei reſpondens applicata, *algebraica* vocatur, vel *geometrica*: reliquæ quæ ita exhiberi non poſſunt, *tranſcendentes* vel *mechanicæ* dicuntur.

Scholion.

§. 687. Curvæ ſcilicet algebraicæ puncta quotcunque geometrice reperiri poſſunt: transſcendens ſi conſtruenda ſit, ad operationes mechanicas confugiendum eſt, quales ſunt diviſiones arcus aut anguli, & aliæ huiusmodi.

DEFINITIO XV.

§. 688. In *ordinibus* æquationum, quibus lineæ algebraicæ exprimuntur, conſtituendis, vna litterarum variabiles notantium æquipollet alteri; diciturque æquatio *primi ordinis*, quæ ſi pro y vbique ponatur x, vel y pro x, fit æquatio determinata primi ordinis; æquatio *ſecundi ordinis*, quæ ſimili ſubſtitutione fit æquatio ſecundi ordinis, & ita porro.

§. 689. Linea vero, per æquationem *primi ordinis* definita, & ipſa primi ordinis dicitur, vel primi generis, *ſecundi*, quæ definitur per æquationem ordinis ſecundi, & ita reliquæ.

Scholion.

§. 690. Æquatio indeterminata primi ordinis erit, in qua, præter conſtantem a, inſunt bx, cy, vel coniunctim vel ſeorſim.

Secundi vero ordinis æquatio, præter conſtantes, & bx, cy, continebit dx^2, exy, fy^2, vel coniunctim, vel aliquod eorum aut aliqua, ſeorſim.

Ter-

Tertii ordinis æquatio eadem continere poterit, quæ admittit æquatio ordinis ſecundi, habebit autem præterea horum gx^3, hx^2y, ixy^2, ky^3, vnum, vel aliqua vel omnia. Et ita porro.

Nempe, ſi quantitates iſtæ ordine ſcribantur:

I. a
II. bx, cy
III. dx^2, exy, fy^2
IIII. gx^3, hx^2y, ixy^2, ky^3
V. lx^4, mx^3y, nx^2y^2, pxy^3, qx^4

æquatio indeterminata primi ordinis neceſſario continebit aliquas quantitates ſeriei II, æquatio ſecundi ordinis aliquam vel aliquas quantitates ſeriei III habebit, æquatio ordinis tertii, aliquam vel aliquas quantitates ex ſerie IIII, vel omnes, & ita porro. Quælibet & ex antecedentibus ſeriebus quantitates quaſcunque adſciſcere poterit, ſed nullam ex conſequentibus.

§. 691. Cæterum, cum in omni linea algebraica per æquationem expreſſa, data ſupponatur, 1° abſciſſarum origo, 2° poſitio baſeos, 3° poſitio lateris; ſi, manente linea, aliquod horum, vel duo, vel omnia, mutentur, alias atque alias, pro eadem linea æquationes prodire neceſſe eſt. Pro linea autem hic ſæpe curva nomi-

nominabitur, etſi rectam quoque intelligere liceat, quia curvarum numerus multo potior eſt; rectæ autem & abſque iis, quæ curvarum declarationi, pulchre ſane, inſerviunt, facile intelliguntur.

PROBLEMA LXXX.

§. 692. *Manente curva, ſi vel origo abſciſſarum mutetur, vel poſitio baſeos aut lateris, vel aliqua horum aut omnia coniunctim: æquationem quoque, qua curva exprimitur, in aliam mutare, ad novam hanc originem, baſin atque latus.*

SOLVTIO.

§. 693. Baſis, ad quam æquatio curvæ F. 61. refertur, ſit AB, latus CD, origo abſciſſarum O, ductaque ex puncto quocunque curvæ E lateri parallela EG, dicatur OG, x & GE, y. Si ergo I°, poſitione baſeos atque lateris manente, origo transferatur in ω, ducaturque per ω ad AB parallela $\alpha\beta$, & $\kappa\delta$ parallela ad CD, erit iam $\alpha\beta$ baſis & $\kappa\delta$ latus, ſed Eγ applicata ad abſciſſam $\omega\gamma$. Quare ſi nova hæc abſciſſa $\omega\gamma$ dicatur z, & nova applicata Eγ ſit v, erit $x = z + \alpha\omega$ & $y = v + \omega\delta$. Si ergo $\alpha\omega$ vel Oδ, qua origo promota eſt ſecundum baſin, dicatur m, & $\delta\omega$ vel Oα, qua eadem ſecundum latus promota ta eſt, n, atque in æquatione data loco x ſcribatur $z+m$, & $v+n$ loco y, mutabitur æquatio in eam, quæ quærebatur. Idemque fiet origine translata in angulum BOD, ſi n ponatur negativa, atque ſumatur $y=v-n$, manente $x=z+m$. Si ω ceciderit in angulum AOD, etiam m negativa erit, atque ponendum cum $y=v-n$, tum $x=z-m$. Si vero ω tranſierit in angulum AOC, n affirmativa erit, & m negativa, atque hinc $x=z-m$ & $y=v+n$. Sed ſi ω non exceſſerit ex baſi AB, erit $n=0$, & $y=v$, ſi non exceſſerit ex latere CD, erit $m=0$ & $x=z$.

F.62. IIº. Si maneat abſciſſarum origo O, & latus CD, baſis autem e ſitu AO dimoveatur in Oβ, dato angulo βOB, quem ſubtendit Bβ, lateri CD ad quamcunque diſtantiam parallela, dabitur ratio $O\beta : B\beta$, & $O\beta : OB$. Sit $O\beta : B\beta = 1 : p$ & $O\beta : OB = 1 : q$, ſed OG ſit nunc quoque x æquationis datæ, & GE eius y. Si ergo nova curvæ HI æquatio quæratur, ad abſciſſam $O\gamma = z$ & $\gamma E = v$, quia $O\beta : OB = O\gamma : OG$, & $O\beta : B\beta = O\gamma : G\gamma$, erit $x=qz$, & $G\gamma = pz$, hinc $y = EG = E\gamma + G\gamma = v + pz$. His ergo in æquatione data loco x & y ſubſtitutis, prodibit æquatio imperata. Erit autem p negativa, ſi Oβ ceciderit in angulum DOB, ad q affirmatimativam. Si in angulum AOD ceciderit $O\beta$, & p & q negativa erit; ſi vero in AOC, p affirmativa erit, & q negativa.

III. Si abſciſſarum origo nunc quoque maneat O, mutetur autem poſitio lateris OC, quod tranſeat in $O\kappa$, conferet ad vniverſalitatem ſi poſuerimus, baſin, quæ fuit OB, ipſam quoque tranſiiſſe in $O\beta$. Sumpta ergo $O\kappa = O\beta = 1$, ducta ſit $C\kappa$ parallela ad $O\beta$, & $H\kappa$ ad OB, ſitque & nunc $O\beta : B\beta = 1 : p$, & $O\beta : OB = 1 : q$. Quia ergo triangulum $HC\kappa$, cuius latera parallela ſunt lateribus trianguli $OB\beta$, huic triangulo ſimile eſt, erit $OB : O\beta = H\kappa : C\kappa$, & $OB : B\beta = H\kappa : HC$. Si ergo dicatur $H\kappa = t$, & $OH = s$, erit $C\kappa = \frac{t}{q}$, & $HC = \frac{pt}{q}$, hinc $OC = OH - HC = s - \frac{pt}{q}$. F.63.

Iam cum FE ſit x ad baſin $O\beta$, & OF ei reſpondens y; ſi $E\gamma$, lateri $O\kappa$ parallela, dicatur v, & $O\gamma = E\varphi$ ſit illi reſpondens z, ex analogia $O\kappa : OC = O\varphi : OF$, id eſt, $1 : s - \frac{pt}{q} = v : OF$, fit $OF = y = sv - \frac{ptv}{q}$, ex analogia vero $O\kappa : C\kappa = O\varphi : F\varphi$, vel

$1 : \frac{t}{q} = v : F\varphi$ elicitur $F\varphi = \frac{tv}{q}$, & hinc $x = FE = F\varphi + \varphi E = \frac{tv}{q} + z$.

Mutationes ſignorum ex dictis facile apparent. Si autem angulus $BO\beta$ nullus eſſe intelligatur, cadatque adeo $H\kappa$ in $C\kappa$, ob $q = 1$ & $p = 0$, ſit $y = sv$ & $x = z + tv$. Atque ita vniverſalior ſolutio hunc quoque caſum complectitur, quo baſis e ſitu dimota non eſt.

IIII. Si ergo plures eiusmodi mutationes factæ ſint, atque primo CD *Fig.* 61 tranſierit in $\kappa\delta$ ſibi parallelam: in æquatione data, loco x ſcribetur $x + m$; ſi ſecundo & AB eiusdem figuræ 61 in $\alpha\beta$ tranſierit, in æquatione ita producta, $y + n$ ponetur loco y. Si tertio, translato hoc modo puncto O, baſis AB declinaverit in $O\beta$ *Fig.* 62, rurſus in æquatione, quæ ſecundo loco producta eſt, qx ſcribetur loco x, & $y + px$ loco y. Tandem ſi & latus ex ſitu OC declinaverit in $O\kappa$ *Fig.* 63, in æquatione tertio loco producta pro x ponetur $x + \frac{ty}{q}$, & pro y ſcribetur $sy - \frac{pty}{q}$.

Corollarium I.

§. 694. Hinc autem ſequitur duas æquationes, quales conſideramus, curvas diverſas non

non definire, ſi vna earum mutari poſſit in alteram, ſcribendo

$$\begin{array}{l}
\text{pro } x \;\ldots\ldots\ldots\; x+m\\
\text{vel pro } y \;\ldots\ldots\ldots\; y+n\\
\left.\begin{array}{l}\text{vel pro } x \;\ldots\ldots\ldots\; qx\\ \text{\& pro } y \;\ldots\ldots\ldots\; y+px\end{array}\right\}\\
\left.\begin{array}{l}\text{vel pro } x \;\ldots\ldots\ldots\; x+\frac{t}{q}y\\ \text{\& pro } y \;\ldots\ldots\ldots\; sy-\frac{pt}{q}y\end{array}\right\}
\end{array}$$

ſive ſingulæ vſurpentur hæ ſubſtitutiones, ſive binæ, ternæ, vel quaternæ. Plures enim non ſunt, quia, poſteriorum ſemper duas coniunctim fieri debere, ex ſolutione apparet. Poteſt autem quicunque litteris m, n, p, q, s, t, valor tribui, poſitivus vel negativus. Eæ demum curvæ algebraicæ diverſæ erunt, quarum æquationes per ſubſtitutiones has ad eandem reduci non poſſunt, quicunque litteris m, n, p, q, s, t valor tribuatur.

Corollarium II.

§. 695. Conſideranti autem has mutationum formulas, mox pateſcit, per nullam illarum ordinem mutari poſſe æquationis, per quam linea exprimitur, vel ipſius lineæ ordinem. In nulla enim formularum x vel y vltra primam dignitatem aſcendit: vnde totus harum ſubſtitutionum effectus in eo conſiſtit, vt, loco aliquarum x, in æquationem, præter novas x, etiam y inferantur, quod ordinem mutare non poteſt, in quo conſtituendo vna harum litterarum æquipollet alteri. §. 688. Quare eiusdem ordinis erit æquatio quamlibet curvam definiens, ad quamcunque baſin referatur, in plano, in quo ipſa deſcripta eſt, poſitam, & quæcunque ſumatur abſciſſarum origo, vel angulus coordinatarum.

Scholion.

§. 696. Poterant regulæ in ſolutione datæ in duas vniverſales contrahi, omnes mutationes ſimul complectentes, ſed hoc alias fortaſſe commodius fiet. Nunc vſum earum exemplo declaraſſe ſuffecerit.

F.67. §. 697. Si ad circulum, cuius diameter AB eſt $= 2r$, abſciſſarum origo ſit centrum O, angulus vero coordinatarum DOB rectus, adeoque OF $= x$, & FE $= y$, eius peripheriam definit æquatio hæc, $yy + xx - rr = 0$. Sit vero abſciſſarum initium ſumendum in A. Erit $m = -r$, n, & reliquis eius generis litteris omnibus, nihila notantibus. Si ergo pro x ſcribatur $x - r$, prodit æquatio $yy + xx - 2rx = 0$, vel $yy = 2rx - xx$, in qua, reliquis manentibus, abſciſſæ a puncto A inchoari ponuntur.

Si abſciſſarum initium transferatur in G, vt baſis fiat GH, manentibus reliquis, pro y ſubſtituendum erit $y+n$, OG denotata per n, quo facto æquatio prodibit $yy+2ny+xx+nn-rr=0$, in qua, ſi y notet EI, ei reſpondens x erit GI vel OF.

Si initium abſciſſarum transferatur in K, ſitque $OL=a$ & $LK=b$, loco x ponendum erit $x-a$, & loco y ſcribendum $y-b$, quo facto æquatio mutabitur in hanc

$$y^2-2by-2ax+x^2+a^2+b^2-r^2=0$$

ad quam æquationem baſis eſt KM, in qua ſi KN fuerit aliqua x, erit NE, vel Ne ei reſpondens y.

§. 698. Si iam, manente abſciſſarum origine K, y non perpendiculares reddendæ ſint baſi, verum rectæ alicui KP, quæ diametro AB obliqua eſt, parallelæ: deturque ratio $KP:LP=1:t$, & $KP:KL=1:s$, in æquatione vltima pro x ſcripto $x+ty$, & sy pro y, quia hic $p=0$ & $q=1$, prodibit

$$\begin{aligned} s^2y^2-2bsy-2ax-2aty+x^2+2txy+t^2y^2 \\ +a^2+b^2-r^2=0 \end{aligned}$$

quæ, cum $tt+ss$, ob angulum R rectum, hic ſit $=KP^2=1$, ita contrahi atque ordinari poteſt:

$$\begin{array}{llllll} y^2 & -2aty & +2txy & -2ax & +x^2 & +a^2=0 \\ & -2bsy & & & & +b^2 \\ & & & & & -r^2 \end{array}$$

Atque hæc æquatio generaliſſima eſt earum, quæ ad circulum dari poſſunt. Baſeos enim poſitio hic mutari nequit, cum, quæcunque ſumatur, ſemper ſit alicui circuli diametro parallela. Poteſt autem æquatio contrahi, ſi litteræ lineas datas notantes, ſcopo huic convenienter ſumantur. Sic ſi fuerit $aa + bb = rr$, quod erit, ſi punctum K ceciderit in peripheriam, excidet vltimum æquationis membrum, atque æquatio mutabitur in hanc

$$\begin{aligned} y^2 - 2aty &+ 2txy - 2ax + x^2 = 0 \\ - 2bsy & \end{aligned}$$

& quæ ſunt ſimilia.

PROBLEMA LXXXI.

§. 699. *Cono per planum quodcunque ſecto, invenire figuram ſectionis.*

PRÆPARATIO.

§. 700. Superficies conica generatur, recta circa punctum aliquod, extra planum circuli poſitum, ita converſa, vt ſemper per peripheriam eius circuli tranſeat. Quia recta natura ſua infinita eſt, duorum conorum ſuperficies, apud verticem oppoſitorum, ita ſimul oriuntur, quorum communis eſt axis. Planum autem vel alterutrum horum conorum tantum ſecat, vel vtrumque. Si per verticem tranſeat planum ſecans, ſectionem fore

fore angulum aliquem planum rectilineum, vltro patet; circulum autem fore ſectionem, quæcunque fit per planum, baſi coni, vel circulo illi, circa quem ſuperficies conica primum deſcripta eſt, parallelum, in elementis demonſtratur. *Geom.* §. 296. De iis ergo ſectionibus ſolis quæri debet, quorum plana neque per verticem tranſeunt, neque baſi parallela ſunt.

