ELEMENTA
MATHEMATICA
NATURALI
PHILOSOPHIÆ
ANCILLANTIA,

AD

Præfixam in Scholis nostris normam

Concinnata

A P. MAXIMILIANO HÖLL,

e S. J. Philosophiæ Doctore, Matheseos

Prof. Publ. & Ord.

IN ACADEMIA S. J. CLAUDIOPOLITANA

TRANSYLVANIÆ.

TOMULUS I.

Complectens

Elementa Arithmeticæ numericæ, & literalis seu Algebræ.

CLAUDIOPOLI,

TYPIS ACADEMICIS S. J. ANNO 1755.

PRÆFATIO

AD LECTOREM.

CUm annis abhinc decem JOANNIS CRIVELLII *de Arithmetica literali Opuſculo deſideratis augendo, mendiſque repurgando in uſum Tyronum Philoſophiæ properatam Altiorum Imperio operam locarem, nihil minus animo præceperam, quam & me penum Mathematicam ſcriptis ſubinde oneraturum. Tot quippe Recentiorum inventis optimis ſcientia hæc, vel mea ætate aucta, ut rectiora, aut non dicta prius adferri vix poſſe facile intelligerem, poſtquam mei olim in Mathematicis Profeſſoris*

Erasmi Frœlichii, *viri è Societate mea ab eruditis lucubrationibus per Europam clarissimi*, Introductio facilis in Mathesim ad usum Tyronum Philosophiæ Provinciæ Austriæ S. J. conscripta, *in usum publicum prodiit; Quanti hæc pretii nostris in Academiis usque sit, usus, quo in manibus Tyronum nostrorum etiam hodie versatur, palam facit. At enim mutata per Academias nostras Studiorum Ratione, præfixa Collegiis Mathematicis publicarum Prælectionum Norma opusculum postulabat, quo Prima* Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ, Trigonometriæ, *ac* Utriusque Architecturæ *Principia Theoretica, & Practica, eaque usibus etiam communibus applicata; ita pertractarentur, ut primis Tyronum conatibus forent accommoda, essetque libellus materia plenus, mole parvus, regulis necessariis brevis, exemplis certo consilio electis longus, iisque prodesset maxime, quibus ne prima quidem Arithmetices principia innotuère. Hæc, nec præterea alia, quum, in unum concinnata opusculum, Authorem adhuc desiderabant, causam perspicis L. B. laboris tumultuarii in gratiam meorum Tyronum suscepti, quorum utilitati nolle consultum, ejus non esse putavi, qui se, suaque omnia DEI Gloriæ, omniumque commodis consecrasset. Jam vero, quæ præstitisse in hoc opusculo conatus fuerim paucis accipe.* Me-

Methodum, *(non rigorem) sectando Mathematicam, Theoriam Praxi ita sociare satagebam, ut è paucis* Theorematibus, *tanquam fontibus, utilissimorum Problematum copiam derivarem;* Problemata *necessariis duntaxat, iisque in casus distinctis regulis instruxi, Exemplis autem, & copiosis, & utilissimis declaravi; ex his* Corollaria *permulta deduxi; In* Scholiis *denique haud parcus, dubia resolvi, utilia monui, cumque mihi ejusmodi ′ ,ronibus scribendum esset, ad quos vix nomen* Algebræ *usque penetraverat, multis opus erat, quibus futuram* Analyseos *utilitatem, mirandamque vim oculis ipsis exhiberem, generosos cætera, at in scientia nova peregrinos animos, novis identidem stimulis ad æmulandos eruditarum gentium doctos labores, ac studia incitarem; universim in id conatus meos intendebam unice, ut scientias Mathematicas, quibus à pueritia innutritus delector maxime, discentibus faciles, jucundas, utilesque comprobarem, obscura, aut ambigua, quæ novis Tyronibus, plurium annorum doctus experientia, negotium facessere novi, partim declararem, partim surrogatis aliis, tollerem; finem hunc consequendi gratia, etsi in concinnandis partibus singulis operam qualemcunque adhibuerim, præcipuam tamen in enucleandis penitius Elementis Algebræ impendisse me non diffiteor.* Por-

Porro, si quid ex aliena, à Societ. mea, penu huic opusculo intuli, id loci Clarissimi Authoris Nomen non dissimulavi, Authoribus tamen Societatis meæ collaudandis parcens de industria; Isthic namque, quidquid in hoc meo opusculo egregium præter cætera L. B. legerit, id me à viris Societatis nostræ Clarissimis R. P. Josepho Franzio, & Erasmo Frœlichio (*quorum* Primo *Praxim omnem Mathematicam, cumprimis Astronomicam, Physicasque disciplinas*, Alteri *Theoriam mathematum in acceptis gratus refero*) *olim hausisse profiteor; sin quid minus recte dictum, id solum quidem imbecillitati meæ, ac properato labori tribuendum cupio.*

Neque velim quispiam isthic sublimia quærat, Philosophiæ Naturali *duntaxat* ancillari *cupio hæc mea Elementa, non* dominari *disciplinis Mathematicis, tametsi noverim, ea hujusmodi esse, quibus instructi Tyrones in Mathesi utraque pura nempe, & mixta, felicissimos ad DEI Gloriam, Patriæque utilitatem progressus facere valeant; Præterea iis quoque prodesse hisce elementis volui, qui melioribus destituti præsidiis Marte proprio, cumprimis Arithmeticam condiscere ad usus Civiles gestiunt, horum gratia complura* Lector *reperiet, quæ iisdem usibus deserviant commode. Fruere itaque L. B. meosque ad DEI Gloriam conatus, eo velim suscipias animo, quo damus.*

PRO-

PROLEGOMENA

IN

MATHESIM UNIVERSAM

De Methodo Mathematica.

I.

M*Athesis* (voce Græca Μάθησις *Scientia*, vel *Disciplina* per Antonomasiam appellata) est *Scientia Quanti*. Dividitur in *Mathesin puram*, & *Mixtam*. Mathesis *pura* est scientia Quanti abstracti ab omni materia, habetque pro objecto quidquid numerabile, aut mensurabile est, cujusmodi sunt *Algebra* juncta *Arithmeticæ numericæ*, cum *Geometria pura*. Mathesis *mixta* dicitur, quæ materiis physicis applicatur, ejusmodi sunt; *Geometria mixta*, *Statica*, *Mecha-*

nica, *Hydraulica* &c. Mathesis pura scientia est certissima, *Mixta* secundum formam Mathematicam solum certa est, non item semper secundum materiam.

II. *Methodus mathematica* est ordo, seu modus quidam peculiaris, quo Mathesis utitur ad veritates suas inveniendas, demonstrandas, tradendasque. Dividitur hæc bifariam, in methodum nempe *Analyticam*, & *Syntheticam*. Methodus *Analytica*, seu *Resolutoria* inveniendis, detegendisque veritatibus famulatur; *Synthetica*, seu *Compositoria*, ea, quæ ope Analysis reperta sunt, in ordinem disponit, veritatemque veritati ita componendo nectit, ut abs se invicem, non secus atque catenæ annuli dependeant; inservit hæc tradendis suis dogmatibus mathematicis. In Methodo itaque *Synthetica*, adhibentur I. *Definitiones*. II. *Postulata*. III. *Axiomata*. IV. *Experientiæ*. V. *Hypotheses*. VI. *Propositiones*. VII. *Demonstrationes*. VIII. *Theoremata*. IX. *Problemata*. X. *Porismata*, seu *Lemmata*. XI. *Corollaria*. XII. *Scholia*.

III. *Definitio* est distincta notio, vel explicatio Rei, aut Nominis, de quo agitur. *Ex. gr. Numerus* est ordinata unitatum multitudo.

IV. *Postulatum* dicitur, quod fieri posse, ab alio nobis facile concedendum postulamus. *Ex. gr. Ab uno puncto ad aliud ducere lineam.*

V. *Axioma* (Ἀξίωμα *dignum creditu*) est veritas perceptis rite terminis per se, vel ex terminis manifesta, aut lumine naturæ nota. *Ex. gr. Totum est majus sua parte.*

VI. *Hypothesis* (Ὑπόθεσις *Suppositio*) sunt res, vel signa rerum ad libitum ex institutione hominum assumpta, *Ex. gr.* si loco vocis *Æquale* assumatur signum =, aut loco numeri 5 litera *a*, vel *b*, hujusmodi sunt in Astronomia loco *Solis* ☉, loco *Lunæ* ☾, &c.

VII. *Experientia* est effectus quispiam sive sensu externo, sive interno perceptus simul, & cognitus, *Ex. gr.* dum stellæ, quæ interdiu non videbantur, sole occumbente, nocte serena, conspiciuntur. *Experientiæ* itaque sunt tantum rerum singularium perceptiones cognitæ.

VIII. *Propositio* est enunciatio clara, & distincta propositæ alicujus veritatis, vel praxeos; & hinc duplex est *Speculativa*, aut *Theoretica*, & *Practica*. Speculativa propositio est enunciatio clara, & distincta veritatis cujuspiam, id est, quid rei cuipiam sub certis conditionibus, aut etiam abſolute convenire poſſit, quid non. *Ex. gr. Si duo numeri invicem multiplicentur, idem factum producitur ſive primus in ſecundum, ſive ſecundus in primum ducatur. Propoſitio practica* dicitur, quæ aliquid faciendum, aut efficiendum proponit. *Ex. gr. Additionem numericam facere, ſeu addere numeros.* Porro utraque propoſitio ſubdividitur in *Conditionatam*, ſeu *Hypotheticam*, & in *Abſolutam. Hypothetica* eſt, quæ enunciat veritatem, aut aliquid efficiendum proponit ſub certis conditionibus; *Ex. gr. Si quatuor termini ſunt proportionales, erit factum duorum extremorum æquale facto mediorum.* Ubi ſub conditione proportionalitatis enunciatur æqualitas facti extremorum cum facto mediorum. *Abſoluta* eſt, quæ ſub nulla conditione proponitur. *Ex. gr. Quod multiplicatio componit, tollit diviſio.*

IX. *Demonſtratio* eſt brevis argumentatio ex principiis jam certis deducta, qua intellectus convincitur ad affirmandum, vel negandum id, quod in propoſitione ſeu ſtatu quæſtionis affirmabatur, vel negabatur.