F. 64. 65. 66. Sit DFI planum ſectionis, & HFG planum circuli baſi coni paralleli, quod a plano DFI in FI ſecatur. Erit FI, ſi producatur, vna ex chordis circuli HFG. Sit hæc chorda bifariam diviſa a puncto J, atque conus etiam per axem ſuum, atque per punctum I ſectus, plano BAC, quod planum circuli HFG ſecet in HG. Erit HG circuli diameter, chordæ dimidiatæ FI perpendicularis *Geom.* §. 106. Idem planum BAC planum ſectionis ſecabit in DE, quæ vel parallela erit lateri AB *Fig.* 64, vel id ſecabit ad partem B, *Fig.* 65, vel vero eidem ad partem A producto occurret. *Fig.* 66. Inveſtiganda eſt figura plani DFI, vel natura curvæ DF, in quolibet trium caſuum propoſitorum. Plures enim eſſe non poſſunt.

SOLVTIO.

§. 701. His ita præparatis, quodcunque ſumatur planum FGH baſi coni parallelum, erit FGH ſemicirculus, & recta FI diametro GH perpendicularis *Geom.* §. 245, quia omnes GH ita productæ, vt & omnes FI, parallelæ ſunt *Geom.* §. 255. Ergo in ſemicirculo $IF^q = GI \times IH$. *Geom.* §. 189.

Sit $IF = y$, $DI = x$, DK & EL diametro HG parallelæ. Erit in caſu figuræ 64. $AK : KD = DI : IH$, hinc $IH = \frac{KD}{AK}.x$. Sed $GI = KD$, ergo ex $IF^q = GI \times IH$ fiet $y^2 = \frac{KD^2}{AK} \times x$, vel, ſi $\frac{KD^2}{AK}$ dicatur β,

$$y^2 = \beta x.$$

In caſibus vero figuræ 65 & 66 eſt $DE : DI = EL : IH$, & $DE : IE = DK : GI$, vnde, ſi DE dicatur α, quo fit in figura 65 $EI = \alpha - x$, & in figura 66. $EI = \alpha + x$, prodit $IH = \frac{EL}{\alpha}.x$ & $GI = \frac{DK}{\alpha}.(\alpha - x)$, vel $\frac{DK}{\alpha}.(\alpha + x)$. Vnde fit ad figuram 65, $GI \times IH = y^2 = \frac{EL.DK}{\alpha}.\frac{\alpha x - xx}{\alpha}$, & ad figuram 66. $y^2 = \frac{EL.DK}{\alpha}.\frac{\alpha x + xx}{\alpha}$. Quæ æquationes, ſi hic $\frac{EL.DK}{\alpha}$ ſit $= \beta$, concinnantur in has:

ay^2

$$\alpha y^2 = \beta\alpha x - \beta xx$$
$$\alpha y^2 = \beta\alpha x + \beta xx.$$

Non autem differunt tres æquationes pro triplici ſectione ita repertæ, niſi poſitione & magnitudine lineæ α. Si enim in $\alpha y^2 = \beta a x - \beta x^2$ fiat α infinita, evaneſcente quantitate βx^2, fit $\alpha y^2 = \beta\alpha x$ vel $y^2 = \beta x$. Si α fiat negativa, oritur $-\alpha y^2 = -\beta\alpha x - \beta x^2$, vel $\alpha y^2 = \beta\alpha x + \beta xx$.

Schólion.

§. 702. Tres hæ ſectiones conicæ eædem lineæ ſunt, quas ſupra in plano deſcripſimus, additis nominibus Parabolæ, Ellipſeos, Hyperbolarum. Si enim in æquatione ad parabolam §. 648, quæ fuit $ay = bx + xx$, denominationes variabilium mutentur, atque pro x ſcribatur y, & y pro x, fit $ax = by + yy$. Origine autem abſciſſarum mutata, pro x ſcripto $x + m$, & pro y ſurrogato $y + n$ §. 694, eadem curva definitur per æquationem $ax + am = by + bn + yy + 2ny + nn$, quæ ita ordinari poteſt,

$$\begin{array}{llll} yy & + 2ny & - ax & + bn = 0 \\ & + by & & + nn \\ & & & - am \end{array}$$

Hæc autem eadem fit cum æquationum hic repertarum prima $y^2 = \beta x$, vel $y^2 - \beta x = 0$, ſi ponatur $2n + b = 0$, & hinc $n = -\frac{1}{2}b$; $a = \beta$, & $bn + nn - am = 0$, vel $am = bn + nn$, vnde,

pro

pro n ſurrogato $-\frac{1}{2}b$, fit $am = -\frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}bb = -\frac{1}{4}bb$, & $m = -\frac{bb}{4a}$.

§. 703. In æquatione autem pro ellipſi §. 644. reperta, $y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}$, vel $a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$, ſi in locum litteræ x ſurrogemus $x + m$, fit $a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2 - 2c^2mx - c^2m^2$, vel $y^2 + \frac{2c^2mx}{aa} + \frac{c^2x^2}{aa} + \frac{c^2m^2}{aa} - c^2 = 0$, quæ mutatur in eam, quæ pro altera coni ſectione hic reperta eſt, $\alpha y^2 = \alpha\beta x - \beta xx$, vel $y^2 - \beta x + \frac{\beta xx}{\alpha} = 0$, ſi ponatur $-\beta = \frac{2c^2m}{aa}$; $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c^2}{a^2}$; $\frac{c^2m^2}{a^2} - c^2 = 0$.

Harum æquationum vltima dat $m^2 = a^2$, hinc vel $m = a$, vel $m = -a$. Poſterius ſi ſubſtituatur in prima, fit $\beta = \frac{2c^2}{a}$. Hoc autem ſi inferatur in ſecundam, prodit $\frac{2cc}{a\alpha} = \frac{c^2}{a^2}$, vel $\frac{2}{\alpha} = \frac{1}{a}$, hinc $\alpha = 2a$, vel $a = \frac{1}{2}\alpha$. Vnde $\beta = \frac{4c^2}{\alpha}$ & $\alpha\beta = 4c^2$, ac $c^2 = \frac{1}{4}\alpha\beta$, quibus ſubſti-

ſubſtitutis æquatio pro ellipſi in æquationem pro ſectione ſecunda mutatur.

§. 704. Eodem modo æquatio §. 656. pro hyperbolis, $a^2y^2 = c^2x^2 - a^2c^2$ in eam convertitur, quæ pro tertia coni ſectione reperta eſt. Si hic quoque pro x ſcribamus $x + m$, prodit $a^2y^2 = c^2x^2 + 2c^2mx + c^2m^2 - a^2c^2$, vel $y^2 - \frac{2c^2mx}{a^2} - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{c^2m^2}{a^2} + c^2 = 0$, quæ ſi comparetur cum æquatione pro tertia coni ſectione $\alpha y^2 = \alpha\beta x + \beta xx$, vel $y^2 - \beta x - \frac{\beta xx}{\alpha} = 0$, patet vtramque fore eandem, ſi ſumatur, $\beta = \frac{2c^2m}{a^2}$, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c^2}{a^2}$, & $-\frac{c^2m^2}{a^2} + c^2 = 0$.

Ex vltima harum æquationum iterum colligitur $m^2 = a^2$, & $m = a$, vel $m = -a$. Si hic vtamur priore, $m = a$, fit $\beta = \frac{2c^2}{a}$, & hinc per æquationem alteram $\frac{2c^2}{a\alpha} = \frac{c^2}{a^2}$, vel $\frac{2}{\alpha} = \frac{1}{a}$, ergo $2a = \alpha$, & $a = \frac{1}{2}\alpha$, hinc $\beta = \frac{4c^2}{\alpha}$, & $cc = \frac{1}{4}\alpha\beta$. Hæc ergo ſi in æquationem pro hyperbolis inferantur, prodit ea, quæ tertiam coni ſectionem definit.

PROBLEMA LXXXII.

§. 705. *Cuiusvis linearum, quæ ſubſunt æquationi generali huic*

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.$$

puncta quotlibet geometrice reperire.

PRÆPARATIO.

§. 706. Litteræ α, β, γ, &c. lineas rectas conſtantes notant, vtcunque hæ determinentur per alias, quarum aliquæ vel omnes & negativæ eſſe poſſunt, vel penitus deficere. F.68. Ductis autem rectis infinitis, MN, AO, quæ ſeſe apud O ſecent, ponentur linearum α, β, γ &c. x, y illæ, quæ in MN cadunt vel huic parallelæ ſunt, a parte M verſus partem N protendi, ſiquidem affirmativæ fuerint, ſin fuerint negativæ, a parte N verſus M. Rectarum autem, quæ in AO cadunt, vel huic parallelæ ſunt, affirmativæ ponentur a parte O protendi verſus A, negativæ in oppoſita. Angulus O cum quilibet eſſe poſſit, ſumetur rectus eſſe.

SOLVTIO.

I.

§. 707. Si ergo puncta reperiunda ſint, per quæ deſcribi poſſit linea, ad quam

$$y = \alpha + \beta x$$

F.69. ſumpta OP pro arbitrio, per O & P duc rectas

rectas ad MN perpendiculares, OP autem iſtam dic m. Deinde fac OB $= \alpha$, & BA $= m\beta$, ſiquidem α & β in æquatione affirmativæ fuerint. Si enim α fuerit negativa, a puncto O ponetur ſub rectam MN, $m\beta$ vero negativa, ab extremo prioris B, quodcunque fuerit, pariter deorſum protendetur. His ita præparatis, ad x æqualem aſſumptæ OQ reperietur y, ducta Aa parallela ad MN, & connexa Ba. Quæ, vbi opus eſt producta, ſi per Q parallelam ad OA ſecet in R, erit QR $= y$ quæſitæ. Producenda autem erit Ba, ſi punctum Q extra OP ſumatur, ad hanc vel illam partem, N aut M. Poteſt enim Q in infinita MN vtcunque ſumi.

DEMONSTRATIO.

Si enim Bb ad MN parallela, rectam QR in S ſecet, cum ſit Bb ſive OP ad ba ſive BA, vt BS ad RS, erit $m : m\beta = x :$ RS, hinc RS $= \beta x$, & RQ $=$ SQ $+$ RS $=$ BO $+$ RS $= \alpha + \beta x$. Facile autem hæc demonſtratio ad eos caſus applicatur, quibus Q extra OP ſumpta eſt.

Corollarium I.

§. 708. Si alia ſumatur OQ, recta tamen Ba, qua reperitur punctum R, eadem erit, in quam ergo omnia puncta lineæ quæſita cadent: ergo ipſa hæc recta Ba in infinitum producta, erit

erit linea illa, quæ per æquationem $y = \alpha + \beta x$ exprimitur. Si ponatur $y = 0$, erit $\alpha = - \beta x$, & $x = - \frac{\alpha}{\beta}$, ad hanc ergo diſtantiam ad partem M producta B*a* ab MN ſecabitur.

Corollarium II.

§. 709. Si pro β ſubſtituatur ei æqualis $\frac{BA}{m}$, apparet eſſe $QR = OB + \frac{BA}{m} . x$.

II.

§. 710. Eadem ſi facienda ſint ad æquationem

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

reliquis eodem modo præparatis, fac $OC = \alpha$, F.70. $CB = m\beta$ & $BA = mm\gamma$. Ducta ergo B*a* vt prius, erectaque ad $OQ = x$ pro arbitrio ſumptam, QR, ſi R*b* ad MN parallela ducatur, connectaturque C*b*, quæ rectam QR apud S ſecet, erit S punctum curvæ quæſitum & $QS = y$, ſive Q intra O, P ſumpta fuerit, ſive extra hos terminos, ad hanc vel illam partem.

DEMONSTRATIO.

Si & C*c* ad MN parallela ducatur, ex §. 709 apparet, fore RT ſive $cb = CB + \frac{AB . x}{m}$.

Cum ergo ſit $Cc : cb = CT : TS$, erit ex denominationibus, quas iam vſurpamus, $m : m\beta + m\gamma x = x : TS$, ergo $TS = \beta x + \gamma xx$, & hinc $QS = OC + TS = \alpha + \beta x + \gamma xx$: eodemque modo demonſtrabuntur ii caſus, quibus Q extra OP cadit.

Corollarium I.

§. 711. Si ponatur $y = 0$, fit $\gamma xx + \beta x + \alpha = 0$, vnde duo reperiuntur puncta, in quibus linea, de qua hic agimus, rectam MN ſecare poteſt, quare linea illa curva erit. Si x creſcendo omnem magnitudinem dabilem ſuperaſſe ponatur, evaneſcentibus præ γxx reliquis, fit $y = \gamma xx$. Ergo & $y = \infty$. Ad ingentes x idem proxime verum eſt, fiuntque y affirmativæ, ſive affirmativæ ſumantur ingentes iſtæ x, ſive negativæ, ſiquidem γ affirmativa fuerit; ſi autem γ negativa ſit, y & ad $+x$ & ad $-x$ negativæ fiunt. Ergo curva, ad eandem partem rectæ MN, duobus ramis in infinitum excurrit.

Corollarium II.

§. 712. Si pro β reſcribamus $\frac{CB}{m}$, & pro γ, $\frac{BA}{mm}$ fit $QS = OC + \frac{CB}{m} \cdot x + \frac{BA}{m^2} \cdot xx$.

III.

F.71. §. 713. Si reperiunda ſint puncta curvæ, quæ definitur æquatione cubica

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

reliquis nunc quoque eodem modo factis, ſumetur $OD = \alpha$, $DC = m\beta$, $CB = mm\gamma$, $BA = m^3\delta$, porrigenturque harum rectarum illæ, quæ affirmativæ ſunt, nunc quoque a puncto inferiore verſus ſuperiora, negativæ a puncto ſuperiore verſus inferiora. Si ergo punctum, ex datis A, B, C per antecedentia repertum, fuerit S, ductis Sc & Dd parallelis ad MN, erit $VS = dc = DC + \frac{CB}{m}x + \frac{BA}{m^2}x^2$, vel ex denominationibus, quibus iam vtimur, $dc = m\beta + m\gamma x + m\delta x^2$. Vnde ſi ducatur Dc, quæ rectam per Q ad MN ordinatam ſecet in T, per analogiam $Dd : dc = DV : VT$, fit $VT = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, & $TQ = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, quæ demonſtratio ſimiliter ad eos caſus, quibus Q cadit extra OP, facile extenditur.

Corollarium I.

§. 714. Si ponatur $y = 0$, erit $\delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$, cuius æquationis cum tres eſſe poſſint radices, tribus quoque locis curva,

quæ

quæ ita conſtruitur, concurrere poterit cum recta MN: vno neceſſario concurret, quia æquationis cubicæ vna ſemper radix poſſibilis eſt. Poſtquam x in infinitum crevit, reliquis evaneſcentibus, remanet $\delta x^3 = y$, quæ æquatio vnicam y, eamque affirmativam, reddit, ſi x affirmativa ſit, negativam autem, ſi x ſit negativa, poſita δ affirmativa. Ad negativam enim δ, y ingens negativa erit ad x affirmativam; & affirmativa, ad negativam x. Ex vtroque ſequitur, hanc quoque curvam duobus ramis in infinitum excurrere, ſed ad diverſas rectæ MN partes.