X. *Theorema* (Θεώρημα *Speculatio*) eſt complexum ex propoſitione ſpeculativa univerſali, & ex demonſtratione conſtans, ſeu eſt veritas propoſita ſimul, & demonſtrata. *Ex. gr.* Si proponatur hæc veritas:

Quod

Quod multiplicatio componit, tollit divisio, & ſimul per adnexam demonſtrationem id ipſum probetur, erit complexum hoc Theorema. Finitur Theorema, vel potius Demonſtratio his notis: Q. E. D. id eſt: *Quod erat demonſtrandum.*

XI. *Problema* (Πρόβλημα *Propoſitum*, ſeu *res ad faciendum propoſita*) eſt complexum ex *Propoſitione practica*, ſeu quæ aliquid faciendum proponit, ex *Reſolutione*, qua res propoſita fieri docetur, & ex *Demonſtratione*, qua demonſtratur Reſolutionem datam rite factam eſſe, ut proponebatur. *Reſolutio* finiri ſolet his notis: Q. E. F. id eſt, *Quod erat faciendum.*

XII. *Poriſma* (Πόρισμα *Præparatio, Tranſitus*) eſt Theorema prævium, aut præmiſſum ad aliud ſequens Theorema, vel Problema aliquod illuſtre facilius, aut brevius demonſtrandum, vocatur etiam *Lemma* (Λῆμμα *acceptio*, vel *propoſitum*.)

XIII. *Corollaria* ſunt veritates, vel praxes ex Definitione, Axiomate, Theoremate, vel Problemate ultro fluentes ſine adhibita, aut ſaltem quam ſimpliciſſima nova demonſtratione.

XIV. *Scholia* (Σχόλια) ſunt adnotationes quædam poſt Definitiones, Propoſitiones, Corollaria &c. poſitæ, quibus obſcura declarantur, dubia reſolvuntur, uſus

do-

doctrinæ indicatur, eruditio aliqua proponitur, aut quidvis aliud ſcitu non injucundum adfertur, aut opportune monetur.

XV. Adhibentur quoque in hac methodo numeri Paragraphorum, ut horum ope, aliis in locis uſurpata nomina, aut veritates in memoriam, ſi forte excidiſſent, relegendo revocari facile queant, ſimulque, ut prolixæ earundem rerum, aut definitionum repetitioni via præcludaretur.

XVI. Methodus itaque Mathematica exigit, ut ante omnia voces, & res omnes clare, & diſtincte definiantur, præmittantur Axiomata, Hypotheſes, & Poſtulata, ſi iis opus ſit, dein ſtatus quæſtionis proponatur itidem diſtincte, clare, & breviſſime, id eſt, fiat Propoſitio clara, & diſtincta; facta Propoſitione id, quod propoſitum erat, & ſub iisdem conditionibus, nec aliud, ſuccincte, & clarè demonſtretur. In demonſtrationibus nihil adhibeatur, quod vel jam prius demonſtratum, definitum, aut declaratum non ſit; id maxime cavendum, ne ſuperfluum aliquid adferatur, ſed uno, alterove Enthymemate, aut Syllogiſmo *concluſio*, quæ identica ſit cum propoſitione facta, inferatur. Ex his utilia Corollaria deducantur, & Scholia ſubjiciantur, ſi opus ſit.

XVII.

XVII. Ordo autem Propositionum, aut Theorematum caute observandus, ut maxime simplicia, & facillima antecedant, ex his ad sublimiora tanquam per gradus quosdam progrediendum, in hoc progressu ita sibi connexæ succedant propositiones, & veritates, ut posteriorem ex priore consequi necesse sit, itaque dependeant, ut posteriores sine prioribus consistere non possint. Verum de methodo hac mathematica; quæ hic strictim relata sunt, fuse videri possunt in eleganti opusculo *R. P. Philippi Steinmeyer*; *e S. J.* sub titulo: *Regulæ præcipuæ methodi Mathematicæ, seu scientificæ, Augustæ Vindel.* 1750. *in* 8vo. Item *Illust. Christiani Wolfii*, *De Methodo Mathematica brevis commentatio*; Elementis suis Matheseos præfixa.

MONITA

AD TYRONES MATHESEOS,

De Methodo legendi libros Mathematicos.

I.

DEfinitiones intime sibi perspectas habeat Tyro Mathematicus, easque memoria non fallente retinere studeat, ac sæpius repetendo earum usum sibi familiarem reddat.

II. Axiomata quoque (quæ, uti definitiones, fundamenta sunt primarum demonstrationum) è memoria sinè hæsitatione depromere assuescat.

III. Propositionem factam, sive statum quæstionis propositum, & demonstrandum, aut practicè efficendum omnimode perspiciat, ac intelligat, & si plures complectatur partes, singulas distinctè cognoscat oportet, videatque, sub quibus conditionibus enuncientur; nec prius ad legendam, intelligendamque subjectam demonstrationem progrediatur, quam propositionem penitus sibi cognitam habeat.

IV. Non inutile videtur monitum quorundam, ut intellecta probe Propositione, si affirmativa sit, negativam, si negativa, affirmativam *fingat esse veriorem, nec ante veram admittat, nisi intellectu per subjectam propositioni demonstrationem integre convicto.* Ex. gr. *Sit Propositio*: In omni proportione Geometrica factum extremorum est æquale facto mediorum. *Ante, quam ad legendam demonstrationem accedam, fingo non esse verum, aut saltem dubium videri, quod in omni* Proportione Geometrica factum extremorum, debeat esse æquale facto mediorum. *Neque enim quærenti veritatem, cum primis Mathematicam, quidpiam admittendum, aut affirmandum est, de cujus veritate intellectus convictus non sit, cum in dogmatibus Mathematicis, humana enunciantis authoritas nullius, aut certe non majoris ponderis esse debeat, quam vis argumentorum, seu propositæ rationes.*

V. Dum demonstrationem legit, videat, an præmissas evidentes intelligat, si de sensu, aut veritate cujuspiam dubitet, citatum eo in loco paragraphum evolvat, omniaque, quæ sub eo numero continentur, relegat, & experietur dubium sibi omne de veritate

sub-

sublatum. Hujusmodi enim dubium frequentissimum est Tyronum vitium propterea, quod, quæ antecesserunt, & in quibus propositiones demonstrationum fundantur, Tyronibus facillime è memoria excidant. unde, quæ exercitato clara, & manifesta sunt, ea Tyronibus obscura, & dubia videntur.

VI. Non transiliat, aut prætermittat rem ullam non intellectam, præsertim, si adsit, quem consulat, eoque ordine singula legat, quo proposita habentur; certus namque sit, methodum Mathematicam hujusmodi esse, ut intelligentia veritatum posteriorum à priorum perspicuitate plene dependeat, nec de progressu sibi quis blandiatur, qui per saltum propositionum scientiam Mathematicam comparari posse existimat.

VII. Si veritas demonstrata quomodocunque in praxim deduci possit, per singulos casus variando exerceatur.

VIII. Propositiones practicas (præsertim Geometriæ) instrumentorum præscriptorum ope sive in charta, sive in campo, aut loco in propositione determinato resolutas, ipse exerceat, figuras delineet, construat, ac rite factas demonstret.

IX. Si Professore utatur explanante sua, aut alterius Mathematici typis vulgata dogmata, plurimum ad profectum confert, si materiam explanandam privatim prælegendo intelligere marte proprio studeat, non intellecta, aut dubia adnotet, explicantem Professorem absque mentis evagatione (nam fixam mathemata mentem exigunt) *audiat attentus, si finita explanatione nondum sibi satisfactum advertat, tum consulat Professorem, aut cum intelligente quovis alio conferre non pudeat.*

X. Modum operandi periti Professoris ad amussim æmuletur, eundemque constanter teneat cum primis in Algebra.

XI. Formulas Algebraicas (quarum nulla est, quæ Theorema, aut utile quoddam Problema non contineret) contemplari, quidque eloquatur, intelligere assuescat.

XII. Animadvertat ad methodum ipsam Mathematicam, quomodo, & quibus viis, ex paucis cognitis ad ignota, ex simplicibus, & quasi obviis ad sublimia detegenda feratur, eamque in aliis disciplinis seu tradendis, seu condiscendis usurpare conetur.

XIII. Universim notent Tyrones, ut cæteras disciplinas, ita Mathesim cumprimis exercitio, & usu frequentissimo comparari, conservarique.

CON-

CONSPECTUS
PARTIUM, ET CAPITUM
Arithmeticæ numericæ.

PARS I.
De Natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

PARS II.
De Logistica Decimali.

PARS III.
De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

ELEMENTA
ARITHMETICÆ
NUMERICÆ.
PARS I.
De natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

CAPUT I.
De Arithmetica in genere.
DEFINITIO I.

1. ARithmetica *Numerica* est ſcientia numerorum, hoc eſt, inquirendi in naturam Numerorum, ex qua certæ numerorum proprietates deductæ determinantur.

DEFINITIO II.

2. *Numerus* eſt ordinata unitatum multitudo.

DEFINITIO III.

3. *Unitas* eſt Principium Numeri.

COROLLARIUM.

4. Ad numerum itaque conficiendum binæ ſaltem Unitates requiruntur; hinc *dualitas* eſt numerus minimus.

HYPOTHESIS I.

5. Signa, *ſeu* notæ, *quibus Arithmetica numerorum utitur*, decem *ſunt*: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *quorum ultima figura* (0) *nihil ſignificat*, *niſi ex novem aliis aliqua ante ponatur*, *& tum ejus valorem auget per* decem. *Enunciantur autem ſigna hæc hoc modo*: Unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, Zerus. *Vocantur hi numeri etiam* integri.

HYPOTHESIS II.

6. *Valor horum ſignorum*: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. *ex inſtitutione hominum dependet à ſolo ordine*, *loco*, *vel ſitu*, *in quo tale ſignum locatur*, *vel ſcribitur.*

HYPOTHESIS III.

7. *Ordo*, *ſive locus cognoſcitur à dextra ſiniſtram verſus progrediendo*, E. gr. *ſint aliqua ſigna*, *ſive notæ numericæ hoc ordine locatæ*: 1754. *tum dextima nota* 4, *valet tantum* unitates *ſimplices*, *ſequens nota* 5, *valet tot* decades, *quot ipſa unitates*

tates ſignificat; quæ hanc conſequitur, nempe 7, *valet tot* Centenarios, *quot ipſa unitates denotat; ultima denique* 1, *valet tot* Millenarios, *quot ipſa unitates ſignificat.*

COROLLARIUM I.

8. Hinc liquet incrementum valoris numerorum ex loco deſumptum, fieri ſiniſtram verſus per *Decades* antecedentium.

COROLLARIUM II.

9. Patet quoque, quod hæc ſigna *decem* ſufficiant ad exprimendum quemcunque magnum numerum.

COROLLARIUM III.

10. *Zerus* itaque omnem locum occupat, in quo ex ſignificantibus notis novem, aliqua non ponitur; *E. gr.* in hoc ordine: 502, ubi 0 locum *decadum* occupare debet, ut numerus 5 locum *centenariorum* occupare poſſit; ſecus enim, ſi non occuparet *Zerus*, ſed *E. gr.* ſcriberetur ſic: 52, numerus 5 non *centenarios*, ſed *decades* ſignificaret. (*§.* 6. & 7.)

SCHOLION I.

11. *Ratio hujus ordinis à dextra ſiniſtram verſus eſt, quia modus ſcribendi Orientalium (uti ſunt Arabes, Hebræi, Turcæ &c. qui Arithmeticam invenerunt) eſt etiamnum à dextris ſiniſtram verſus; ipſa vero ſigna numerica (quæ literæ ſunt Arabum) nos* Arabica, *ab Inventoribus Arabibus, appellamus.*

SCHOLION II.

12. *Ratio incrementi valoris per* decem *ab ipſa natura repeti debet, quæ hominem decem digitis, tamquam numerandarum rerum notis, & inſtrumentis dotavit, Digitis enim natura duce utimur in computando, quam diu Arithmeticæ regulis inſtructi non ſumus.*

CAPUT II.

De Numeratione.

SPecies Arithmeticæ numerorum integrorum ſunt quinque: *Numeratio*, *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Diviſio*. De ſola numeratione hoc capite, de aliis in ſequentibus agetur.

DEFINITIO IV.

13. *Numeratio* eſt ars enunciandi, & ſcribendi quoscunque numeros ſecundum valores ſuos totales.

PROBLEMA I.

14. PROP. *Numerum quemcunque propoſitum enunciare.*

RESOLUTIO.

I. Propoſitum numerum inchoando à dextris ſiniſtram verſus (§.11.) per *virgulas*, ſive *commata* diſtingue in claſſes, claſſi cuilibet tres notas aſſignando, & habebis in qualibet claſſe à dextris ſiniſtram verſus, *unitates*, *decades*, & *centenarios*. (§. 7.)

II. Poſt dextimæ claſſis *virgulam* ſigna ſuperne numerum *puncto uno*, quod *millenarios* deſignat; poſt ſecundæ claſſis *virgulam*, ſigna ſuperne numerum una *virgula*, quæ *milliones* ſignificat; poſt tertiæ claſſis *virgulam*, nota ſuperne numerum

ite-

iterum *puncto uno*, quod *millenarios millionum* ſignificat; poſt quartæ claſſis *virgulam* nota ſuperne numerum *duabus virgulis*, quæ *millionum milliones* ſignificat: & ſic ſemper alternando cum *punctis*, & *virgulis* à dextris ſiniſtram verſus progredere, donec ſignando numerum propoſitum abſolvas.

III. Juxta ſigna appoſita, enunciationem ordieris à ſiniſtra dextram verſus, virgulas *ſupernas* per *milliones*, puncta *ſuperna* per *millenarios*, virgulas *infernas*, ſive *comata* per *centenarios*, cæteras notas numericas per *decades*, & *unitates* appellabis, reſpiciendo ſemper ad virgulas, & puncta proxima dextram verſus. Sed hæc viva voce magis clareſcent.

Sit enunciandus, per puncta, & virgulas jam diſtinctus numerus:

	.			//			.			/			.			
8	5,	2	3	4,	7	8	9,	6	3	8,	2	5	7,	8	5	4.
Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates
Millenariorum Bimillionum.		Bimillionum.			Millenariorum Millionum.			Millionum.			Millenariorum.			Simplices.		

 Igi-

Igitur numerum propoſitum ſic enunciabis: Octuaginta quinque *millia bimillionum*, ducenti triginta quatuor *bimilliones*, ſeptingenta octuaginta novem *millia millionum*, ſexcenti triginta octo *milliones*, ducenta quinquaginta ſeptem *millia*, octingenta quinquaginta quatuor folia *E. gr.* arborum.

Demonſtratio hujus enunciationis patet ex cap. I. §. 6. ad 10. incluſive.

COROLLARIUM I.

15. Ex attenta hujus exempli contemplatione, liquet *primo*: puncta ſuperne numeris appoſita exprimenda eſſe per vocem *millia*, virgulas autem per vocem *millionum*, & quidem una virgula ſimpliciter per vocem *millio*; binæ virgulæ per voces *millionum millio*, ſeu brevius, per vocem *bimillio*; tres virgulas per voces *millionum millionum millio* ſeu brevius *trimillio*, aut *trillio*; ita quatuor virgulas per vocem *quadrimillio*; quinque virgulas per vocem *quinimillio*; ſex per vocem *ſeximillio*, & ſic porro. *Secundo*: patet, ad numerum *millenarium* requiri quatuor notas numericas; ad *millionem* vero ſeptem, ad *bimillionem* tredecim, ad *trimillionem* novemdecim, accremento videlicet ſex notarum ſequentium.

COROLLARIUM II.

16. Eodem modo enunciatur quivis alius numerus, in quo complures zeri reperiuntur, hoc ſolum notato, quod cum zerus nihil ſignificet (§. 5.) zeri non enuncientur. Sic numerum propoſitum: 3,020.000,056,004,300. ita enunciabis: tria millia viginti *bimilliones*, quinquaginta ſex *milliones*, quatuor *millia* trecentæ *E. gr.* atomi.

CA-

CAPUT III.

De Additione Numerica.

AXIOMA.

17. Omnis numerus vel eſt *purus*, vel *mixtus*.

DEFINITIO V.

18. Numerus *purus*, ſive *abſtractus*, aut *diſcretus* eſt, qui ſolam multitudinem ſignificat abſtractam ab omni materia rei alicujus, ut ſi dicas: *tria*, *ſeptem*, *centum* &c.

DEFINITIO VI.

19. Numerus *mixtus*, ſive *concretus*, aut *materialis* eſt, qui præter multitudinem ſignificat ſimul materiam, ſive res, cujus eſt multitudo. Ut ſi dicas: *tres calami*, vel *ſeptem floreni*, aut *centum urnæ vini* &c. numerus *mixtus* dividitur in numeros *homogeneos*, & *heterogeneos*.

DEFINITIO VII.

20. Numeri *homogenei* ſunt, qui ſignificant res ejusdem ſpeciei, & denominationis, ut *quinque calami*, & *ſeptem calami*.

DEFINITIO VIII.

21. Numeri *heterogenei* ſunt, qui ſignificant res diverſæ ſpeciei, ſeu denominationis, ut *ſeptem calami*, & *octo urnæ vini*. Porro numeri *heterogenei*, vel ſunt *reducibiles*, vel *irreducibiles*.

DEFINITIO IX.

22. Numeri heterogenei *reducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci poſſunt, ut *duo floreni*, & *quinque groſſi*; nam duo floreni (germanici) valent bis viginti, ſeu 40. *groſſos*.

DEFINITIO X.

23. Numeri heterogenei *irreducibiles* ſunt, qui ad eandem ſpeciem, ſive denominationem reduci non poſſunt, ut *tres calami*, & *quinque urnæ vini*.

SCHOLION.

24. *Adverte; numeros heterogeneos ſecundum ſe* irreducibiles *poſſe fieri* reducibiles, *ſi in quodam* tertio *conveniant, ut* tres equi, *&* ſeptem urnæ vini, *ſi conſiderantur quoad pretia pecuniæ, erunt reducibiles in ratione pecuniæ.*

AXIOMATA.

25. I. *Totum* eſt æquale omnibus partibus ſimul ſumptis, & viciſſim.

26. II. *Totum* eſt majus ſua parte.

27. III. *Pars* eſt minor ſuo toto.

28. IV. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt æqualia inter ſe.

SCHOLION.

29. *Axiomata hæc, quia lumine naturæ nota, demonſtratione non egent, ut adeo rigidiſſimi etiam Mathematum cultores ſuperfluitatis non immerito arguant factum* Cl. Chriſt. Wolffii, *qui hæc in ſuis Elementis Math. per propoſitiones identicas, nihilo ipſis axiomatibus clariores, demonſtravit.*

DE-

DEFINITIO XI.

30. *Additio numerica*, eſt collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum *totum*, quod totum *ſumma*, ſive *aggregatum*, aut *quæſitum* dicitur. Numeri vero colligendi vocantur *addendi*, aut *dati*.

COROLLARIUM.

31. Hinc ad additionem numerorum mixtorum requiritur homogeneitas numerorum.

PROBLEMA II.

32. PROP. *Additionem numericam facere*, ſive *addere numeros.*

RESOLUTIO.

I. Numeri addendi homogenei ita ſub ſe invicem collocentur inchoando à dextris ſiniſtram verſus, ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c.