Corollarium II.

§. 715. Si iterum pro α ſcribamus OD, pro β, $\frac{CD}{m}$, pro γ, $\frac{CB}{m^2}$, & pro δ, $\frac{BA}{m^3}$, fit

$$QT = OD + \frac{CD}{m}x + \frac{CB}{m^2}x^2 + \frac{BA}{m^3}x^3.$$

IIII.

§. 716. Hinc autem facilis progreſſus eſt, ad puncta curvæ, quam definit æquatio biquadratica F. 72.

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

& ad reliquas, quarum æquationes hac quoque ſuperiores ſunt. Generaliter ſcilicet in rectam, ad MN per O perpendicularem, ab hoc puncto rectæ protendentur, ea lege, vt finis antecedentis ſit ſequentis initium, ſumeturque prima illarum rectarum $=\alpha$, altera $= m\beta$, tertia, $mm\gamma$, quarta $m^3\delta$, quinta $m^4\varepsilon$ & ita porro; ſemperque harum rectarum illæ, quæ affirmativæ ſunt, porrigentur verſus ſuperiora, negativæ verſus inferiora. Deinde, punctis harum rectarum extremis per litteras A, B, C, D, E ordine retrogrado ſignatis, ordinataque per aſſumptum Q infinita QX, linea deſcribetur A*a*R*b*S*c*T*d*E, cuius aliquæ partes baſi MN parallelæ ſunt, reliquæ productæ per puncta A, B, C, D, E transeunt. Abſolutis enim hoc modo, ordine ſuo, omnibus punctis A, B, C, D, E, erit V punctum curvæ quæſitum, & QV $= y$ ad aſſumptam $x =$ OQ.

V.

§. 717. Vbi aliqua rectarum ED, DC, CB defecerit propterea, quod aliqua litterarum β, γ, δ, ε notat nihilum, vel ſi earum plures defecerint, puncti, quod per eam rectam determinandum foret, ratio habenda nihilominus eſt. Evaneſcens ſcilicet recta in punctum contrahitur, quod & pro initio eius rectæ haberi debet, & pro fine. Quare eodem modo tractandum erit punctum eiusmodi, quaſi duplex foret. Si duæ vel

vel tres rectæ evanuerint, quæ deinceps ponendæ fuerant, punctum tanquam triplex vel quadruplex conſiderabitur, commodeque etiam per duas, tres vel quatuor litteras in figura ſignabitur.

§. 718. Sit determinandum punctum curvæ, cuius hæc eſt æquatio

$$y = \alpha * * + \delta x^3 - \varepsilon x^4$$

facienda erit $OE = \alpha$, $ED = 0$, $DC = 0$, F.73. quare tria puncta E, D, C in vnum coincident, deinde $CB = m^3\delta$, & $BA = -m^4\varepsilon$. Deſcripta deinde congerie rectarum A*a*R*b*S*c*T*d*E, ſecundum dicta, erit V punctum curvæ quæſitum, & $QV = y$, ad $OQ = x$.

Demonstratio.

Apparet autem facile, quæ facienda erant ad puncta EDC ſeparata, eadem facienda fore, vbi coincidunt. Verum & æquatio propoſita $y = \alpha + \delta x^3 - \varepsilon x^4$ haud difficulter ex conſtructione hac elicietur.

Corollarium.

§. 719. Sunt omnibus his curvis, quarum æquationes ſubſunt generali huic

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c. + \vartheta x^n$$

proprietates quædam communes, & inter illas potiſſimæ

1°. Quæcunque ſumatur x, & ſive affirmativa ſumatur ſive negativa, ſemper datur aliqua ad eam pertinens y, ſed vna tantum, quæ modo affirmativa eſt, modo negativa. Vnde quælibet talis linea, ſecundum aſſumptam MN, vtrinque ſimplici ductu, & nuspiam interrupto vel redeunte, in infinitum excurrit.

2°. Si x fiat infinita, reliquis præ ϑx^n evaneſcentibus, fit $y = \vartheta x^n$. Ergo ad infinitam x ſemper & y infinita eſt. Si n numerus par ſit, & ϑ affirmativa, affirmativa eſt cum illa y, quæ pertinet ad x quantumvis ingentem affirmativam, tum illa, quæ x tali, ſed negativæ, reſpondet; & ſi ϑ negativa ſit, vtraque harum y eſt negativa. Si vero n impar fuerit, quæ ad affirmativam x pertinet, y affirmativa erit, negativa, quæ ad negativam, ſi ϑ affirmativa fuerit, vel inverſe, ſi fuerit negativa. Priori ergo caſu, quo n par eſt, rami lineæ in infinitum excurrentes ad eandem rectæ MN partem cadent, poſteriori, quo n eſt impar, ad diverſas.

3°. Si ad y datam quæratur x, tot generatim x reperiri poterunt, quot vnitates inſunt in n, quia idem numerus fit index ordinis æquationis, per quam dantur x iſtæ: & reperientur, niſi, per reliquum æquationis habitum, earum aliquæ, impoſſibiles evaſerint. Sit OV F.47. data illa vel aſſumpta y, cui reſpondent x iſtæ,

VA,

VA, VB, VC, VD. Si ergo PQR fuerit linea, per æquationem, quam tractamus, definita, ſecabitur in punctis A, B, C, D a recta ad MN parallela, poteruntque punctorum iſtorum tot eſſe, quot ſunt vnitates in n. Si ponatur $y = 0$, eodem modo concludetur, & rectam MN totidem locis a linea PQR ſecari poſſe.

4°. Generatim autem ſi numerus n impar fuerit, recta MN, vel ei parallela, ſemel minimum a linea PQR ſecabitur. Poteſt autem & ter ſecari, & quinquies, & ſepties, & generatim toties, quot vnitates habet quilibet impar, numero n non maior. Si vero n par fuerit, recta MN, vel quævis ei parallelarum, aut non ſecabitur a linea PQR, aut bis ſecabitur, aut quater, aut ſexies, & ita porro, vsque ad parem n.

5°. Creſcente ſenſim y, vel decreſcente, ſi AD, rectæ MN parallela, ab hac recedere ponatur, vel ad hanc accedere, mutantur puncta ſectionum, atque cuiuslibet a reliquis diſtantia, BC, CD, vel creſcit, vel decreſcit. Poteſtque OV ſive y ita augeri vel imminui, vt aliqua chordarum AB, BC vel CD evaneſcat, & in punctum convertatur; quod & pluribus chordis ſimul contingere poteſt. Punctorum horum quodlibet pro duplici erit, quia revera eiusdem chordæ, quæ verbi gratia ſit BC, & initium & finis eſt. Hoc ſi vſurpetur, numerus punctorum, A, B, C, D, curvæ & rectæ communium, nunc quoque aliquis ex iis erit, qui proxime poſiti ſunt. Dabitur autem punctum tale duplex per duas æquationis radices inter ſe æquales. Vlterius ſi augeatur y vel imminuatur, ſectiones, quæ ita in vnam coaluerunt, fiunt impoſſibiles.

6°. Recta linea, quæ definitur per æquationem $y = \alpha + \beta x$, flexum non habet. Quæ vero per æquationem ſecundi ordinis $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ definitur, cum bis tantum ſecare poſſit vel rectam MN, vel aliquam ei parallelarum, vnum habet flexum, non plures. Quæ per æquationem cubicam $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ definitur, duos admittit flexus, quæ per biquadraticam, tres, & ita porro: vt in æquatione generali numerus flexuum, quem curva admittit, ſit ſemper $n - 1$.

7°. Non autem, quot flexus curva per æquationem generalem definita admittit, totidem ſemper habet. Si prorſus non foret flexa, non curva ſed recta foret: verum præter vnum, reliquos flexus evaneſcere poſſe facile patet. Pone rurſus in æquatione, per quam definitur curva ſchematis, fieri $y = OV$, vt x fiant AV, VB, VC, VD, deinde in æquatione illa litte-

litteras α, β, γ, & reliquas huiusmodi, ita mutari pone, vt tres radices AB, AC, AD æquales fieri neceſſe ſit: qua quidem in re nulla difficultas eſt, quia radicibus initio pro arbitrio ſumptis, æquatio, quæ eas radices continet, componi poteſt. Deſcripta ergo curva ad æquationem hanc, puncta B, C, D quæ iam diverſa ſunt, in recta AB, per V ad MN parallela, in vnum coibunt, atque flexus inter BC, CD, per quos apud hunc locum curva rectam AB ter ſecuerat, evaneſcent. Eodem modo & plura tribus harum linearum puncta in vnum coire, atque plures flexus evaneſcere poſſunt.

8. Si in æquatione vniverſali ponatur $x = 0$, fit $y = \alpha$, tranſitque adeo linea quævis hac lege conſtructa per punctum rectæ OA datum, cuius ſcilicet ab O diſtantia eſt $= \alpha$. Si fiat $x = m$, æquatio mutatur in hanc F.72.

$$y = \alpha + m\beta + mm\gamma + m^3\delta + \&c,$$

vnde, ſi in memoriam revocentur lineæ, quibus litteræ iſtæ in conſtructionibus expreſſæ ſunt, facile colligitur, etiam quamlibet harum linearum tranſire debere per punctum figurarum *a*.

Scholion.

§. 720. Qui regula vti voluerit ita ad regulam aliam aptata, vt illius acies facile collocari

cari poſſit in ſitum, rectæ MN, vel aliæ cuilibet in plano deſcriptæ, parallelum, punctum quoduis V, per quod curva huiusmodi tranſibit, facile reperiet, rectis $AaRbScTdE$ etiam non deſcriptis, quæ ſi deſcribantur, vbi plura puncta quæruntur, confuſio evitari vix poteſt. Acie regulæ in Aa collocata, defigetur apex aciculæ in a, ac retinebitur manu. Deinde regulæ eiusdem acies transferetur in ſitum Ra, quo ſcilicet tranſit per punctum B, acum in a defixam contingens. Iam acus transfertur in R, regula immota. Inde regula collocabitur in ſitum Rb, ad MN parallela, quo continget acum R, acus autem transferetur in b. Iterum regula in Cb locata, acus ſtatuetur in S, & ita porro, donec, alterne regulam locando ac ſtatuendo acum, ad punctum V perveniatur. Sed recta Ba, a qua ſemper incipiendum eſt, quodcunque ſumatur Q, duci poteſt, & vtrinque produci. Ordo litterarum, punctis lineæ per O ductæ adſcribendarum, multum ad expeditum laborem conferet.

Dicentur autem omnes lineæ, quæ generali æquatione $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \&c.$ exprimuntur, eſſe generis *Parabolici.*

PROBLEMA LXXXIII.

§. 721. *Cuiuscunque æquationis radices poſſibiles omnes per lineas rectas exhibere.*

SOLV-

SOLVTIO.

§. 722. Sit data æquatio hæc F. 75.

$$x^3 - \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$$

ſi ergo γ, β, α lineas rectas notaverint, ſumta OP atque vnitate pro arbitrio, dic $OP = m$, $OD = \alpha$, $DC = m\beta$, $CB = -m^2\gamma$, & $BA = m^3$; vel ſi commoditas deſcriptionis permiſerit, vt ponatur $m = 1$, fac $OD = \alpha$, $DC = \beta$, $CB = -\gamma$, & $BA = 1$. Si vero γ, β, α notaverint numeros, hos ex vnitate pro arbitrio ſumpta exprime per lineas, atque has deinde tracta eodem modo. Ad puncta ita reperta deſcribe §. 705, lineam generis parabolici, RSTa, quæ æquatione

$$y = \alpha + \beta x - \gamma x^2 + x^3$$

definietur. Si ergo hæc linea datam MN ſecuerit in R, S, T, erunt OS, OT, quæ ad dextram puncti O partem cadunt, radices æquationis affirmativæ; eæ vero quæ cadunt ad ſiniſtram, vt OR, negativæ. Quæ quidem radices, ſi opus ſit, ex vnitate initio aſſumpta, per numeros facile exprimentur.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ad puncta R, S, T, $y = 0$, ergo, ſive ponatur $x = OS$, ſive $x = OT$, ſive $x = -OR$, fit

$$x^3 - \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0,$$

quare OS, OT & — OR æquationis huius radices erunt § 493.

Scholion.

§. 723. Si aliquod punctorum, curvæ cum recta MN communium, duplex fuerit, triplex, vel vtcunque multiplex; duæ aut tres, vel generatim tot radices a puncto O inchoandæ, apud punctum illud terminabuntur, quotuplex eſt punctum. Cæterum in hac æquationum conſtructione ea commoditas eſt, quod partes tantum curvæ, rectæ MN propinquas, probe elaborare opus ſit, quia reliquus ductus ad radicum inventionem nihil confert. Limites autem radicum ſi ante inventi ſint §. 528, neque curva nimium producetur.

Corollarium.

§. 724. Cum ergo per iſta omnium æquationum radices in poteſtate ſint, quæcunque curva, per aliquam æquationum expreſſa, quæ ſubſunt generali huic

$$0 = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \&c,$$

per puncta deſcribetur, ſi litteræ A, B, C, D vel lineas rectas conſtantes notaverint, vel variabiles, ex conſtantibus & variabili x quocunque eorum modorum productas, qui exprimi poſſunt per ſigna Algebræ. Si enim x aſſumatur tanquam data, omnes lineæ, quas hæ litteræ

A, B, C, D, denotant, datæ erunt, pro quibus ſi ſcribantur α, β, γ, δ &c, erunt y radices æquationis

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \&c,$$

quæ ſi quærantur, applicenturque ad aſſumptam x ſub angulo dato, earum termini erunt F. 76. puncta curvæ deſcribendæ. Vt ſi ad OA $= x$ reperti ſint valores litteræ y tres iſti, AB, AC & — AD, curva per puncta B, C & D tranſibit.

Scholion.

§. 725. Quod autem hic dicitur, A, B, C & reliquas eius generis, per x & conſtantes vtcunque dari poſſe, ita intelligendum eſt, vt, exempli gratia, ſit $A = x^3 + b^2x - a^3$, $B = x^2 + b^2$, $C = x - a$, & ita porro: quod ſi fuerit, ſumpto $x = a$, erit $\alpha = b^2a$; $\beta = a^2 + b^2$, $\gamma = 0$. His ergo valoribus vſurpatis, ſi quærantur radices æquationis $0 = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \&c$, eæ erunt y ad $x = a$, in curva deſcribenda. Eodem modo reperientur y ad $x = 2a$, $x = 3a$, $x = \frac{1}{2}a$, $x = b$, $x = nb$, atque per omnia puncta ita reperta tandem curva deſcribetur. Longus enim labor eſt; ſed qui raro occurrit: plerumque etiam res aliter expediri poteſt.

PROBLEMA LXXXIIII.

§. 726. *Lineam deſcribere per æquationem expreſſam, quæ ex duabus pluribusve æquationibus rationalibus multiplicando conflata eſt.*

Solv-

SOLVTIO.

§. 727. Sit æquatio data

$$y^2 - ay + bxy - x^2y + ax^2 - bx^3 = 0$$

quæ multiplicando conflata eſt ex duabus iſtis $0 = y - a + bx$

& $0 = y - xx$,

F.77. quarum vtraque rationalis eſt. Conſtruatur ad eandem MN, linea RS, quæ exhibetur per æquationem $y = a - bx$, & TOV, quam definit æquatio $y = xx$, ita quidem, vt ad vtramque x inchoentur ab eodem puncto O, idemque ſumatur angulus AON. Erit harum linearum complexus RSTOV id, quod per æquationem initio poſitam exprimitur: vt, ſi OQ dicatur $+x$ vel $-x$, prout ad hanc vel illam puncti O partem cadit, & QB atque QC ſint ad eam x pertinentes y, futurum ſit $y^2 - ay + bxy - x^2y + ax^2 - bx^3 = 0$.

DEMONSTRATIO.

Si enim in hac æquatione x dari ponatur, & quæri y, ſunt eius radices eædem, cum valoribus litteræ x, in æquationibus, quarum multiplicatione conflata eſt §. 496. Cum ergo in illarum æquationum prima, ad $x = OQ$, reperiatur $y = QB$, & in altera ad eandem x, ſit $y = QC$; vtique, in æquatione multiplicando compoſita, ad eam x & QB & QC pertinebit,

tinebit, tanquam valor litteræ y. Si plures fuerint æquationes rationales, idem eodem modo demonſtrabitur.

Scholion.

§. 728. Vnitis ergo per multiplicationem æquationibus, quibus lineæ diverſæ definiuntur, ſemper produci poteſt æquatio, earum linearum complexum exprimens. Vnde pro vna ea demum linea habenda erit, cuius æquatio in alias æquationes rationales dividendo ſolvi non poteſt, etſi ipſa quoque ex partibus conſtare poſſit, a ſe mutuo plane ſeiunctis, cuius exempla vidimus. Etſi enim, ſi irrationales æquationes non excludantur, quælibet æquatio ſolvi poſſit in ſimplices, quarum quævis ad aliam atque aliam curvæ partem pertinet: tamen, quia vna harum æquationum ſimplicium reperiri non poteſt, quin ſimul & reliquæ reperiantur, atque omnes ab eadem conſtructione pendent, qua linea producitur: ſatis ea re diverſæ lineæ partes coniunguntur. Id vero multo aliter ſe habet, vbi linea per æquationem exprimitur, quæ factores rationales admittit. Sic noſtra æquatio, poſtquam in duas ſoluta eſt, nihil impedit, quominus eæ y, quæ in recta RS terminantur, reperiantur ſolæ, nulla habita ratione illarum, quas terminat curva TOV. Verum circuli circa centrum O F.78. deſcri-

deſcripti radius ſi dicatur r, OQ autem x & QB, y, atque æquatio $yy = rr - xx$, circulum eum definiens, ſolvatur in duas ſimplices has $y = + \surd(rr - xx)$ & $y = - \surd(rr - xx)$, harum prior vtique ad partem peripheriæ DAE ſolam pertinebit, quia ad eam ſolam BQ ſupra diametrum DE cadit, atque y poſitiva eſt; altera vero partem reliquam ECD exprimet, ad quam y ſunt negativæ. Neque tamen propterea peripheria ex duabus partibus conſtat, quarum vna vere ſeparata ſit ab altera, cum præter deſcriptionem circuli, quæ partem ECD ſimul producit cum altera DAE, etiam per æquationem partes hæ connectantur. Non poteſt enim reperiri $y = + \surd(rr - xx)$ quin ſimul $y = - \surd(rr - xx)$ ſeſe offerat. Neque dimidium peripheriæ DAE, vel quælibet eius pars, per æquationem rationalem definiri poteſt, quin ſimul per eandem æquationem definiatur pars peripheriæ reliqua. Sive enim ex $y = + \surd(rr - xx)$ ſignum radicis tollere velis, ſive ex $y = - \surd(rr - xx)$, vtrinque prodit $yy = rr - xx$.

PROBLEMA LXXXIIII.

§. 729. *Duabus lineis algebraicis ad eandem baſin, eandem abſciſſarum originem, atque eundem angulum ordinatarum, deſcriptis, quarum altera alteram in vno pluribusve punctis ſecet;*

ſecet; invenire abſciſſas, quæ ad puncta illa ſectionum pertinent, ex æquationibus, quibus curvæ definiuntur.

PRÆPARATIO.

§. 730. Ad baſin AB, atque initium abſciſſarum O, ſit ita deſcripta Parabola CDE, vt ſit $y = -bx + xx$, ſumpto angulo abſciſſarum recto. Ad eandem baſin atque idem abſciſſarum initium O & circulus deſcriptus ſit CFD, in quo, r denotante radium, & v applicatam, ſit $rr = xx + vv$, quod erit, ſi O fuerit centrum circuli. Cum ergo ad puncta C, in quibus peripheria circuli parabolam ſecat, eædem CG ſint & y & v, atque adeo $y = v$; hac æqualitate ſuppoſita, atque per eam litteris y & v ex æquationibus eliminatis, vtique neceſſe eſt prodire OG ſive x, ad puncta ſectionum quæſita C. F. 79.

SOLVTIO.

§. 731. In caſu propoſito eſt $y = -bx + xx$, & $vv = rr - xx$, ergo ad puncta ſectionum, in quibus $v = y$, fit $\sqrt{(rr - xx)} = -bx + xx$, & $rr - xx = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4$. Huius ergo æquationis biquadraticæ, quæ ordinata formam induit

$$\begin{array}{l} x^4 - 2bx^3 + bbx^2 - rr = 0 \\ + x^2 \end{array}$$

radices ſunt abſciſſæ ad puncta ſectionis, quarum ergo quatuor eſſe poſſunt, vel duæ; nam aliquas ſemper eſſe ex figura apparet.

Scholion.

§. 732. Generatim ſcilicet, ſi aliquæ radices æquationis ita repertæ imaginariæ fuerint, & ſectiones illi x reſpondentes imaginariæ erunt. Verum neque omni x, quæ ita elicitur, reali, ſectio quoque realis reſpondet, propterea, quod cum y ponitur $= v$, omnes reperiri x debent, ad quas $y = v$, etiamſi y iſtæ atque v ſint imaginariæ. Nam & apud imaginaria æqualitas locum habet, vt ſi quis ponat $x\sqrt{-1} = x\sqrt{-1}$. Non ergo ex numero abſciſſarum realium, quæ ita reperiuntur, ad numerum ſectionum concludi generatim poteſt, niſi conſtet, nulli illarum x reſpondere imaginariam y vel v. Sufficit enim id de vna conſtare, quia, ob $y = v$, ſi vna harum applicatarum realis ſit, altera imaginaria eſſe non poteſt.

§. 733. Deſcripta autem figura, cum puncta ſectionis appareant, poſſunt radices æquationis propoſitæ reales hac quoque methodo geometrice exhiberi. In caſu figuræ 79 radices æquationis biquadraticæ, quam elicuimus, $x^4 - 2bx^3 + (bb+1)x^2 - rr = 0$, duæ ſunt OG, vna affirmativa, altera negativa.

PRO-

PROBLEMA LXXXV.

§. 734. *Datis duabus æquationibus, in quarum qualibet eædem inſunt duæ incognitæ, alterutram harum incognitarum per interſectionem curvarum invenire.*

Solvtio.

§. 735. Sint inter duas rectas datas a, b F. 80. interponendæ duæ x & y in proportione continua, vt ſcilicet ſit $a : x = x : y$, & $x : y = y : b$. Erit $xx = ay$, & $bx = yy$. Dantur ergo duæ æquationes easdem continentes incognitas x & y, quarum alterutra reperienda eſt: quod per interſectionem curvarum perficietur hoc modo. Ad baſin AB, initium abſciſſarum A, angulum coordinatarum quemcunque CAB conſtruatur curva ADE, ad quam $ay = xx$ vel $y = \frac{xx}{a}$, quod fiet, ſi in formula pro lineis generis parabolici $y = \alpha + \beta x + \gamma xx$, ponatur $\alpha = 0$, $\beta = 0$ & $\gamma = \frac{1}{a}$, ac reliqua fiant methodo §. 705. tradita. Deinde ad eandem baſin AB, idemque abſciſſarum initium, curvam ADF conſtrue, ad quam $bx = yy$, quod fieri poteſt iuxta eandem formulam, ſi AC ſumatur pro baſi, atque x huius æquationis ponatur eſſe formulæ y, & y æquationis formulæ x, quo facto elicietur

$\alpha = 0$, $\beta = 0$ & $\gamma = \frac{1}{b}$. Parabolæ ita deſcriptæ ſi ſeſe ſecuerint apud D, ducta DG ad AC parallela, erit per ea, quæ §. 733. oſtenſa ſunt, AG quæſita x.

Scholion.

§. 736. In hac methodo id commodi ineſt, quod æquationum vnionem non exigat. Transformari autem ita poſſunt æquationes, vt alias atque alias lineas definiant, quarum interſectiones problema æque ſolvant. Vt in præſenti caſu, ſi y per priorem æquationem $xx = ay$ determinata, inferatur in alteram $bx = yy$, vt fiat $bx = \frac{xxy}{a}$, vel $ab = xy$, deſcriptis curvis, quarum vna per hanc æquationem $ab = xy$, altera vero per aliquam priorum, vt $xx = ay$, definitur, quæſita x non minus determinabitur. Poterat & æquationes propoſitas addendo, vel vnam ab altera ſubducendo, nova produci, e quo genere ſunt hæ $xx + bx = ay + yy$, vel $xx - bx = ay - yy$, vel $xx - ab = ay - xy$, & plurimæ aliæ. Nam & æquationes ita productæ denuo, & cum datis & cum aliis æquationibus productis, vniri poſſunt. Cum enim ex duabus quibuslibet æquationum ita transformatarum, eliminato quæſitorum alterutro y, alterum x reperiri nihilominus poſſit, quam

ex

ex iis, quæ initio datæ fuere, modo tales ſumantur, quæ coniunctim omnes problematis conditiones continent: conſtructis curvis, quæ per eas æquationes exhibentur, atque ipſæ viciſſim æquationes exhibent, idem præſtari vtique neceſſe eſt; niſi forte tales arripiantur, quibus quæ communes ſunt y, vel omnes vel aliquæ, ſunt imaginariæ. Hoc enim caſu, quia interſectio apparere non poteſt, quæ nulla eſt, neque abſciſſæ adplicatis illis reſpondentes ex figura poterunt cognoſci. Quare etiam tutiſſimum eſt, quandoquidem id, quod quæritur, hic ſemper eſt abſciſſa, vnam curvarum ſumi ex eo genere, cuius applicatarum nulla fit imaginaria, quæcunque ſumatur abſciſſa; quales eæ ſunt, quæ ad genus parabolicum pertinent, & quædam aliæ §. 719. Et quid opus eſt per ambages tentare, quod ſimplicius præſtari poteſt? niſi forte transformando æquationes curvas venemur, quæ facilius conſtrui poſſunt iis, quæ ſeſe primum offerebant. Manifeſtum enim eſt has illis, quarum conſtructio difficilior eſt, in hoc opere præferendas eſſe.

§. 737. Etſi vero æquationes initio datæ vltra ordinem quadraticum non aſcenderint: eſt tamen AG reperta radix poſſibilis æquationis cubicæ. Si enim ex æquationibus illis eliminetur y, fit $x^4 = a^2bx$, vel $x^3 = a^2b$, in qua poſſibilis x eſt AG. Altera curvarum ſectio apud A, ex qua habetur $x = 0$, ad biquadraticam æquationem $x^4 = a^2bx$ pertinet, cuius radicum vna vtique nihilum eſt. Sed hæc radix, per reductionem æquationis in cubicam, eſt ſepoſita.

PROBLEMA LXXXVI.

§. 738. *Æquationum cubicarum & biquadraticarum radices per interſectionem curvarum exhibere, quæ ſupra linearum ordinem ſecundum non aſcendunt.*

SOLVTIO.

I.

§. 739. Sit æquatio cubica vniverſalis hæc

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

fac $x^2 = y$, vt fiat $x^3 = xy$, & infer valorem iſtum in æquationem datam:

Erit $xy + px^2 + qx + r = 0$

vel $xy + py + qx + r = 0$ Vnde, conſtructis ad eandem baſin, eandem abſciſſarum originem, atque eundem angulum ordinatarum duabus curvis, quarum vna definitur per $x^2 = y$, altera per aliquam æquationum hac ſubſtitutione productarum, erunt abſciſſæ ad puncta ſectionum, radices æquationis datæ.

Vel fac $x^2+px=y$, vt fiat $x^3+px^2=xy$, & infer valorem iſtum in æquationem datam, vt ex ea fiat $xy+qx+r=0$. Deinde conſtrue eodem modo curvas, quarum vna per æquationem aſſumptam $x^2+px=y$ definitur, altera per productam $xy+qx+r=0$, vt prius. Erit idem effectus. Sectiones autem ſemper reales erunt, quia curva aſſumpta eſt generis parabolici. §. 736.

II.

§. 740. Sit æquatio biquadratica vniverſalis iſta

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

ſeparatis ergo prioribus duobus terminis x^4+px^3, comple quadratum, addendo $\frac{1}{4}p^2x^2$. Hoc quadratum $x^4+px^3+\frac{1}{4}p^2x^2$ pone $=y^2$, vt fiat $x^2+\frac{1}{2}px=y$. Ex quadrato infer valorem terminorum x^4+px^3, qui eſt $y^2-\frac{1}{4}p^2x^2$, in æquationem datam, vt fiat $y^2-\frac{1}{4}p^2x^2+qx^2+rx+s=0$. Et ſi lubet, in hanc æquationem denuo valorem quadrati x^2, qui, ex æquatione $x^2+\frac{1}{2}px=y$, eſt $y-\frac{1}{2}px$, infer, quo producatur $y^2-\frac{1}{4}p^2y+\frac{1}{8}p^3x+qy-\frac{1}{2}pqx+rx+s=0$. Conſtrue vt prius duas curvas, quarum vna per æquationem aſſumptam, altera per alterutram ita elicitarum, exprimitur. Erit idem effectus; curvarum

varum autem interſectiones, ob eandem rationem, imaginariæ non erunt.

DEMONSTRATIO.

Si enim curvarum, quas definiunt æquationes

$$y = \tfrac{1}{2}px + x^2$$

$$\& \; y^2 - \tfrac{1}{4}p^2y + \tfrac{1}{8}p^3x + qy - \tfrac{1}{2}pqx + rx + s = 0$$

ad eandem baſin eandemque abſciſſarum originem deſcriptarum, quæruntur abſciſſæ ad puncta ſectionum, ſubſtituta y ex priori æquatione in altera, fiunt abſciſſæ illæ radices æquationis productæ §. 734. Neceſſe autem eſt per eam ſubſtitutionem reſtitui æquationem ab initio poſitam

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

cuius adeo radices per abſciſſas illas exhibebuntur. De reliquis res patet eodem argumento.

Scholion.