II. Sic collocati numeri ſubducantur linea, ne addendi confundantur cum ſumma.

III Inchoetur collectio à dextris, ſive ab unitatibus, & ſumma unitatum ſcribatur ſub linea directe infra unitates; eodem modo colligantur decades, & ſumma decadum ſcribatur infra decades, & ſic procedendum erit cum centenariis &c. *Vide exemplum I.*

IV. Quod ſi ſumma unitatum excreſcat ultra numerum novem, ſeu in ejusmodi numerum, qui duabus notis ſcribendus foret, ſcribatur tantum illa, quæ alias ad dextram ſcribi deberet, altera vero nota mente retenta, addatur numeris ſequentis claſſis decadum; idem obſerva in reliquis claſſibus. *Vide exempl. II. & III.*

V. Si addendi ſint *heterogenei reducibiles*, E. gr. floreni, groſſi, cruciferi ad flor. groſ. & crucif. collocentur ſub ſe invicem ita, ut crucif. reſpondeant cruciferis, groſſi groſſis, flor. florenis, & à minima ſpecie inchoando, collectio inchoetur ut ſupra; hoc ſolum notato, quod, quoties ſumma ſpeciei inferioris adæquat ſpeciem ſuperiorem, toties ſuperiori ſpeciei ſit addenda. *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

33. Additio numerica eſt collectio plurium numerorum partialium, & homogeneorum in unum totum (§. 30.) ſed *per reſolutionem hujus Probl.* in ſumma collecti habentur omnes numeri partiales & homogenei unitatum, decadum, centenariorum &c. ergo in ſumma habetur totum (§. 25.) ergo in ſumma facta habetur additio numerica Q. E. D.

Exem-

EXEMPL. I. REG. III.			EXEMP. II. REG. IV.		
Addendi	2 4 3	A	*Addendi*	6 5 8	A
	5 2 6	B		8 7 4	B
Summa	7 6 9	C	*Summa*	1 5 3 2	C

EXEMP. III. REG. IV.		
Addendi	6 2 0 7	A
	9 0 0 8	B
Summa	1 5 2 1 5	C

EXEMP. IV. REG. V.			
flor.	*gr.*	*groff. crucif.*	
15	14	2	A
9	18	2	B
Sum. 25 *fl.*	13 *gr.*	1 *xr.*	C

SCHOLION I.

34. *In exemplo quarto in serie cruciferorum scriptus reperitur tantum unus crucifer, quia quatuor cruciferi faciunt unum grossum & unum cruciferum, ideo tres crucif. seu* grossus, *additus est classi grossorum; item, quia ex classe grossorum, addita summa emergit* 33. *grossorum*, 20. *autem grossi faciunt* florenum Ger. *unum, ideo scribendi tantum sunt* 13. *grossi, &* 20. *grossi, seu* florenus *addendus classi florenorum, unde floreni emergunt* 25.

SCHOLION II.

35. *Eadem methodo adduntur quicunque alii numeri heterogenei reducibiles, ad quorum additionem prærequiritur notitia specierum tam superiorum, quam inferiorum in eodem genere. Sic si addendi sint* centenarii, libræ, lothones, *nosse debes, quod* 32. lothones *faciant* libram, 100. libræ, centenarium *&c. quorum notitia vel usu, vel ex aliorum libris, cumprimis ex Cl.* Jo.Mich.Poetii *Arith*, *item* Casp.Eisenschmidii Disquisit, Nova de Ponder. & Mensur. *comparanda erit, à quibus mutuatæ sunt tabellæ reductionum aliquæ* in Parte III. *adducendæ.*

SCHOLION III.

36. Examen *rite peractæ additionis sequenti capite IV.* §. 44. *ope subtractionis docebitur; nam reliquæ probæ omnes, puta per abjectionem 9 vel 7 ut vulgus Arithmeticorum docet, fallaces sunt, & erroneæ,*

quæ

quæ fallacia cuivis ad oculum exhiberi potest, si vel sola permutatio loci fiat in numeris summæ. Præterea circa additionem bina monenda veniunt: primo: *si nimis longa series addendorum occurrat, tutius operatio instituetur, si in partes aliquot longa hæc series per lineas dispescatur, & singularum partium summæ particulares in unam summam totalem colligantur.* Secundo: *si sursum eundo additio facta est, repetatur eadem eundo deorsum, & si summæ congruant, probabile est, summam inventam non esse erroneam;* momoraliter certum, *si à duobus facta additio in summa conveniat.*

CAPUT IV.

De Subtractione Numerica.

DEFINITIO XII.

37. *SUbtractio numerica* est totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel saltem totius æqualis ab æquali toto ablatio. Numerus minor dicitur *subtrahendus*, major *minuendus*, numerus, qui facta ablatione remanet, vocatur *residuum*, vel *differentia*.

COROLLARIUM I.

38. In subtractione itaque duæ tantum series numerorum requiruntur, una major, altera minor, vel saltem æquales.

COROLLARIUM II.

39. Quia subtractio est ablatio, sequitur numerum majorem, à minore non posse subtrahi, nisi minor augeatur saltem ad æqualitatem.

COROLLARIUM III.

40. Ad subtractionem quoque requiritur homogeneitas numerorum mixtorum.

PRO-

PROBLEMA III.

41. PROP. *Subtractionem numericam instituere, sive subtrahere numeros.*

RESOLUTIO.

I. Collocetur numerus minor ſub majore ita, ut unitates reſpondeant unitatibus, decades decadibus &c. quemadmodum in additione (§. 32.) dictum.

II. Sub hiſce numeris ducatur linea, ſicut in additione factum eſt.

III. Inchoetur ſubtractio à dextris ſiniſtram verſus, auferendo ſingillatim unitates minoris ab unitatibus majoris numeri, decades à decadibus &c. reſidua ſingula ſcribantur directe ſub linea infra illum numerum, cujus ſunt reſidua. *Vide exempl. I.*

IV. Si nota numerica inferior, ſeu ſubtrahenda, æqualis ſit ſuperiori, in loco reſidui ſcribatur zerus. (§. 10.) *Vide exempl. II.*

V. Si nota inferior major à ſuperiore minore, vel à zero veniat ſubtrahenda, aſſumatur in ſuperiore claſſe ex vicina eidem ſiniſteriore nota, una unitas, quæ unitas reipſa valet decem (§. 8.) & adjuncta numero minori, vel zero, fiat ſubtractio notæ inferioris à toto numero ſuperiore

jam

jam aucto una decade (§. 39.) numerus vero unitate mulctatus notetur puncto, quod in memoriam revocet, illum una unitate esse minorem. *Vide exempl. III.*

VI. Si in casu subtrahendæ notæ inferioris majoris à minore superiore, in loco numeri sinisterioris, unde concedenda esset unitas, reperiatur zerus, unitas hæc à numero proxime sequente zerum concedatur, quæ translata ad zerum cum illo facit 10, à quo jam aucto, unitas (quæ valet 10) iterum concedatur ad augendum numerum minorem superiorem. Notetur autem tam numerus unitate mulctatus, quam zerus puncto, ut intelligatur, zerum hujusmodi puncto notatum valere novem. *Vide exempl. IV.* Idem intelligendum, si in numero superiore plures zeri se ordine consequantur, hi enim transferendo concessam unitatem à numero illis proximo, omnes in novenarios mutantur. *Vide exempl. V.*

VII. Si zerus inferior à numero significante superiore veniat subtrahendus, pro residuo scribendus est superior. Si zerus à zero veniat subtrahendus scribatur in loco residui zerus. *Vide exemp. VI.*

VIII. Eædem regulæ servandæ sunt in subtractione heterogeneorum reducibilium, E. gr. flor. groff. crucif. inchoando

sci-

ſcilicet ſubtractionem à ſpecie minima; hoc ſolum notato, quod in caſu conceſſionis Reg. V. & VI. conceſſa unitas à ſpecie majore, tot valeat unitates, quot ſpeciei minoris in illa continentur; E. gr. Si pro claſſe crucif. ex groſſis unus concedatur, hic valet tres unitates, ſeu cruciferos; ſi unus flor. germ. concedatur ad claſſem groſſorum, ille valet 20. unitates, ſeu groſſos. *Vide exempl. VII.* ſed & hæ Regulæ vivam vocem requirunt.

DEMONSTRATIO.

42. Subtractio numerica, eſt totius minoris numeri, & homogenei à toto majore, vel totius æqualis à toto æquali ablatio (§. 37.) ſed *per reſolutionem hujus probl.* ſingulæ unitates minoris à ſingulis unitatibus majoris, decades à decadibus, &c. rite ablatæ ſunt, ergo facta eſt totius minoris numeri, & homogenei à toto majore ablatio, ergo facta ſubtractio numerica. Q. E. D.

PARADIGMA SUBTRACTIONIS.

Exemp. I. Reg. III.		Exemp. II. Reg. IV.	
A 87945		A 27842	
B 55432	*ſubtrab.*	B 3812	*ſubtrab.*
Reſid. 32513 C	*ſeu differunt.*	*Reſid.* 24030 C	
Prob. 87945 A		*Prob.* 27842 A	

RE-

EXEMP. III. REG. V.

A	86.05.2	
B	23438	*subtrab.*
Resid.	62614	C
Proba	86052	A

EXEMP. IV. REG. VI.

A	8.0.65.0.34	
B	4582482	*subtr.*
Resid.	3482552	C
Proba	8065034	A

EXEMP. V. REG. VI.

A	7.0.0.4.0.0.3	
B	5423658	*subtr.*
Resid.	1580345	C
Proba	7004003	A

EXEMP. VI. REG. VII.

A	9075	
B	4002	*subtrab.*
Resid.	5073	C
Proba	9075	A

EXEMP. VII. REG. VIII.

	flor.	*groſſ.*	*crucif.*	
A	24	12	1	
B	13	18	2	*subtr.*
Resid.	10	13	2	C
Proba	24	12	1	A

COROLLARIUM I.