§. 741. Perſpicitur autem facile ex dictis §. 736. rem & aliter perfici poſſe multis modis. Poſſunt etiam æquationes biquadraticis ſuperiores eadem hac ratione conſtrui, verum lineis in eam rem opus eſt tertii aut quarti generis, aut his quoque altioribus, prout ſcilicet ipſa æquatio minus vel magis alta eſt. Aſt quia, cum æquationes modo oſtenſo elicimus,

ſæpe

ſæpe in curvas incidimus, quarum difficilis eſt conſtructio, certe plerumque inveſtigandum non absque aliquo labore eſt, quæ ſit linea, quæ per æquationem productam definitur: quo ſcilicet pateſiat, an non ſit aliqua ex illarum numero, quarum facilis delineatio in poteſtate noſtra eſt: præſtat fere, ſi omnino radices æquationis propoſitæ per interſectionem curvarum quærere lubitum ſit, curvas eligere, quibus vti velimus, atque his ſolis regulas aptare, modo mox oſtendendo, vel alio eiusmodi. Nam & in his magna varietas locum habet, ſi aliis atque aliis lineis vti velimus; niſi quod in rebus, quarum tota pulchritudo in facilitate executionis conſiſtit, a ſimpliciſſimo quam minime ſit recedendum.

PROBLEMA LXXXVII.

§. 742. *Æquationum cubicarum & biquadraticarum radices per interſectionem circuli & parabolæ reperire.*

SOLVTIO.

§. 743. Æquatio pro parabola illa, ad quam conſtructio curvarum generis parabolici applicari immediate potuit §. 710, ſi γ ponatur $= 1$, & $\alpha = 0$, hæc fit, $y = \beta x + x^2$, quæ parabola DEF ad baſin MN, originem abſciſſarum O, & angulum coordinatarum F. 81.

rectum conſtructa eſſe ponitur. Si iam in OA ponatur quæcunque OG, quæ dicatur ν, vel $-\nu$, ſi verſus inferiora protenſa fuerit, a puncto vero G in GH, parallelam ad MN, locetur GK $= \mu$, quæ eadem dicatur $-\mu$, ſi ceciderit ad partem M, ab eodem puncto G; deinde centro K, intervallo quocunque KF $= \varrho$, deſcribatur peripheria circuli, parabolam ſecans in F: cum ſit FI $= y$, ad OI $= x$, ſi hæ lineæ referantur ad parabolam, quia $y = \beta x + xx$, erit FH $= y -$ HI $= x^2 + \beta x - \nu$, & KH $=$ LI $=$ GH $-$ GK $= x - \mu$. Quare ex KFq $=$ FHq $-$ KHq fiet,

$$\begin{array}{l} \varrho\varrho = x^4 + 2\beta x^3 + \beta^2 x^2 - 2\nu x^2 - 2\beta\nu x + \nu\nu \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \; x^2 - 2\mu x + \mu\mu \end{array}$$

vel æquatione ordinata,

$$\begin{array}{llll} x^4 + 2\beta x^3 + \beta^2 x^2 & - 2\beta\nu x & + \nu\nu & = 0 \\ \qquad\qquad\; - 2\nu x^2 & - 2\mu x & + \mu\mu & \\ \qquad\qquad\; + \; x^2 & & - \varrho\varrho & \end{array}$$

§. 744. Sumpta iam æquatione biquadratica quacunque, quæ ſubeſt vniverſali huic

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

erunt OI, per hanc conſtructionem reperiundæ, radices eius æquationis, ſi fuerit

$$\begin{array}{ll} 2\beta = p & -2\beta\nu - 2\mu = r \\ \beta^2 - 2\nu + 1 = q & \nu\nu + \mu\mu - \varrho\varrho = s, \end{array}$$

quia his ſumtis, æquatio illa coincidit cum ea, quæ per figuram exhibetur. Poſſunt autem

quatuor

quatuor lineæ per litteras β, ν, μ, ϱ deſignatæ, ſemper eius magnitudinis ſumi, quam hæ æqualitates requirunt, cum per quamlibet earum determinetur magnitudo vnius lineæ. Nam ex $2\beta = p$, elicitur $\beta = \frac{1}{2}p$

ex $\beta^2 - 2\nu + 1 = q$, elicitur $\nu = \frac{\beta^2 + 1 - q}{2}$

$$\text{vel } \nu = \frac{\frac{1}{4}p^2 + 1 - q}{2}$$

ex $-2\beta\nu - 2\mu = r$, fit $\mu = -\frac{2\beta\nu + r}{2}$

$$\text{vel } \mu = -\frac{\frac{1}{4}p^3 + p - pq + 2r}{4}$$

denique ex $\nu\nu + \mu\mu - \varrho\varrho = s$ obtinetur $\varrho\varrho = \nu\nu + \mu\mu - s$, & hinc $\varrho = \sqrt{(\nu\nu + \mu\mu - s)}$.

Sunt vero omnes hæ æquationes, præter vltimam, ſimplices, vnde β, ν, μ impoſſibiles nunquam erunt. Quod autem ad ϱ attinet, id impoſſibile non aliter evadere poteſt, quam ſi s in æquatione affirmativum fuerit, idemque maius quam $\nu\nu + \mu\mu$. Sed cum ν non modo per p & q, verum etiam per vnitatem determinetur, quæ pro arbitrio ſumi poteſt; ſemper $\nu\nu$ maius reddi poterit quam s, quo facto & ϱ ſemper poſſibile erit. Sique radices æquationis, quæ per conſtructionem hanc quæruntur, omnes impoſſibiles fuerint,

fuerint, id eo vbique indicabitur, quod circulus parabolam non ſecat.

§. 745. Æquatio cubica vniverſalis,

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

in biquadraticam convertitur, ſi omnes eius termini multiplicentur per x. Æquatio autem ita producta

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx = 0$$

ſi comparetur cum ea, quam figura exhibet, iidem deteguntur litterarum β, ν, μ valores, præterquam quod $s = 0$, reddat $\varrho = \sqrt{(\nu\nu + \mu\mu)}$, quod indicio eſt peripheriam circuli circa centrum K deſcripti iam per O tranſire. Eo ipſo radix æquationis biquadraticæ $x^4 + px^3 + qx^2 + rx = 0$ nihilo æqualis proditur, quæ in eam multiplicatione per x, vel proprie per $x - 0 = 0$, illata eſt, in cubica autem non inſuit.

Scholion.

§. 746. Non multo aliter regula condi poteſt, æquationes quinti & ſexti ordinis, per interſectionem lineæ e genere parabolico cubicæ atque circuli, conſtruendi. Poſſunt & his ſuperiores æquationes eadem ratione ſolvi, adhibitis curvis altioris ordinis. Sed parvi admodum, ſi vllius, hæ conſtructiones vſus ſunt. Quare ſuffecerit eas, quæ traditæ ſunt, aliquibus exemplis illuſtraſſe.

PROBLEMA LXXXVIII.

§. 747. *Cubum reperire, qui ſit ad datum in ratione data.*

SOLVTIO.

§. 748. Si cubi dati latus ſit a, quæſiti x, ratio data $n : 1$, erit $n : 1 = x^3 : a^3$, hinc

$$x^3 = na^3, \text{ vel } 0 = -na^3 + x^3.$$

Si ergo hæc æquatio per interſectionem lineæ e genere parabolico, & rectæ ſolvenda ſit, comparata illa cum vniverſali harum linearum æquatione §. 705, quæ eſt

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.$$

apparet eſſe $\alpha = -na^3$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$. Sumetur hic commode $OP = m$ F. 82. $= a = 1$, quo fit $\alpha = -n$, ad quæ ſi conſtruatur curva, ſumpta ſcilicet $OD = n$, $DC = 0$, $CB = 0$, & $BA = OP = 1$, erit OQ quæſitum latus x.

§. 749. Si eadem æquatio ſolvenda ſit per interſectionem circuli & parabolæ, convertetur in biquadraticam hanc, $x^4 - na^3x = 0$, qua cum vniverſali §. 744. comparata, colligetur $p = 0$, $q = 0$, $r = -na^3$, $s = 0$. Hinc autem lineæ, quibus ad hanc conſtructionem opus eſt, reſultant iſtæ: $\beta = 0$; $\nu = \frac{1}{2}$; $\mu = \frac{1}{2}na^3$; $\varrho\varrho = \nu\nu + \mu\mu$. Si ergo nunc quoque ponatur linea, quæ §. 707 denotata fuit

per

per *m*, æqualis datæ *a*, dicaturque 1, conſtructa parabola ad $1 = a = OP$, ſumptaque $OG = \nu = \frac{1}{2}$, id eſt $= \frac{1}{2}OP$, & $GK = \mu = \frac{1}{2}n$, erit K centrum circuli, cuius peripheriam per O tranſire neceſſe eſt, quia $\varrho\varrho = \nu\nu + \mu\mu$. Cum ergo peripheria hæc parabolam apud F ſecet, ducta FQ lateri OG parallela, erit OQ radix quæſita.

PROBLEMA LXXXVIIII.

§. 750. *Datam lineam rectam in duas partes dividere, quarum vna ſit ad lineam diviſam, vt cubus partis alterius, ad cubum prioris illius.*

SOLVTIO.

F.84. §. 751. Sit ita dividenda recta OP puncto Q. Dicatur $OP = 1$ & $OQ = x$, vt ſit $QP = 1 - x$. Oportet eſſe $1 : x = x^3 : (1 - x)^3$. Hoc autem ſumpto, erit $x^4 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$, ſive $x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Hæc æquatio ſi ſolvenda ſit per interſectionem rectæ & curvæ generis parabolici, erit, ſi comparetur cum æquatione ad has curvas vniverſali,

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

$$\alpha = -1;\ \beta = 3;\ \gamma = -3;\ \delta = 1,\ \varepsilon = 1.$$

Si ergo in rectam per O ductam, a puncto O, ponatur $OE = -1$, hinc vero protenſa in-

telliga-

telligatur ED $= 3$, & ab huius termino D poſita DC $= -3$, hinc CB $= 1$, & porro BA $= 1$, deſcribaturque ad puncta hoc modo reperta linea generis parabolici Ca, ſecabitur recta OP in puncto quæſito Q.

§. 752. Eadem æquatio ſi ſolvenda ſit per interſectionem circuli & parabolæ, erit in æquatione §. 744 vniverſali; $p = 1$; $q = -3$; $r = 3$; $s = -1$. Hinc $\beta = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$;

$$\nu = \frac{\frac{1}{4}pp + 1 - q}{2} = \frac{7}{8};$$

$$\mu = -\frac{\frac{1}{4}p^3 + p - pq + 2r}{4} = -\frac{41}{16};$$

$$\varrho\varrho = \sqrt{(\nu\nu + \mu\mu - s)} = \sqrt{(\nu\nu + \mu\mu + 1)}.$$

Scholion.

§. 753. Curvam generis parabolici Ca, ſi producatur, rectam OP productam denuo ſecare neceſſe eſt; §. 719, 4°. Facile autem perſpicitur, eam ſectionem non fore inter puncta O & P, quare nec per eam dividetur OP, quod problema imperat. Conſtructionem autem per circulum atque parabolam tabulæ ſpatium non capit.

§. 754. Cæterum per partem curvæ generis parabolici, ſecundum easdem leges deſcriptam, generaliter omnia problemata ſolventur, quæ rectam datam OP ita ſecare iubent apud

apud Q, vt ſit OP : OQ $=$ OQ^n : QP^n, vel quod iſto quoque latius patet; OP^m : OQ^m $=$ OQ^n : QP^n, notantibus n, m quoscunque numeros integros. Sit $n = 2$ & $m = 3$. Si ergo recta OP & eius partes ſignentur vt in problemate, erit $1 : x^2 = x^3 : (1 - x)^3$ hinc $x^5 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$,

$$x^5 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Hæc æquatio, comparata cum æquatione vniverſali pro linea generis parabolici quinti ordinis

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5$$

dat, $\alpha = -1$; $\beta = 3$; $\gamma = -3$; $\delta = 1$; $\varepsilon = 0$; $\zeta = 1$,

per quæ facile reperiuntur puncta, quibus curva determinatur ſecundum ea, quæ generatim præcepta ſunt §. 705.

PROBLEMA XC.

§. 755. *Quemcunque angulum datum in quinque partes æquales dividere.*

SOLVTIO.

§. 756. Si coſinus anguli dati ſit c, radius r, & coſinus quintæ partis illius anguli dicatur x, eſt §. 435, $a = 16x^5 - 20r^2x^3 + 5r^4x) : (r^4$

vel $16x^5 - 20r^2x^3 + 5r^4x - r^4a = 0$

Hæc

Hæc æquatio, ſi comparetur cum vniverſali ad lineam parabolicam quinti ordinis §. 705, prodit $\alpha = - r^4 a$; $\beta = 5r^4$; $\gamma = 0$; $\delta = - 20r^2$; $\varepsilon = 0$, $\zeta = 16$. Iam quia, ſi ponatur $m = 1$, lineæ nimis longæ oriuntur, pone $m = \frac{1}{2}r$. Cum ergo, ad conſtructionem huius curvæ, ſumenda ſit

$$OF = \alpha;\ FE = m\beta;$$
$$ED = m^2\gamma;\ DC = m^3\delta;$$
$$CB = m^4\varepsilon;\ BA = m^5\zeta,$$

ſi pro r ſcribatur 1, erit $OF = -a$; $FE = \frac{5}{2}$; $ED = 0$; $DC = -\frac{5}{2}$, $CB = 0$; $BA = \frac{1}{2}$; per quæ, ſecundum methodum §. 705. expoſitam, curva non difficillime deſcribetur, quæ baſin in quinque locis ſecabit, eoque coſinus quinque exhibebit, quos quæſtio generaliter propoſita poſtulat. Per interſectionem circuli & parabolæ hæc æquatio conſtrui nequit, quia quinti eſt ordinis.

Scholion.

§. 757. Atque hac ratione quodlibet problema ad æquationem reductum, cuius litteræ omnes per lineas rectas explicari poſſunt, geometrice ſolvetur. Cenſetur enim omnis *conſtructio geometrica*, quæ in plano fit per lineas, quarum quævis ſi exprimatur per æquationem, quæ continet variabiles x & y, ad quamvis x

reperiri poſſit ei reſpondens y, per conſtructiones, quæ tandem in poſtulata geometriæ elementaris reſolvantur. Neque intereſt quam complicata ſit æquatio, per quam curva ita definitur, niſi quod conſtructio ſimplicior magis impeditæ vbique præferenda ſit. Si vero ad conſtructionem problematis linea adhibeatur, ad quam, ad datam x vel aſſumptam, y geometrice reperiri non poſſit, *mechanica* cenſebitur *ſolutio*, diceturque *geometriam tranſcendere*, quantumvis accurate curva conſtrui poſſit, per quam problema ſolvitur, & per quascunque operationes. Poſſunt autem plurimæ lineæ mechanicæ, vt facilius, ita multo accuratius exhiberi, quam geometricæ; quod ſi ſit, & multo accuratiora prodire neceſſe eſt, quæ per illas quæruntur, quam quæ per has determinantur. Sed in geometria problematum connexio atque rigor demonſtrationum magis ſpectari ſolet, quam accurata effectio.

SECTIO XII.

DE CONSTRVCTIONE PROBLEMATVM TRANSSCENDENTALIVM.

PROBLEMA XCI.

§. 758.

Angulum planum rectilineum in quacunque ratione ſecare: & cuivis arcui circuli dati æqualem lineam rectam exhibere.

PRÆPARATIO.