43. Hinc proba *subtractionis* fit per *additionem*, si scilicet (ut factum est in omnibus exemplis) *subtrahendus* B addatur *residuo* C, prodire debet A, seu is numerus, à quo subtractum est; nam *residuum* C, tanquam *totum* continet omnes differentias unitatum, decadum &c. numeri majoris, & *subtrahendus* B continet pariter omnes partes subtractas unitatum, decadum &c. ejusdem numeri majoris (§. 41.) ergo *residuum* cum *subtrahendo* continet omnes partes numeri majoris, à quo *subtractio* facta est, ergo additæ adæquant numerum majorem (§. 25.)

CO-

COROLLARIUM II.

44. Examen itaque, ſeu proba additionis, quæ ſit erroris, & ſallaciæ expers, inſtituetur ope *ſubtractionis:* ſi enim in adducto (§. 33.) additionis exemplo I. hoc: à ſumma C ſubtrahatur numerus B, *qui eſt pars una ſummæ,* relinqui debet A numerus, *Pars altera* videlicet *ſummæ* C; ſi vero à ſumma C ſubtrahatur numerus A, relinqui debet numerus B. Eodem modo examen inſtituetur per reliqua additionis exempla ſuperius adducta.

	A 2 4 3	
	B 5 2 6	
Suma	7 6 9	C
Subtr.	5 2 6	B
Reſid.	2 4 3	A

SCHOLION.

45. *In idem recidit praxis quorundam Arithmeticorum, qui in caſu* Reg. V. & VI. (§. 32.) *adducto, dum nota major inferior, à minore ſuperiore, vel à zero ſubtrahenda venit, unitatem concedendam non in ſerie ſuperiore, ſed in inferiore, à vicina nota mutuantur, eamque puncto notatam, una unitate non imminutam, ſed auctam intelligunt.* E. gr. in exempl. III. Reg. V. (§. 42.) *adducto ſic operantur:* 8 à 2 ſubtrahi non poteſt, igitur concedo à vicino 3 unum, (id eſt, decem) & puncto ſigno, dicoque 8 à 12 auferendo manent 4. Deinde procedendo ad ſequentem notam 3 puncto ſignatam, dico 4 (non 3) à 5 manet 1. porro 4 à 0 ſubtrahi non poteſt, ergo concedo à vicino 3, unum, & puncto ſigno, ajoque 4 à 10 auferendo manent 6. Deinde propter numerum 3 puncto ſignatum, dico 4 à 6 manent 2, & denique 2 ab 8 manent 6. *Quæ praxis etſi erroris expert ſit, noſtram tamen (§. 41.) traditam, huic præferendam eſſe, facilitas operandi, maxime cum zeri complures occurrunt, edocet.*

	8 6 0 5 2	A
Subtr.	2 3. 4 3. 8	B
Reſid.	6 2 6 1 4	C

CAPUT V.

De Multiplicatione Numerica.

DEFINITIO XIII.

46. *Multiplicatio numerica* eſt dati alicujus numeri toties ad ſeipſum facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet. E. gr. *Multiplicatio* numeri 6 per numerum 3, eſt numerum 6 ter ſumptum (tres enim unitates continet numerus 3) ſibimet addere; nempe: 6, & 6, & 6 faciunt 18.

DEFINITIO XIV.

47. Numeri dati inter ſe multiplicandi vocantur *factores*, vel *efficientes*. Sic in exemplo (§. 46.) *factores* ſunt: 6 & 3, horum primus vocatur *multiplicandus*, ſecundus, *multiplicans*, vel *multiplicator*, & viciſſim. *Iterata* vero hujusmodi *additio*, vocatur *ductus* unius numeri in alterum. Summa ex *ductu* reſultans, vocatur *factum*, aut *productum*, ut in dato exemplo: ſumma 18 vocatur *factum*, ex *factoribus* 6 & 3 in ſe ductis, reſultans.

COROLLARIUM.

48. Hinc *multiplicare*, eſt ducere unum *factorem* in alterum *factorem*, ut inveniatur *factum*, in quo unus *factorum* toties contineatur, quot unitates habet alter *factor*. Sic in *facto* 18, *factor* 6 continetur ter, quia alter *factor* 3, continet tres unitates.

THE-

THEOREMA I.

49. PROP. *Quando duo numeri invicem multiplicantur, idem factum prodire debet, ſive primus in ſecundum, ſive ſecundus in primum ducatur.*

DEMONSTRATIO.

Reſolvantur *factores* E.gr. 6 & 3 in ſuas unitates, & eo ordine collocentur, quem figura exhibet:

```
  1 1 1 1 1 1
3 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1
       6
```

Jam in hac figura, ſeu ſex unitates per tres lineas ſcriptas, ſeu tres unitates deorſum per ſex lineas ſcriptas computes, idem numerus 18 prodibit, ut patet ad oculum; igitur ſeu 3 *multiplicentur* per 6, ſeu numerus 6 multiplicetur per 3, idem factum producunt. Q. E. D.

SCHOLION.

50. *Quia tyrones difficultatem magnam ſentiunt in actuali multiplicatione, inveniendi facta particularia ſingularum notarum in ſingulas ductarum*, E. gr. *ſi quærant* factum *ex 9 in 7, ſeu ſepties novem quot ſunt? idcirco ex binis adminiculis alterutrum illis diſcendum erit, vel Reg.* Pigri, *quæ oretenus docebitur, vel* Tabula Pythagorica *ſemper ante oculos habenda, cujus conſtructionem, & uſum ſequentia Problemata edocent.*

PROBLEMA IV.

51. PROP. *Tabulam Pythagoricam construere.*

RESOLUTIO.

Fiant cellulæ quadratæ tot, quot ſequens figura exhibet, & ordine eodem.

TABULA PYTHAGORICA.

	M	*b*								
a	1	2	*b*							
a	2	4	3	*b*						
a	3	6	9	4	*b*					
a	4	8	12	16	5	*b*				
a	5	10	15	20	25	6	*b*			
a	6	12	18	24	30	36	7	*b*		
a	7	14	21	28	35	42	49	8	*b*	
a	8	16	24	32	40	48	56	64	9	K
a	9	18	27	36	45	54	63	72	81	*b*
	N	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	

Videlicet I. ordo primus *a b* habeat duas cellulas, ſecundus *a b* tres, tertius *a b* quatuor &c. in primis novem cellulis M, N, ex parte ſiniſtra ſcribantur ordine deorſum 1, 2, 3 &c. usque ad 9.

II. Eodem modo in octo cellulis lineæ M, K, ad dextram, deorſum progrediendo, ſcribantur numeri 2, 3, 4 &c. usque ad 9.

III. In-

III. Inſcribantur facta particularia, quæ fiunt per ſolam additionem (vide cellulas *b d*) in prima ad ſiniſtram ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 2, ut *factum* habeatur in ſequente ejuſdem ſeriei cellula inſcribendum, addantur 2 ad 2 & ſumma 4 inſcribatur cellulæ ſecundæ, ſeriei *b d*; huic numero 4 addatur iterum ſupremus numerus 2, erit ſumma 6, numerus tertiæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; huic numero 6 addatur iterum ſupremus 2, erit ſumma 8, numerus quartæ cellulæ in eadem ſerie *b d*; & ſic addendo numerum 2 ad numerum 8, erit ſumma 10, numerus quintæ cellulæ; ad 10 addendo 2, erit ſumma 12, numerus ſextæ cellulæ; ad 12 addendo iterum 2, erit ſumma 14, numerus ſeptimæ cellulæ; ad 14 iterum addendo 2, erit ſumma 16, numerus octavæ cellulæ; ad 16 addendo iterum 2, erit ſumma 18, numerus nonæ ſeu ultimæ cellulæ, primæ ſeriei *b d*. Eodem modo operatio inſtituatur in ſecunda ſerie *b d*, in qua ſupremam cellulam occupat numerus 3; pro numero itaque ſecundæ cellulæ, addatur numerus 3 ſibimet ipſi ter, id eſt 3 & 3 & 3 ſunt 9, pro numero tertiæ cellulæ, addatur numero 9 numerus 3, & ſumma 12 inſcribatur tertiæ cellulæ. Atque hac methodo progrediendum erit cum cæteris, donec omnes cellulæ in Tabula impleantur.

PRO-

PROBLEMA V.

52. PROP. *Usus Tabulæ Pythagoricæ.*

RESOLUTIO.

Sint multiplicandi intra se 8 & 6. Igitur regula universalis esto: Numerum ex datis majorem *E. gr.* 8 quære in parte sinistra cellularum M, N, minorem 6 in dextra cellularum M, K, communis concursus dabit cellulam, in qua reperies numerum 48, seu *factum* ex 6 in 8; hæc regula continetur his versiculis memoria mandandis:

Lævâ majorem, *sed dextrâ quære* minorem,
Cellula communis, quod petis, illa dabit.

PROBLEMA VI.

53. PROP. *Numerum quemcunque per quemvis alium multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si multiplicans constet una nota numerica*

I. Scribatur numerus *multiplicandus*, & infra ejus dextimam notam scribatur *multiplicans*.

II. Subducantur lineâ.

III. Inchoando à dextris per *multiplicantem*, multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* ope Tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ pigri.

IV. *Producta* singula ſcribantur infra lineam inchoando à dextris ſiniſtram verſus.

V. Si productum ex *multiplicante* in aliquam notam *multiplicandi* excreſcat ultra novem, ſeu in ejusmodi numerum, qui duabis notis ſcribendus foret, ſcribatur tantum nota dextima (*ut in additione dictum*) & altera ſiniſtima mente retenta, addatur producto novo, orto ex multiplicatione notæ ſequentis. *Vide exempl. I.*

CASUS II. *Si multiplicans conſtet duabus, vel pluribus notis.*

I. Scribatur *multiplicans* infra *multiplicandum* à dextris ſiniſtram verſus, ita, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. reſpondeant. Quemadmodum in additione (§. 32.) dictum.

II. Subducantur lineâ.

III. Inchoando à dextris ſiniſtram verſus per dextimam *multiplicantis* notam, multiplicentur (*ope tabulæ Pythagoricæ, vel regulæ Pigri*) omnes notæ *multiplicandi*, & infra lineam ſcribantur, ut in caſu I. dictum.

IV. Eodem modo; per ſecundam *multiplicantis* notam multiplicentur omnes notæ *multiplicandi*, ut prius, id ſolum notetur: quod initium ſcribendorum productorum fieri debeat ſub ſecunda nota *multiplicantis*.

V. Peracta multiplicatione, addantur facta partialia in unam summam, ut habeatur totum productum. *Vide exemplum II.*

VI. Et universaliter: *si multiplicans* contineat plures notas; multiplicentur omnes notæ *multiplicandi* per singulas notas *multiplicantis*, à dextris sinistram versus, producta vero scribantur infra lineam ea lege, ut initium scribendi fiat semper infra eam notam *multiplicantis*, per quam multiplicatio inchoatur, & facta partialia in unam summam addita, dabunt productum totale. *Vide exempl. III.*

DEMONSTRATIO.

54. *Multiplicandus* in facto toties per datas regulas sibimet ipsi additus est, quot unitates habet *multiplicans*, ergo *multiplicandus* toties continetur in facto, quot unitates habet *multiplicans* (§. 48.) igitur per has regulas factum est, quod petebatur. Q. E. D.

PARADIGMA MULTIPLICATIONIS.

EXEMP. I. CASUS I.

Factores	*Multiplicandus*	68473
	Multiplicans	2
	Factum	136946

EXEMP. II. CASUS II.

Fact.	*Multipl.*	875464
	Multipl.	36
	Facta	5252784
	Partialia	2626392
	Factum	31516704

Ex-

EXEMPLUM III. CASUS II. REGULA VI.

	43756 *multiplicandus*	*Factores.*
	9284 *multiplicans*	
Facta	175024	
partialia	350048	
	87512	
	393804	
	406230704 *factum totale.*	

COROLLARIUM I.

55. Eodem modo peragitur multiplicatio numerorum *mixtorum heterogeneorum reducibilium*, modo vel ad ſpeciem minimam prius reducantur, vel ſi prius non reducuntur, tunc, ſi factum inferioris ſpeciei adæquet ſpeciem ſuperiorem, factum ſpeciei inferioris ad productum ſpeciei ſuperioris addendum ſit. *E. gr.* Sint multiplicandi 5 fl. germ. 13 gr. 2 cruc. per numerum 4, erunt reducti (per Tab. in Parte III. pecuniæ germ.) ad crucif. 341, qui per 4 multiplicati dant factum 1364 crucif. ſi vero non reducantur, operatio ſic abſolvetur, ut appoſitum exemplum docet.

flor.	*groſſ.*	*cruc.*
5	13	2
		4
22 *fl.*	14 *gr.*	2 *xr.*

COROLLARIUM II.

56. Si in fine unius factoris, vel utriusque ſimul, occurrant *zeri*, multiplicatio inſtituitur tantum per notas ſignificantes, & in fine producti totalis adſcribuntur tot *zeri*, quot erant in fine factorum. Si vero in loco intermedio *multiplicántis* occurant *zeri*, omiſſis iis, multiplicatio peragitur per ſignificantes, ſervata tamen Reg. IV. & VI. Caſus II. ut ſervetur ordo ſubſcribendi facta partialia.

COROLLARIUM III.

57. *Examen* rite peractæ multiplicationis fit per divisionem *cap. sequenti* docendam: si nempe factum totale dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum.

CAPUT VI.

De Divisione Numerica.

DEFINITIO XV.

58. *Divisio numerica* est numeri minoris à majore toties facta subtractio, quoties minor in majore continetur. E. gr. *Divisio numeri 6 per numerum 3, est numerum 3 bis subtrahere à numero 6, quia numerus 3 bis in numero 6 continetur.*

DEFINITIO XVI.

59. Numerus major vocatur *dividendus*, minor appellatur *divisor*; numerus indicans quoties minor in majore continetur, vocatur *quotus*, vel *quotiens*; ut in dato supra exemplo: numerus 6 est *dividendus*, numerus 3 est *divisor*, numerus 2 indicans quoties 3 in 6 continetur, est *quotus*, vel *quotiens*.

COROLLARIUM I.

60. Itaque *dividere*, est quærere numerum (*quotum*) qui indicet quoties numerus minor (*divisor*) continetur in majore (seu *dividendo*); & hinc signum recte inventi *quoti* est, si *divisor* toties contineatur in *dividendo*, quoties *unitas* in *quoto*.

CO-

COROLLARIUM II.

61. Cum *quotus* indicet numerum, quoties minor à majore ſubtractus ſit (§. 58.), ſi numerus minor, ſeu *diviſor* multiplicetur per *quotum*, id eſt, toties ſibimet ipſi addatur, quot unitates habet *quotus* (§. 46. & 48.) debet *factum* reſtituere majorem, ſive *dividendum*.

COROLLARIUM III.

62. Ex (§. 60.) conſtat, recte etiam definiri *diviſionem*; quod ſit *Partitio numeri majoris in tot partes, quot unitates continet minor*; *quotus* vero indicat unam hujusmodi partem. Hinc diviſione utendum, dum totum aliquod in datas partes diſtribuendum, aut partiendum eſt. *E. gr.* Si 24 flor. in 8 homines æqualiter diſtribuendi ſunt, per diviſionem reperietur *quotus* 3 floreni, qui unam ex 8 partibus indicant partem, dandam ſingulis ex 8 hominibus. Patet quoque (ex §. 35.) cum diviſio ſit repetita unius numeri ab alio ſubtractio, *diviſorem* debere eſſe minorem *dividendo*, vel ſaltem æqualem.

PROBLEMA VII.

63. Prop. *Uſus Tabulæ Pythagoricæ* (§. 51.) *ſi diviſor conſtet una nota numerica.*

Resolutio.

In parte *dextra* tabulæ quæratur nota *diviſoris*, & hac reperta deſcendendo in eadem ſerie exquiratur in aliqua cellularum *dividendus*, vel ei proxime minor numerus, & correſpondens eidem cellulæ in ſerie *ſiniſtima* numerus, erit quotus quæſitus.

ſitus. *E. gr.* Sit *dividendus* 32, per *diviſorem* 4; reperto in parte dextra numero 4, invenietur (deſcendendo in eadem ſerie) cellula numeri 32, cui correſpondens numerus 8 in ſerie *ſiniſtima*, erit *quotus* quæſitus; nam multiplicando diviſorem 4 per quotum 8, factum 32 reſtituit dividendum (§. 61.) *Idem uſus Tabulæ Pythagoricæ eſt*, ſi diviſor conſtet pluribus notis numericis. *Ut patet, ex regul. III. casûs II. Probl. ſequent.*

PROBLEMA VIII.

64. PROP. *Dividere numerum datum quemvis majorem per datum alium minorem.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si diviſor conſtet una nota numerica.*

I. Infra notam dividendi ſiniſtimam (ſi ea major ſit, quam nota diviſoris, aut ſaltem notæ diviſoris æqualis) ſubſcribatur diviſor. *Vide exempl. I.* Si vero nota ſiniſtima dividendi minor ſit, quam nota diviſoris, ſcribendus erit diviſor ſub ſecunda nota ſiniſtima *dividendi. Vide exemp. II.*

II. Formetur ad latus dextrum dividendi *lunula*, ſeu hoc (Signum, pro loco ſcribendi *quoti.*

III. Ope Tabulæ Pythagoricæ Methodo (§. 63.) tradita, inveſtigetur quoties di-

diviſor contineatur in nota, vel notis dividendi ſupraſcriptis diviſori, & quotus inventus ſcribatur poſt lunulam.

IV. Per hunc quotum multiplicetur diviſor, factum ſive productum exacte ſcribatur ſub nota, vel notis dividendi iisdem, cum quibus actu operatio exercetur.

V. Ducta linea infra hoc ipſum productum ex multiplicatione diviſoris per quotum enatum, ſubtrahatur à nota, vel notis dividendi hoc productum, & ſi quid remanet ex ſubtractione, infra lineam ductam ſuo loco ſcribatur reſiduum.

VI. Deponatur ſequens dividendi nota ad notam reſidui ex priori operatione relicti dextram verſus; aut ſi nihil remanſit, ſola nota dividendi deponatur infra lineam ductam, cui denuo ſubſcribatur diviſor, nota vero in *dividendo* eadem, quæ depoſita eſt, *commate* vel *virgula* ſignetur, ad evitandum errorem, ne ſecundo deponatur.

VII. Cum his notis iterum inquiratur *per regulam III.* in quotum, & quotus inventus ſcribatur poſt lunulam ad prioris quoti latus dextrum; deinde *per reg. IV. diviſor* cum hoc recenter invento *quoto* multiplicatus, & ſubſcriptus, ſubtrahatur *per regul. V.* quo facto iterum deponatur ſequens ex dividendo nota, & operatio *per*

re-

regulas III. IV. & V. repetatur cum residuis dividendi notis usque ad ultimam notam inclusive. *Vide exempl. I. & II.* Si quid ex subtractione ultima remanet, scribatur per modum *fractionis*, id est: ad partem dextram quoti ducatur lineola, supra quam scribatur numerus *residuus*, infra vero lineolam scribatur *divisor. Vide exempl. II.*

CASUS II. *Si divisor constet pluribus notis numericis.*

I. In subscribendo divisore infra dividendum servetur eadem *regula I. casus I.* attendendo scilicet ad sinistimam notam tum *dividendi*, tum *divisoris*.