F.85. §. 759. Ad rectam AB circa punctum C pone quotcunque angulos ACD, DCE, ECF &c. inter ſe æquales, vel, divide angulum duobus rectis æqualem ACB, in quemcunque numerum angulorum æqualium, continuo biſecando, vel alio quocunque modo. In rectam autem CF ad AB perpendicularem, a puncto C partes æquales pone cuiuscunque magnitudinis. Per quodvis punctorum ita ſignatorum, vt F, duc rectam FG ad AB parallelam. Numeratis ergo, cum parallelis his, tum illis rectis, quæ apud C concurrunt, ab AC ordine, per punctum, in quo prima parallelarum ſecat rectam DC, altera rectam EC, tertia FC & ita porro, pinge curvam; cuius puncta, quæ cadunt ad alteram partem rectæ AB reperientur ſimili modo. Erit HAI pars curvæ puncto C proxima, duobus ramis in infinitum excurrens inter rectas KL & MN, quarum quævis ab AB tot diſtat rectæ FC partibus, in quot angulos diviſi ſunt duo recti ACF + FCB.

§. 760. Qui nempe perrexerit, partes rectæ FC ponendo & extra rectam KL, atque ducendo parallelas ad AB; CD autem, CE, CF, & huius generis reliquas, produxerit, donec parallelas illas ordine ſecent; alias atque alias eiusdem curvæ partes per puncta ſectionum determinabit infinito numero, vtrinque in infinitum excurrentes: quæ etſi cum media HAI vnam lineam conſtituere cenſendæ ſint, atque eidem rei ſerviant, in quam hæc adhibebitur, hic tamen non conſiderabuntur. Et facile eſt, quæ de parte HAI dicentur, ad eas traducere. Dicetur autem curva hæc *Dinoſtrati quadratrix*: quam rectam CK apud P in partes æquales ſecare, & CN apud Q, ex conſtructione vltro apparet.

SOLVTIO.

F. 86. §. 761. Deſcripta ergo quadratrice HAI, ſi exhibendus ſit angulus, qui ſit ad rectum

vt

vt CR ad CP, ducta RS ad AB parallela, quæ quadratricem ſecet apud S, erit ACS angulus ille. Qui ſi porro ſecandus ſit in ratione CR : CT, ducta TV itidem parallela ad AB, quæ quadratricem ſecet in V, erit ACV angulus quæſitus, qui nempe eſt ad datum ACS, vt CT ad CR.

Si angulus ACS ipſe detur, non eius ratio ad rectum, eo ad quadratricem legitime conſtructo, reperietur punctum S, hinc R, atque CR; vnde reliqua perficientur vt prius.

Si vero circa centrum C per A deſcribatur circulus, erit eius arcus AX = TC, & AZ = RC. Hinc arctus ſectoris, cuius angulus apud centrum eſt ACV, radius *r*, æqualis quartæ proportionali ad AC, *r* & TC; & ſic arcus ſectoris, cuius angulus eſt ACS, æqualis tertiæ proportionali ad AC, *r* & RC.

Demonstratio.

Proportio ACV : ACP = CT : CP ex conſtructione ſequitur, quæ tot partes inferre iubet in rectam CP, in quot angulos dividitur rectus ACP, neque permittit, plures partium rectæ CP vel pauciores ineſſe in CT, quam ſunt partes anguli recti in ACV. Eodem modo oſtenditur eſſe ACP : ACS

= CP

= CP : CR; hac vero proportione cum priori collata, fit ACV : ACS = CT : CR, quod erat primum.

Hinc autem, ſi conferatur ACV : ACS = AX : AZ, porro ſequitur AX : AZ = CT : CR, vel AX : CT = AZ : CR. In qua proportione erit AZ = CR, ſi fuerit quicunque AX æqualis rectæ ſibi reſpondenti CT. Atqui, ſi angulus ACV continuo imminuatur, puncta V & X tandem apud A in vnum confunduntur, & arcus AX cadit in rectam, ad AC per punctum A normalem, quæ cum CT inter easdem parallelas AB, VT continetur. Ad hunc ergo caſum eſt vtique AV = CT. Ergo & generatim AZ = CR, vbicunque punctum Z in peripheria ſumatur.

Ex his reliqua facile fluunt, ſi ſuccurrat ſimilium ſectorum arcus eſſe, vt ſunt eorum radii. *Geom.* §. 171.

Corollarium I.

§. 762. Ergo CP quadranti peripheriæ circuli radio AC deſcripti, æqualis erit, CK dimidiæ peripheriæ, & MK peripheriæ integræ.

Corollarium II.

§. 763. Sector autem AXC æqualis erit triangulo, cuius baſis eſt CT, altitudo AC; eiusdem circuli, radio AC deſcripti, quadrans triangulo, cuius baſis eſt CP, altitudo eadem AC. Trianguli autem, eius circuli dimidio æqualis, baſis erit CK vel QP, ad eandem altitudinem. Et triangulum eidem circulo integro æquale, eiusdem altitudinis AC, baſin habebit KN. *Geom.* §. 206, 207.

Scholion.

§. 764. Deſcriptis & illis curvæ ramis, quas extra HAI vtrinque in infinitum excurrere obſervavimus, eadem facilitate rectæ reperiri poſſunt, arcubus, dimidia peripheria, vel eadem integra, vel eius duplo aut multiplo quocunque, maioribus æquales. Verum arcus eiusmodi & per partem quadratricis, quæ hic delineata eſt, in rectas converti facile poſſunt, quærendo exceſſum arcus rectificandi ſupra quadrantem, aut duos tres pluresve quadrantes. Sic recta æqualis quadranti & arcui AX eſt QT; recta ſemicirculo & eidem arcui AX æqualis, MT. Proprie pars quadratricis AP in omnem vſum ſufficit.

§. 765. Si CT quævis dicatur x, & ei reſpondens TV, y, erit $CV = \sqrt{(xx+yy)}$. AC, radius circuli, ſit $= 1$. Cum ergo ſit VC ad CT vt radius ad ſinum anguli CVT ſive VCA, erit hic ſinus $= \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Vnde, ſi arcus AX, qui ad hunc ſinum pertinet, compendio ita exprimatur: $\text{A. sin.} \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, quia AX $=$CT, erit

$$\text{A. sin.} \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = x.$$

Huiusmodi ſunt æquationes pro curvis transſcendentalibus, ab æquationibus curvarum geometricarum multum ſane diverſæ.

PROBLEMA XCII.

§. 766. *Invenire datæ rationis multiplicatam vel ſubmultiplicatam, vel multiplicatæ ſubmultiplicatam, ſecundum quemcunque indicem.*

PRÆPARATIO.

F. 87. §. 767. Sit data ratio M : N, ducta ergo recta infinita OP, ſume AB quamcunque, ordinatisque per hæc puncta A, B duabus rectis, perpendicularibus ad OP vel ei vtcunque obliquis, fac Aa : Bb = M : N, ſumpta Aa vel Bb pro arbitrio. Deinde ſume BC = AB, ordinataque per C nova recta, ſub angulo aſſumpto, fac & Bb : Cc = M : N, & ita perge, in OP partes æquales ponendo, ac erigendo ordinatas, quarum præcedens quævis ſit ad conſequentem in eadem ratione M : N. Vel inverſe, ſumpta primum CB, fac Cc : Bb = N : M, atque ad BA = CB, pari-

pariter fac $Bb : Aa = N : M$, & ita porro, quousque pergere libuerit.

Deinde, AB bifariam diviſa apud R, ad hoc punctum R ordina Rr, mediam proportionalem inter Aa & Bb, & ad punctum S, quo bifariam ſecatur BC, ordina Ss mediam proportionalem inter Bb & Cc, & ita porro, donec omnes partes in OP primum aſſumptas abſolveris.

Partes ita productas AR, RB & reliquas, tracta eodem modo, biſecando, atque ad puncta ſectionum ordinando medias proportionales, inter eas, quæ ordinatæ fuerunt per puncta partium extrema, ac ita perge, donec puncta obtinueris, quorum intervalla ſatis minuta ſunt. Per puncta ita reperta, $a\,r\,b\,s$ . . . f traduc curvam QZ, quæ & per reliqua puncta tranſire cenſenda eſt, quæcunque reperiri poſſunt intervalla inter ordinatas biſecando, atque ad puncta ſectionum rectas, methodo præſcripta reperiendas, ordinando.

§. 768. Dicetur curva QZ *Logiſtica* vel *Logarithmica*: quæ tota ad eandem baſeos OP partem cadet, atque ſecundum hanc vtrinque in infinitum excurret. Creſcunt enim ordinatæ ab O verſus P, tandemque maiores evadunt omni magnitudine dabili; a parte vero P verſus O eædem in infinitum decreſcunt. Neque tamen vlla ordinatarum abſolute nihilum evadit vnquam. Cum enim ſit $Cc : Bb = N : M$, & Cc non ſit nihilum, neque Bb nihilum erit, eodemque modo ex $N : M = Bb : Aa$ deducetur neque Aa nihilum eſſe poſſe, & ita continuo. Si vero extremarum vt Aa, Bb aliqua magnitudo ſit, etiam rectæ Rr, inter illas proportione mediæ, aliquam magnitudinem eſſe neceſſe eſt. Curva ergo QZ cum baſi OP nunquam vere concurret.

§. 769. Ex deſcriptione autem logiſticæ, qua aſſumptæ in baſi partes æquales AB, BC, CD &c, deinde in alias partes AR, RB, BS &c, inter ſe itidem æquales, diviſæ ſunt, atque ad puncta baſeos ARBS . . . F, reperta logiſticæ puncta *arbs* . . . *f*, ſequitur rationes $Aa : Rr$; $Rr : Bb$; $Bb : Ss$; . . . . $Xx : Ff$ inter ſe omnes æquales eſſe. Quare, ſi hæc ratio $Aa : Rr$, vel $Tt : Dd$, habeatur pro ſimplici, exprimaturque generatim per $m : n$; quia

$$Aa : Rr = m : n$$

$$Rr : Bb = m : n$$

$$Bb : Ss = m : n$$

$$Ss : Cc = m : n$$

$$Cc : Tt = m : n,$$

erit

erit ratio A*a* : B*b* duplicata rationis *m* : *n*, ratio A*a* : S*s*, triplicata, A*a* : C*c* quadruplicata, & ratio A*a* : T*t* quintuplicata eiusdem rationis *m* : *n*, & ita porro. Scilicet generatim, ſumptis duabus quibuscunque ordinatis A*a*; E*e*, index multiplicitatis rationis A*a* : E*e* erit numerus partium, quæ inſunt in AE. In hac ſumptione ratio A*a* : E*e* eſt octuplicata rationis *m* : *n*: rationem vero B*b* : F*f* eiusdem *m* : *n* decuplicatatam eſſe, ex numero partium in BF colligitur.

§. 770. Quare & duæ rationes, ſecundum multiplicitatem conſideratæ, vel indices multiplicitatum ad eandem rationem ſimplicem *m* : *n* relati, erunt vt hi partium numeri. Ratio A*a* : T*t* eſt quintuplicata rationis *m* : *n*, & ratio S*s* : F*f* eiusdem rationis *m* : *n* ſeptuplicata. Indices multiplicitatum ſunt modo nominati 5 & 7, qui ergo erunt vt numeri partium in AT, & SF.

§. 771. Sunt autem partes rectarum AT & SF inter ſe æquales, adeoque numeri partium vt ipſæ rectæ: ſcilicet in hoc exemplo AT : SF = 5 : 7. Quare & indices multiplicitatum, vel ipſæ rationum multiplicitates, vt hæ rectæ erunt: multiplicitas ſcilicet rationis A*a* : T*t* ad multiplicitatem rationis S*s* : F*f* vt AT ad SF, & ſic quælibet aliæ.

§. 772.

§. 772. Atque hæc pariter vera erunt, ad quamcunque parvitatem particulæ rectæ OP, per continuam biſectionem, fuerint reductæ. Mutatur ea re ratio $m : n$, atque eo magis accedit ad rationem æqualitatis, quo particulæ iſtæ minores fiunt. Sed quæcunque fuerit ratio iſta, ſi pro ſimplici ſumatur, quæ de multiplicitatibus rationum, ex hac, per continuam compoſitionem, ortarum, oſtenſa ſunt, pariter vera erunt.

§. 773. Atqui, ſi deſcripta ſit logiſtica, partes rectæ OP primum aſſumptæ absque fine biſectæ debent intelligi, atque ad quodlibet punctorum ita productorum applicata recta, quemadmodum A*a* applicata eſt ad A, B*b* ad B, & ita porro. Neque ergo in recta OP aſſumi poterunt quatuor puncta, ad quæ, ſi rectæ applicentur ſub angulo *a*AP, terminatæ in logiſtica, de his rectis verum non ſit, quod oſtenſum eſt de iis, quæ in ſchemate apparent. F. 88. Scilicet, quacunque logiſtica AZ ad baſin OP deſcripta, ſi in hac ſumantur puncta A, B, C, D vtcunque, ducanturque A*a*, C*c*, B*b*, D*d* ſub angulo ordinatarum, qui in conſtructione logiſticæ adhibitus fuit, erit AB ad CD, vt multiplicitas rationis A*a* : B*b*, ad multiplicitatem rationis C*c* : D*d*.

§. 774. Poterunt ergo & rectæ iſtæ AB, CD *menſuræ* dici rationum A*a* : B*b*, C*c* : D*d*, vel earundem inverſarum, B*b* : A*a* & D*d* : C*c*, eodem ſenſu, quo rationum numeri dicuntur, vel vno vocabulo, *logarithmi*. Scilicet, logarithmi rationum A*a* : B*b* & C*c* : D*d* ſunt ipſi illi numeri, qui exprimunt rectas AB, CD, ex vnitate quacunque aſſumpta.

SOLVTIO.

§. 775. Si ergo datæ rationis R : S invenienda ſit duplicata, triplicata, aut alia huiusmodi, ad quam index multiplicitatis eſt aliquis numerus integer; vel ſubduplicata, ſubtriplicata, ſubquadruplicata, aut alia, ad quam index multiplicitatis eſt fractus, numeratoris 1; vel ſi duplicatæ rationis R : S reperienda ſit ſubtriplicata, ad quam index eſt $\frac{2}{3}$, aut alia huiusmodi; vel ſi generatim reperienda ſit ratio, cuius, ſecundum multiplicitatem conſideratæ, index, ſit ad indicem rationis datæ, vt recta I ad rectam *i*: deſcripta ad baſin OP logiſtica quacunque QZ, ſumptaque OR pro arbitrio, fac OR : OS æqualem rationi datæ R : S, & duc R*a*, S*b* baſi OP parallelas, a punctis autem *a* & *b*, in quibus hæ logiſticam ſecant, demitte *a*A, *b*B, baſi occurrentes ſub angulo ordinatarum aſſumpto. Erit AB menſura rationis OR : OS

vel

vel R : S. Hac reperta fac $I : i = AB : CD$, erit CD menſura rationis quæſitæ, quæ quidem in baſin transferri poterit a quocunque puncto C: quo facto, ordinatis per C & D rectis C*c*, D*d* inter baſin & logiſticam, erit C*c* : D*d* ipſa ratio quæſita.

Si detur alteruter terminus rationis quæſitæ C*c*, hoc inter baſin & logiſticam eodem modo applicato, quo applicatæ ſunt A*a* & B*b*, dabitur punctum C, a quo ſi in baſin ponatur reperta CD, dabitur terminus rationis alter D*d*.

Corollarium I.