II. Eodem modo observetur *reg. II. casus I.*

III. Inquiratur ope tabulæ Pythagoricæ (§.63.) quoties sinistima divisoris nota contineatur in sinistima, vel sinistimis dividendi notis, & quotus repertus scribatur post lunulam, ut in *reg. III. casus I. dictum.*

IV. Per hunc quotum multiplicentur *omnes notæ* divisoris, & videatur, an hoc productum non sit majus, quam notæ dividendi supra divisorem scripti; quod si majus reperiatur hoc productum, signum est, *quotum* esse magnum respectu totius divisoris, & hinc una, vel duabus unitati-

bus

bus minuendum, donec productum ex quoto in divisorem, vel sit æquale, vel proxime minus notis *dividendi.*

V. Subtrahatur hoc productum à notis dividendi supra scriptis divisori (videatur deinde an residuum non sit majus ipso *divisore*, tali enim casu augendus esset quotus una, vel duabus unitatibus, cum signum sit nimis parvi quoti) deinde ex dividendo deponatur ad residuum (si quod remansit) una nota, ac subscripto divisore toto, iterum *per reg. III. & IV. hujus casûs*, inquiratur in novum *quotum*, deinde *per reg. V.* ad inventum residuum deponatur iterum una nota *dividendi*; atque sic procedatur usque ad ultimam notam dividendi *inclusive. Vide exemp. III.* Si quid ex ultima subtractione remanet scribatur per modum fractionis, ut in *reg. VII. casûs I. dictum est.*

SCHOLION.

65. *Quod si in operatione* reg. VII. casûs I. *&* reg. V. casûs II. *residuum cum deposita nota dividendi minus sit, quam* divisor, *scribatur post lunulam* zerus, *& ex dividendo adhuc una nota ad hoc residuum deponatur, quod si adhuc* divisor *major esse deprehendatur, iterum scribendus erit* zerus *post lunulam, & deponenda adhuc una nota ex* dividendo, *donec residuum sic auctum, majus sit ipso divisore, vel saltem eidem æquale, ut dividi possit.* Vide exempl. IV. Secundo: *Divisio heterogeneorum reducibilium eadem methodo exercetur, si prius ad speciem minimam reducantur.* Vide Partem III.

DEMONSTRATIO.

66. CASUS I. Ex ipsa operatione per has regulas liquet; *quotum* inventum indicare quoties *divisor* contineatur in singulis millenariis, centenariis, decadibus & unitatibus, hoc est, in toto *dividendo* (§. 25.) consequenter unitas in *quoto* toties continetur, quoties *divisor* in *dividendo* (§. 60.) ergo per has regulas recte peracta habetur divisio. Q. E. D. *Eadem est demonstratio casus II.*

PARADIGMA CASUS I.

EXEMPLUM I.

Positiones.		*quoti*
I. *Divid.*	5,6,9,4,6	28473
Divisor	2	
fact. subt.	4	
II. *Divid.*	1 6 . . .	
Divisor	2 . . .	
fact. subt.	1 6 . . .	
III. *Divid.*	- - 9 . .	
Divisor	2 . .	
fact. subt.	8 . .	
IV. *Dividend.*	1 4 .	
Divisor	2 .	
factum subt.	1 4 .	
V. *Dividend.*	- - 6	
Divisor	2	
factum subtr.	6	
ultimum resid.	0	

EXEMPLUM II.

Positiones.		*quoti*
I. *Divid.*	2 6,9,4,8	$8982\frac{2}{3}$
Divisor	3 . . .	
fact. subt.	2 4 . . .	
II. *Divid.*	2 9 . .	
Divisor	3 . .	
fact. subt.	2 7 . .	
III. *Divid.*	2 4 .	
Divisor	3 .	
fact. subt.	2 4 .	
IV. *Divid.*	- - 8	
Divisor	3	
fact. subt.	6	
Residuum ultim.	2	

PA-

PARADIGMA CASUS II.

EXEMPLUM III.

I. *Divid.*	1 3 8 9,3,8,	*quoti* 547
Divisor	2 5 4 . .	
fact. sub.	1 2 7 0 . .	
II. *Divid.*	1 1 9 3 .	
Divisor	2 5 4 .	
fact. sub.	1 0 1 6 .	
III. *Divid.*	1 7 7 8	
Divisor	2 5 4	
fact. subtr.	1 7 7 8	
Resid. ultim.	0 0 0 0	

EXEMPLUM IV.

I. *Divid.*	3 2 6 7,8,3,	*quoti* 602 $\frac{499}{542}$
Divisor	5 4 2 . .	
fact. sub	3 2 5 2 . .	
II. *Divid.*	- - 1 5 8 .	
Divisor	5 4 2 .	
III. *Divid.*	1 5 8 3	
Divisor	5 4 2	
fact. subtr.	1 0 8 4	
Resid. ultim.	4 9 9	

SCHOLION I.

67. Examen *rite inventi quoti*, *seu bene peractæ divisionis est*, *si* quotus *multiplicatus per* divisorem, & *addito ad factum residuo* (*si quod superfuit*) *restituat exacte* dividendum (§. 61.) *hinc in* exemplo I. quotus 28473, *multiplicatus per* divisorem 2, *producit factum* 56946, *qui numerus idem est cum* dividendo. *Item in* exemplo II. quotus 8982 *multiplicatus per* divisorem 3, *facit* 26946, & *cum addito ex divisione residuo* 2, *facit* 26948, *qui erat* dividendus.

SCHOLION II.

68. *Methodum hanc nostram dividendi per positiones particulares*, (*ut exempla docent*) *præferendam esse modo dividendi*, *quem vulgus Arithmeticorum* & *adhibet*, & *tyrones suos edocet* (*in quo tyrones jubentur* : Residuas ex facta subtractione notas superscribere notis dividendi iis, à quibus remanent) *nemo non videt* ; *præterquam enim*, *quod ex hujusmodi residuis turritim supra dividendum congestis*, & *per lituras commaculatis*, *confusio non levis*, & *hinc difficultas non exigua*, *præsertim tyronibus*, *inoperando oriatur*; *si operantem errare contingat*, *is errorem hunc*, *peractâ divisione per examen* (§. 67.) *detectum*, *corrigere nequit*,

nuit, nisi totam operationem non sine tædio repetat; è contra in nostra methodo, & confusio evitatur, unde error præsertim in quoto, non facile admittitur, & si admissus foret, in particulari sua positione illico reperitur, & denique demonstrativa divisionis natura (§.58.) *ad oculum patescit.* Placuit exempli gratia subjicere oculis tyronum *exemplum nostrum III.* in formam divisionis vulgaris redactum.

```
   17
  1197
1383938(547
  28444
 1270
   25
  1016
    25
   1778
```

SCHOLION III.

69. *Tyrones admonitos volo, sequentia* Corollaria *familiaria sibi reddant, in quibus, & erroris evitatio docetur, & compendia utilia ex regulis, & ex exemplis supra* (§.64, 65, & 66.) *traditis, deducuntur, & denique dubia in particularibus operationibus occurrentia resolvuntur.*

COROLLARIA.

Ad facilitandum Tyronibus usum divisionis ex datis regulis, & exemplis deducta.

70. Ex contemplatione datorum supra exemplorum, liquet *primo*: tot notas habere *quotum totalem* peracta divisione tota, quot fuerunt positiones particulares divisoris, quas in adductis exemplis denotant numeri marginales I, II, III, &c. liquet *secundo*: tot quoque habere notas *quotum totalem*, quot notæ restant in *dividendo* (facta videlicet rite prima subscriptione divisoris) quibus nulla *divisoris* nota subscripta est, una cum adjuncta nota quoti emergendi ex prima subscriptione; sic in *exemplo I.* quotus totalis habet *quinque* notas, quot nempe fuerunt positiones particulares designatæ per I, II, III, IV, V. Et in *eodem exemplo I.* ex prima subscriptione *divisoris* 2. quatuor restant in dividendo notæ, quibus addita nota primæ positionis, simul efficiunt *quinque* notas, & tot etiam habet notas *quotus totalis.*

71. II.

71. II. In positionibus particularibus, *quotus particularis* nunquam potest esse major, quam 9.

72. III. Quando in *casu II. problematis VIII.* inquiritur, quoties sinistima *divisoris* nota, in sinistima, vel sinistimis notis *dividendi* contineatur; videatur simul, an reliquæ notæ *divisoris*, toties etiam in sibi superscriptis notis *dividendi* contineantur. Facit hæc animadversio, ne *quotus particularis* justo major accipiatur. *Vide I. positionem exempli III. casus II.* ubi in *dividendo* : 1389 ; *divisoris* : 254, nota sinistima 2, in 13 continetur quidem sexies, sed quia 5 in 8 ; & 4 in 9, non continetur sexies, ideo 2 in 13 non sexies, sed quinquies (ut, *prima nota quoti docet*) acceptum est.

73. IV. Si contingat *factum particulare* ex *quoto* in *divisorem* esse *majus*, quam *dividendum particularem*; signum est, *quotum particularem* esse justo *majorem* acceptum; atque adeo, una, vel duabus unitatibus *minuendum*; & per *minutum quotum* repetendam esse multiplicationem *divisoris*, donec factum subtrahendum, aut æquale sit *dividendo particulari*, aut *illo* proximè *minus*. *Vide reg. IV. casus II.*

74. V. Si facta subtractione, ex dividendo particulari *residuum* maneat *majus*, quam *divisor*, signum est, *quotum particularem* esse *parvum*, adeoque *augendum* una, vel duabus unitatibus, & facta per *auctum quotum* multiplicatione *divisoris*, novum factum resultans esse subtrahendum *à dividendo*. *Vide reg. V. casûs II.*

75. VI. Si *divisor* habeat in fine *zeros*, possunt (compendii gratia) his ex *divisore* abscissis, rescindi etiam totidem notæ dextimæ in *dividendo*; & cum reliquis tam *dividendi*, quam *divisoris* notis, institui potest operatio, sed *notandum*:

dum: quod peracta tota divisione, abscissæ notæ dividendi, una cum ultimo residuo (si quod fuit) scribi debeant per modum fractionis, subscripto toto *divisòre*, ut *monet Reg. VII. casus I.* Sic, si *dividendus* foret 857,32: per *divisorem* 3,00; abscissis duobus zeris *divisòris*, & duabus ultimis notis *dividendi* 32, (ut adjecta commata notant) essent tantum *dividendi* 857, per *divisorem* 3, ex qua divisione *quotus totalis* emergit: $285 \frac{232}{300}$.