§. 776. Data logiſticæ baſi OP, angulo ordinatarum, & duobus extra eam punctis *a* & *b*, F.87. vel *r* & *e*, vel quibuslibet aliis, determinatur logiſtica. Ea autem deſcripta, cuiuslibet rationis, per quascunque rectas datæ, menſura in promptu eſt; atque viciſſim, ad datam vel aſſumptam menſuram, ratio exhiberi poteſt infinitis modis, quia liberum eſt terminum rationis alterutrum vtcunque ſumere. Si vero recta quacunque in baſi deinceps poſita, quemadmodum in OP poſitæ ſunt AB, BC, CD, DE &c, inter ſe æquales, per harum extrema A, B, C, D rectæ ducantur A*a*, B*b*, C*c*, D*d* ſub dato angulo, ſunt rectæ iſtæ in progreſſio-

ne

ne geometrica. Scilicet $\mathrm{A}a : \mathrm{B}b = \mathrm{B}b : \mathrm{C}c = \mathrm{C}c : \mathrm{D}d = \mathrm{D}d : \mathrm{E}e$ & ita porro.

Corollarium II.

§. 777. Si duæ logiſticæ deſcribantur, ſumpto eodem ad vtramque angulo ordinatarum, F.89. 90. eæ logiſticæ ſimiles erunt, quæcunque fuerint puncta extra baſes, ad earum deſcriptionem vſurpata. Sint enim QR & ST logiſticæ ad ſuas baſes ita deſcriptæ. Poſitis ergo ad QR duabus quibuslibet ordinatis $\mathrm{A}a$, $\mathrm{B}b$, ſi eædem applicentur in alteram, vt fiat $\mathrm{C}c = \mathrm{A}a$, & $\mathrm{D}d = \mathrm{B}b$, erit AB menſura rationis $\mathrm{A}a : \mathrm{B}b$ in priori logiſtica QR, & CD menſura eiusdem rationis $\mathrm{C}c : \mathrm{D}d$, vel $\mathrm{A}a : \mathrm{B}b$, in altera ST. Fiat $\mathrm{AB} : \mathrm{CD} = \mathrm{A}a : \mathrm{E}e$, ponaturque ab E repertæ CD æqualis EF; ac per F ordinetur $\mathrm{F}f$. Erit $\mathrm{E}e : \mathrm{F}f = \mathrm{C}c : \mathrm{D}d = \mathrm{A}a : \mathrm{B}b$, & hinc $\mathrm{B}b : \mathrm{F}f = \mathrm{A}a : \mathrm{E}e = \mathrm{AB} : \mathrm{EF}$. Dividatur AB bifariam apud M, & EF apud N, ducanturque $\mathrm{M}m$ & $\mathrm{N}n$. Quia ergo ratio $\mathrm{A}a : \mathrm{M}m$ ſubduplicata eſt rationis $\mathrm{A}a : \mathrm{B}b$ & $\mathrm{E}e : \mathrm{N}n$ ſubduplicata rationis $\mathrm{E}e : \mathrm{F}f$, priori $\mathrm{A}a : \mathrm{B}b$ æqualis; erit quoque $\mathrm{A}a : \mathrm{M}m = \mathrm{E}e : \mathrm{N}n$, & hinc $\mathrm{M}m : \mathrm{N}n = \mathrm{A}a : \mathrm{E}e = \mathrm{AB} : \mathrm{EF} = \mathrm{AM} : \mathrm{EN}$. Atque hoc modo pergere ſemper licet, quod certo eſt indicio figuram $\mathrm{A}ab\mathrm{B}$ figuræ $\mathrm{E}ef\mathrm{F}$ ſimilem

ſimilem eſſe. Sumpta iam BG = AB, & FH = EF, ductisque G*g*, H*h*, fit quoque B*b* : F*f* = G*g* : H*h*, = B*g* : F*h*, vnde ſimili ratiocinio colligitur ſimilitudo figurarum quadrilaterarum B*bg*G, & F*fh*H; & ita porro, quotieſcunque in baſin logiſticæ QR recta æqualis aſſumptæ AB, & in baſin alterius ST æqualis repertæ EF, deinceps ponantur ad hanc vel illam partem. Logiſticæ ergo QR, ST in infinitum productæ ex partibus ſimilibus conſtabunt; eruntque adeo ſimiles.

Corollarium III.

§. 778. Sumantur in vna logiſticarum duæ rationes, quarum menſuræ ſunt M, & N, quæ ergo erunt vt indices multiplicitatum earum rationum. In altera eædem duæ rationes ſumantur, ſintque hic *m* & *n* earum rationum menſuræ. Erit M : N = *m* : *n*, quia *m* & *n* ſunt vt iidem multiplicitatum indices. Hinc alternando M : *m* = N : *n*. Pertinent menſuræ M, *m* ad eandem rationem apud vtramque logiſticam, vtcunque hæc ſumpta ſit, & N, *n* ad aliam quamcunque, quæ itidem ad vtramque logiſticam eadem eſt Adeoque, ſi ex duabus logiſticis repetantur menſuræ eiuſdem rationis, 1 : 2, vel 1 : 10, vel 2 : 5, vel cuiuscunque alterius, quæ ſint M ad vnam & *m* ad alteram: erunt menſuræ iſtæ vt aliæ quæcunque, N & *n*, quæ itidem ad eandem in vtraque logiſtica rationem pertinent.

Scholion.

§. 779. Ex curva logiſtica depromi poteſt tabula logarithmorum, tanto accuratior, quo maiori modulo logiſtica deſcripta eſt. Sumitur quæcunque A*a* = 1, eique coordinatæ F.89. B*b*, G*g* & reliquæ exprimuntur per numeros ex vnitate illa: deinde rationum B*b* : 1, G*g* : 1 menſuræ ex logiſtica eadem captæ, itidem exhibentur per numeros, ex quacunque vnitate. Erunt numeri iſti, qui ſunt vt rationum menſuræ, *Logarithmi* earundem rationum, vel numerorum, per quos exhibentur B*b*, G*g* & reliquæ. Propter ſimilitudinem logiſticarum eadem tabula conficietur, in qua ſcilicet eorundem numerorum iidem ſunt logarithmi, e quacunque logiſtica tabula illa depromatur, dummodo datæ alicuius rationis, vt 10 : 1, vel dati numeri 10, idem ſumatur logarithmus, ad diverſas logiſticas: id eſt, ſi, ſumptis menſuris eiusdem rationis, vna M ad vnam logiſticam, altera *m* ad alteram, fiat vnitas V, ex qua exprimuntur menſuræ prioris logiſticæ, ad vnitatem *v*, ex qua exprimuntur menſuræ logiſticæ alterius, vt M ad *m*. Quare omnes logarithmorum tabulæ, quæcunque condi poſſunt, ex eadem logiſtica poſſunt depromi.

§. 780. Orientur autem ex eadem logiſtica diverſæ tabulæ, ſi rationis cuiuscunque datæ, vt 10 : 1, vel numeri 10, logarithmus nunc hoc numero exprimatur, nunc alio, quod futurum eſt, ſi ad exprimendam eius rationis menſuram nunc hac nunc alia vnitate vtamur. Si vnitas, ex qua exprimitur logarithmus rationis illius aſſumptæ, quam exempli cauſſa poſuimus eſſe 10 : 1, fuerit V ad priorem tabulam & 2V ad poſteriorem, omnes logarithmi poſterioris huius tabulæ dimidii erunt logarithmorum tabulæ prioris, qui ad eandem rationem pertinent: & generatim, in duabus tabulis logarithmi earundem rationum, erunt vt vnitates illæ inverſe, atque adeo omnes in eadem ratione.

F.89. 90. §. 781. Si tamen duo logarithmorum ſyſtemata e diverſis logiſticis QR & ST depromta velimus concipere, ſumpta, eadem in vtraque logiſtica, ratione quacunque, $Bb : Aa = Dd : Cc$, ſi menſuræ AB, CD per numeros exprimantur ex eadem vnitate V, dicaturque eius rationis logarithmus ex QR depromptus L, qui vero depromptus eſt ex ST, ſit l: erit $L : l = AB : CD = M : m$. Si vero ad logiſticam ST vnitas non fuerit V, verum alia quæcunque v, dicaturque logarithmus ex hac vnitate ortus Λ, erit $l : \Lambda = v : V$, quas rationes componendo cum prioribus colligetur $L : \Lambda = v \times M : V \times m$. Ergo & nunc duorum quorumvis logarithmorum $L : \Lambda$ qui pertinent ad eandem rationem, ille in vno ſyſtemate, hic in altero, eadem erit ratio, ſcilicet $v . M : V . m$.

§. 782. Si logarithmus numeri cuiuscunque n vel rationis $n : 1$ hic quoque deſignetur per l, ponaturque logarithmica quæcunque ST conſtructa eſſe, ſumpta $Cc = 1$, $Dd = a$, & $CD = b$, dicaturque Hh quæcunque, y, & reſpondens $CH = x$, erit $l.(a:1) : l(y:1)$ ſive $la : ly = b : x$, hinc

$$x = \frac{b.ly}{la}.$$

definieturque logiſtica per hanc æquationem, in qua ſi ſumatur $b = la$, erit $x = ly$.

§. 783. Quodſi index multiplicitatis rationis aſſumptæ $Dd : Cc$ ſive $a : 1$ fuerit e, reliquis manentibus, cum ſit DC ad HC vt index multiplicitatis rationis $Dd : Cc$, ad indicem multiplicitatis rationis $Hh : Cc$, ad eandem ſimplicem relatæ: erit index iſte multiplicitatis rationis $Hh : Cc$ ſive $y : 1$, iſte $\frac{ex}{b}$, adeoque ratio $y : 1$ producetur, ratione $a : 1$, vel vtroque eius termino, ad dignitatem evecto, cuius index eſt $\frac{ex}{b}$. Cum ergo quæcunque vnitatis dignitas ſit 1, erit

$$y : 1 = a^{ex : b} : 1, \text{ hinc } y = a^{ex : b}$$

quæ ergo æquatio logiſticam itidem definiet. Si $e = b$, quod ſumi ſemper poteſt, ſi index per lineam rectam exprimatur, æquatio redibit ad hanc:

$$y = a^{x}.$$

FINIS.

INDEX CONTENTORVM.

SECTIO I.

SECTIO II.

SECTIO III.

SECTIO IIII.

SECTIO V.

SECTIO VI.

SECTIO VII.

SECTIO VIII.

SECTIO VIIII.

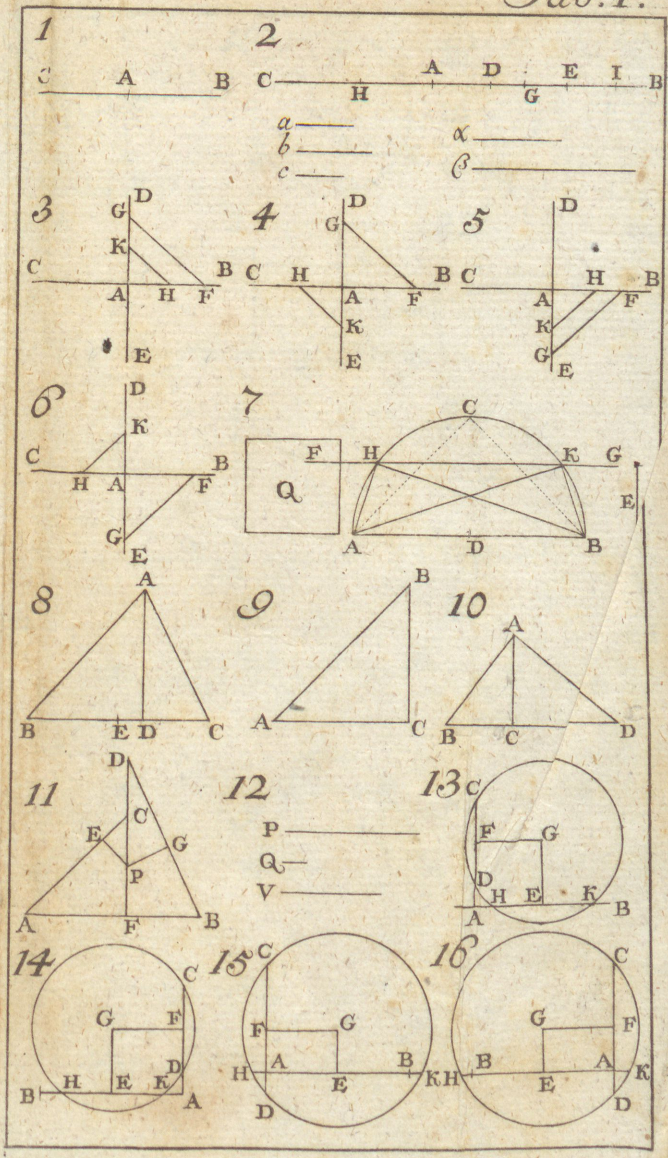
De Radicibus æquationum generatim.

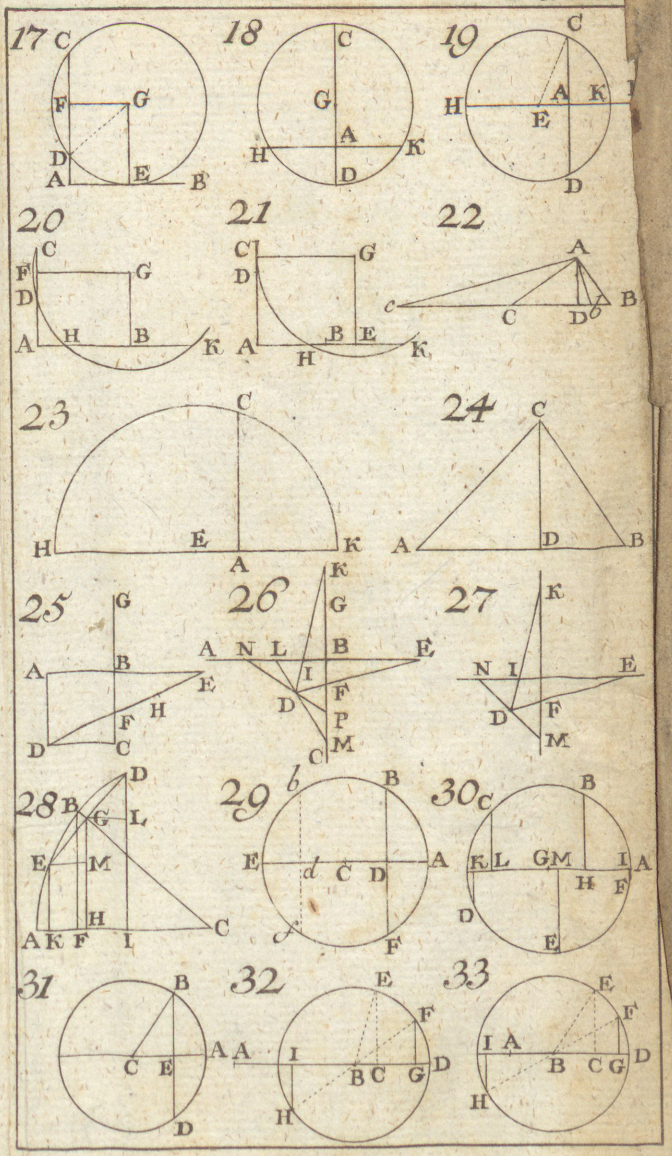
SECTIO X.

SECTIO XI.

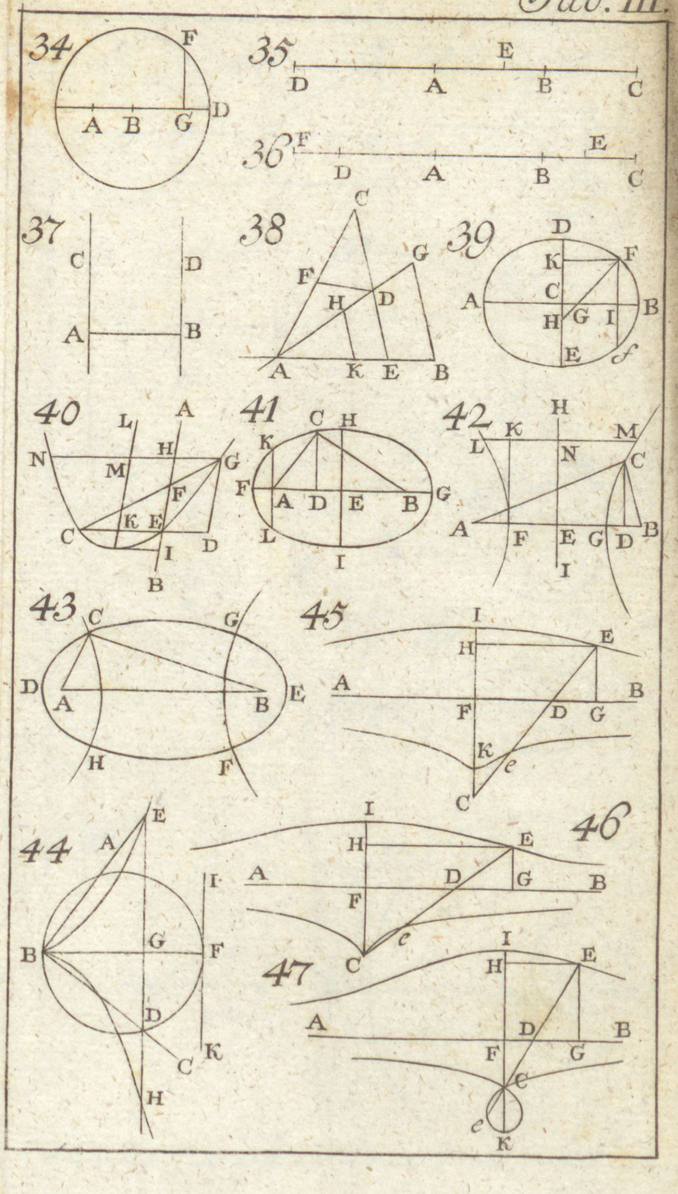
SECTIO XII.

Tab. I.


1
C A B
2
C A D E I B
H G
a
b
c
α
β
3
D G K C B A H F E
4
D G C H B A F K E
5
D C H B A F K G E
6
D K C B H A F G E
7
C F H K G Q E A D B
8
A B E D C
9
B A C
10
A B C D
11
D C E G P A F B
12
P
Q
V
13
C F G D H E K A B
14
C G F D B H E K A
15
C F G A B H E K D
16
C G F B A H E K D

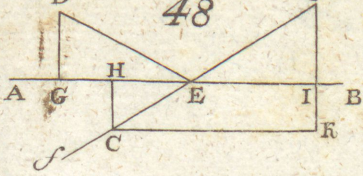

17
C
F
G
D
A
E
B
18
C
G
A
H
K
D
19
C
H
A
K
E
D
20
C
F
G
D
A
H
B
K
21
C
G
D
A
B
E
H
K
22
A
c
C
D
b
B
23
C
H
E
A
K
24
C
A
D
B
25
G
A
B
E
H
F
D
C
26
K
G
A
N
L
B
E
I
F
D
P
M
C
27
K
N
I
E
D
F
M
28
D
B
G
L
E
M
H
C
A
K
F
I
29
b
B
E
d
C
D
A
f
F
30
c
B
K
L
G
M
I
A
H
F
D
E
31
B
A
C
E
D
32
E
F
A
I
B
C
G
D
H
33
E
F
I
A
B
C
G
D
H

Tab. III.

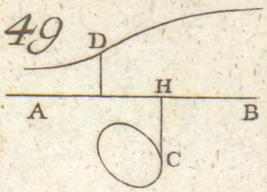

34
A B G D F
35
D A E B C
36
F D A B E C
37
C D A B
38
C F G H D A K E B
39
D K F C A B H G I E f
40
L A N M H G F K E C D I B
41
C H K F A D E B G L I
42
H L K M N C A F E G D B I
43
C G D A B E H F
45
I H E A B F D G K e C
44
E A I B G F D C K H
46
I H E A D G B F e C
47
I H E A D B F G C e K

Tab. IV.

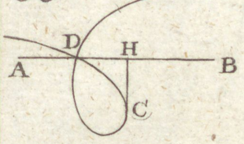
48



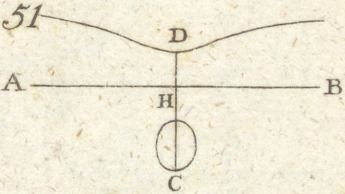
49



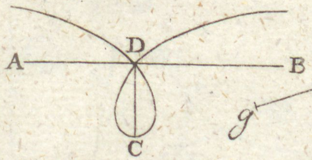
50



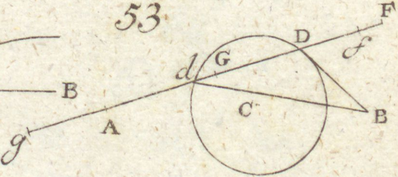
51



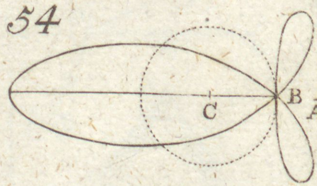
52



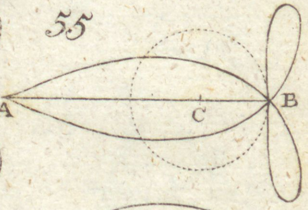
53



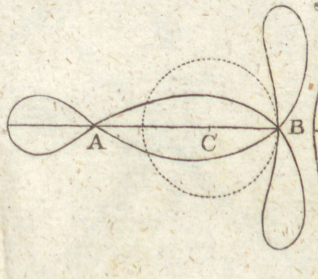
54



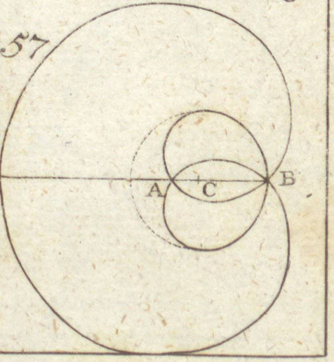
55



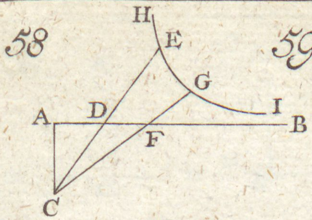
56

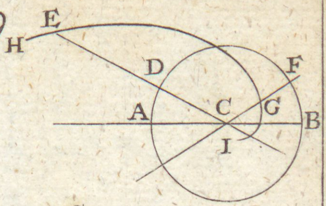


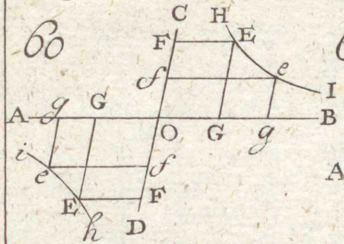
57

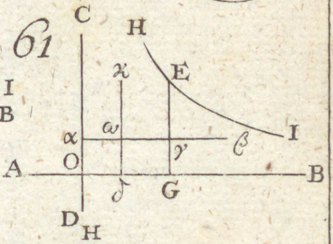


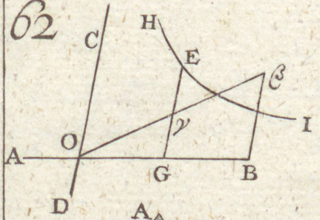
Tab. V.

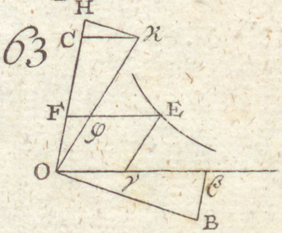
58


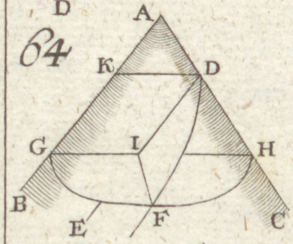
59


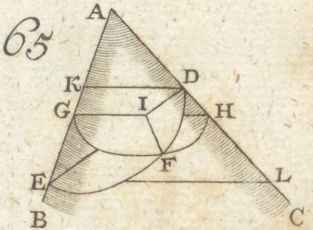
60


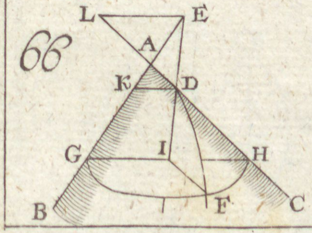
61


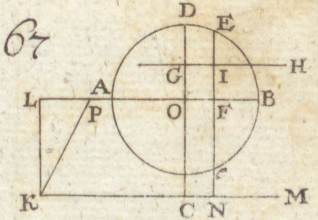
62


63


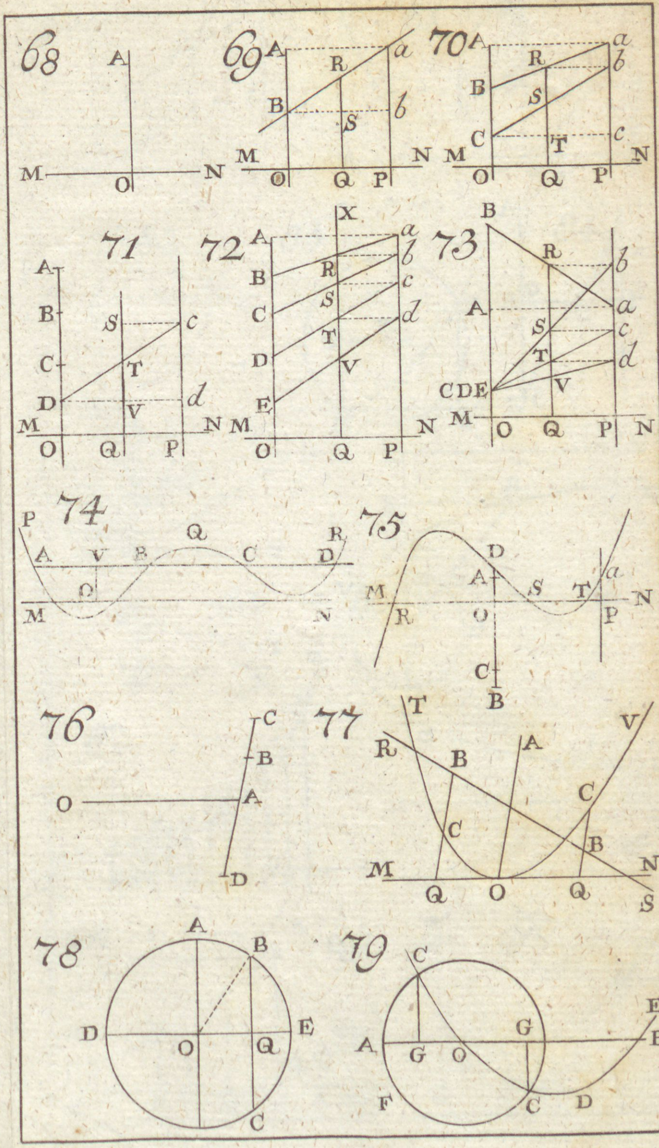
64


65


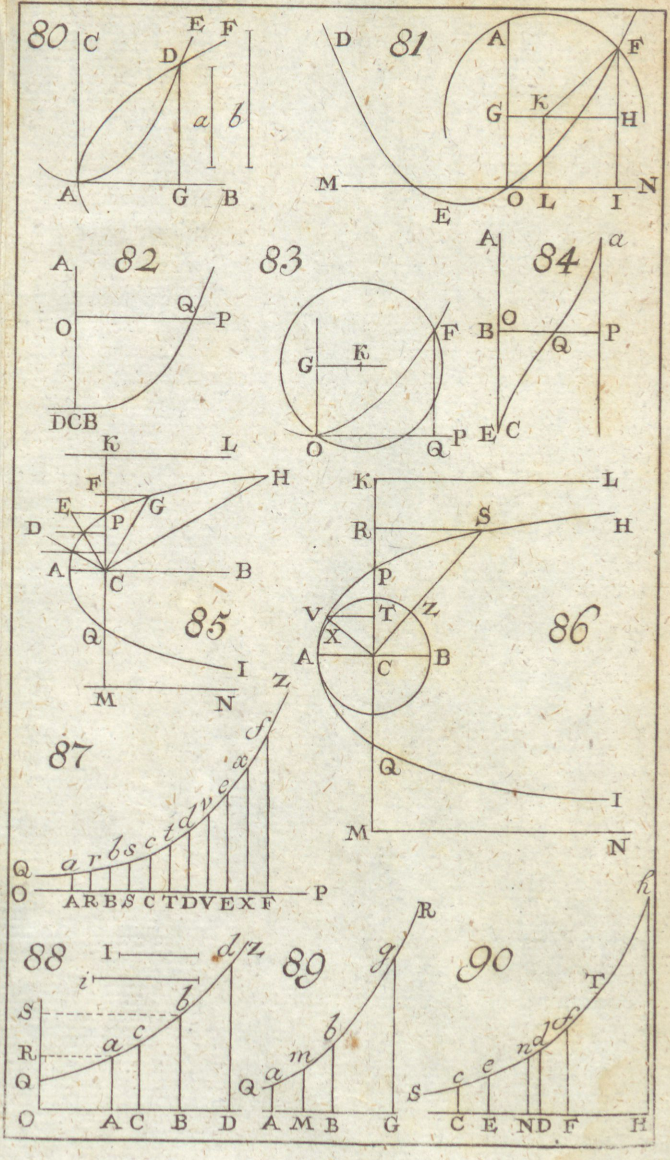
66


67


Tab. VI.


68
A
M O N
69
A R a
B b
S
M N
O Q P
70
A a
R b
B S
C c
T
M N
O Q P
71
A
B S c
C T
D d
V
M N
O Q P
72
X
A a
B R b
S c
C
D T d
V
E
M N
O Q P
73
B
R b
A a
S c
T d
CDE V
M N
O Q P
74
P R
A V B Q C D
O
M N
75
D
A a
M S T N
R O P
C
B
76
C
B
O A
D
77
T V
R
B A
C
C
B
M N
Q O Q
S
78
A
B
D E
O Q
C
79
C
E
A G B
G O
F C D

Tab. VII.



80
C
E
F
D
a
b
A
G
B
81
D
A
F
G
K
H
M
N
E
O
L
I
82
A
O
Q
P
DCB
83
G
E
F
O
Q
P
84
A
a
O
B
P
Q
E
C
K
L
F
H
E
G
D
P
A
C
B
Q
85
I
M
N
K
L
R
S
H
P
V
T
Z
X
A
C
B
86
Q
I
M
N
Z
87
f
x
e
v
d
t
c
s
b
r
a
Q
O
A R B S C T D V E X F
P
88
I
i
d
Z
S
b
R
a
c
Q
O
A C B D
89
R
g
b
m
a
Q
A M B G
90
h
T
f
d
n
e
c
S
C E N D F H