76. VII. Si tam *divisor*, quàm *dividendus* habeant in fine *zeros numero æquales*, iis utrinque simpliciter deletis, cum reliquis notis tantum operatio instituatur. Sic, si *dividendus* sit: 435.000, per *divisorem*: 24,000, abscissis utrimque *zeris tribus*, erit *dividendus*: 435, per *divisorem*: 24. *Hujus compendii ratio habitur* in Algebra. *Secundo*: Si in fine *dividendi* plures sint *zeri*, quam in fine *divisoris*; tali casu, tot tantum in *dividendo*, quot in *divisore* deleri possunt, nec plures; ita, si *dividendus* foret: 8920,00, per *divisorem*: 356,00; abscissis utrinque *duobus zeris*, (nam tot in *divisore* reperiuntur) erit *dividendus*: 8920; per *divisòrem*: 356. *Tertio*: Si *dividendus* habeat quidem *zeros in fine*, non item *divisor*; tali casu, nec in *dividendo*, nec in *divisore* quidquam rescindi potest. *Notandum*: in hoc corollario tantum agi de *zeris finalibus*, non verò de *intermediis*, seu positis inter notas significantes. Sic, si foret *dividendus*: 320024 per *divisorem*: 2003; integri permaneant, est necesse.

77. VIII. Sicut *unitas* non multiplicat, ita etiam *unitas* non dividit. Hinc, si *divisoris* nota sinistima sit 1, & reliquæ notæ omnes sint *zeri*, peracta habebitur divisio, si ex *dividendo*

tot

tot notæ dextimæ abſcindantur (per §. 75.) quot ſunt *zeri* in *diviſore*. & *quotus* erit abſciſſæ illæ ſiniſtimæ notæ *dividendi*. Ex abſciſſis vero dextimis *dividendi* notis ſignificantibus fiat *fractio*. Sic, ſi *dividendus* foret: 367,245, per 1000; erit *quotus*: $367\frac{245}{1000}$

78. IX. Quotus particularis (in quo inveniendo tota conſiſtit difficultas *diviſionis*) facilè invenitur, ſi per *quotum particularem* circiter acceptum, multiplicentur *mentaliter* primæ ſiniſtimæ notæ diviſoris, & videatur, an ſumma reſultans non ſit major, quam ſupraſcriptæ *dividendi* notæ.

SCHOLION.

79. *Etſi plura ſuperſint diviſionis* compendia, *&* praxes, *has inſinuaſſe ſufficiat tyroni, ex quibus ad cætera facile datur gradus. Praxim tamen dividendi per ſolam ſubtractionem (quam primo loco docendi erat animus) ſubjungere placet, quæ uti definitionem* diviſionis *à nobis* (§. 58.) *datam, claram facit, ita, ſi per* diviſorem *ex multis notis numericis* compoſitum, *operatio occurrat, diviſionem, Methodo & facili, & certa, & admodum compendioſa per ſolam ſubtractionem abſolvit. Sit igitur:*

PROBLEMA IX.

80. Prop. *Diviſionem per iteratas ſubtractiones numeri minoris à majore abſolvere.*

Constructio Tariffæ.

Ante operationem; ex diviſore dato fac multipla omnia usque ad noncuplum; quæ hac ratione facile obtinentur per ſolam additionem; (*Vide Tariff. fol.40.*)

 I. Scri-

I. Scripto ad latus aliquod extra dividendum *diviſore* A, (ut in *Tariffa poſitum vides*) ducatur ad latus dextrum hujus diviſoris *linea* deorſum, poſt hanc lineam è regione *diviſoris ſcribatur numerus 1.*

II. Multiplica diviſorem per 2, vel (quod idem eſt) addatur ad ſeipſum diviſor, & factum B ſcribatur infra eundem diviſorem, è regione vero illius poſt lineam ſcribatur numerus 2.

III. Huic facto B addatur primus diviſor A, & habebitur numerus C, cui poſt lineam reſpondeat numerus 3. Huic numero C addatur iterum diviſor A, & habebitur numerus D, cui poſt lineam adſcribatur 4. Huic numero D addatur iterum diviſor A, & habebitur numerus E, cui poſt lineam correſpondeat 5. Huic E addatur iterum diviſor A, & obtinebitur numerus F, cui poſt lineam adſcribatur 6. Huic numero F addatur iterum diviſor A, & obtinebitur numerus G, cui poſt lineam reſpondeat 7. Huic numero G addatur iterum diviſor A, & habebitur numerus H, cui poſt lineam adſcribatur 8. Denique numero H additus diviſor A, producit numerum I, cui poſt lineam reſpondeat 9. Multipla hæc eo ordine expreſſa, vocantur uno nomine: *Tariffa.*

RE-

RESOLUTIO.

I. Facta rite prima ſubſcriptione diviſoris infra dividendum, ut (§. 64.) dictum, videatur quinam numerus ex *Tariffa*, aut *æqualis*, aut proxime *minor* ſit omnibus notis dividendi ſupra diviſorem ſcriptis; quo reperto, ſubſcribatur is infra dividendi notas, numerus vero in *Tariffa* poſt lineam eidem numero reſpondens, in loco quoti ſcribatur; ut factum vides in *exemplo ſubjuncto in 1. poſitione ſub lit.* D.

II. Subſcriptus ex *Tariffa* numerus D, ſubtrahatur à dividendo, & ad reſiduum (ſi quod eſt) deponatur iterum una nota ex *dividendo.* ut (§. 64. reg. VI.) dictum. *Vide in exemplo ſubjecto* poſitionem II.

III. Videatur iterum, quisnam ex *Tariffa* numerus reſpondeat proxime *minor*, vel *æqualis* huic reſiduo aucto unâ notâ *dividendi*, & repertus, ſubſcribatur reſiduo aucto, ac ſubtrahatur; numerus vero in *Tariffa* poſt lineam eidem reſpondens, in loco quoti ſcribatur. Atque ſic procedendum erit in omnibus poſitionibus usque ad ultimam dividendi notam depoſitam. *Vide exemplum ſubjectum in numeris parvis exhibitum* in gratiam tyronum.

DEMONSTRATIO.

Conſtructio *Tariffæ*, ſeu multiplorum diviſoris, patet ex (§. 46.) reſolutio vero liquet, ex (§. 58. & 81.)

Exemplum diviſionis ope ſubtractionis iteratæ factum.

TARIFFA.

	quoti
A — 34	1 — k
B — 68	2 — l
C — 102	3 — m
D — 136	4 — n
E — 170	5 — o
F — 204	6 — p
G — 238	7 — q
H — 272	8 — r
I — 306	9 — s

RESOLUTIO.

I. *Dividend.*	16.4,9,4,0,8,	n r o k l / 4 8 5 1 2
Diviſor	34	
D *ſubtrab.*	136	
II. *Reſid. auct.*	289 . . .	
H *Subtrab.*	272 . . .	
III. *Reſid. auct.*	174 . .	
E *ſubtrab.*	170 . .	
IV. *Reſid. auct.*	- 40 .	
A *ſubtrabend.*	- 34 .	
V. *Reſid. auct.*	- - 68	
B *ſubtrabend.*	- - 68	
	00	

COROLLARIUM.

51. Hinc liquet I. diviſionem numericam recte definitam eſſe (§. 58.) quod ſit *numeri minoris à majore toties facta ſubtractio, quoties minor in majore continetur.* II. Patet, per hanc dividendi methodum, certum ſemper obtineri quotum particularem. III. Liberum eſſe operantem a multiplicatione facienda. Et hinc IV. patet, fieri poſſe diviſionem abſque notitia regularum multiplicationis, & abſque tabula Pythagorica, aut regula pigri, modo operans ſciat *addere*, & *ſubtrahere*. V. Conſtat, ſi diviſor ſit admodum magnus, hac methodo operantem

mul-

multo citius, & certius absolvere divisionem, quam *methodo ordinaria* exercitatissimus etiam Arithmeticus persolvere queat.

SCHOLION.

82. *Hæc erant quæ summatim ad captum tyronum* (*omissis interea de natura numerorum theorematibus sublimioribus*) *tractanda censuimus; ex quibus apparet reipsa duabus tantum operationibus*, additione & subtractione *omnes Arithmeticæ Algorithmos absolvi, nec enim numerus alias mutationes subire potest, quam, vel ut fiat* major, (*quod fit* addendo) *vel* minor, *quod fit* subtrahendo. *Jam ordo postularet agendi de fractionibus vulgaribus, quas* (*quia hæ faciliore longe methodo in Algebra demonstrantur*) *ad calculum literalem reservamus, & harum loco in parte secunda hujus Arithmeticæ*, Logisticam Decimalem Geometricam *praxi Geometricæ, & Experimentis in Philosophia naturali tum instituendis, tum explicandis summe necessariam, exponemus.*

FINIS PARTIS I.

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS II.

DE LOGISTICA DECIMALI, SEU *De quatuor Speciebus Arithmeticæ decimalis Geometrarum.*

Arithmetica decimalis Geometrarum, quam alii nomine *fractionum decimalium* appellant, à quibusdam in Geometria, cujus ope calculos suos Geometræ faciunt, ab aliis post doctrinam fractionum vulgarium tractanda suscipitur. Nos ordinem doctrinæ naturalem sectantes, eam nec Geometriæ permiscendam (ne regulis Arithmeticæ filum Geometriæ rumpamus) nec ad doctrinam fractionum vulgarium rejiciendam putavimus, utpote, quæ nihil cum iis commune habet, præter inane, ac triste tyronibus nomen *fractionis*, sed absolutis numerorum integrorum algorithmis, (cum Logistica decimalis iisdem Arithmeticæ integrorum regulis utatur) tractandam hac parte suscipimus.

CAPUT I.

Hypotheses numerorum Decimalium.

HYPOTHESIS I.

83. QUemadmodum Geometræ, *ita* Philosophi naturales *in determinandis suis magnitudinibus (seu eæ sint* longitudinum *tantum*, *id*

id est, linearum; *seu* longitudinum *simul &* latitudinum, *id est*, arearum, & superficierum; *seu demum sint* longitudinum, latitudinum, & profunditatum, *id est*, corporum) *utuntur mensuris, quas vocant* perticas, pedes, digitos, lineas *&c.*

HYPOTHESIS II.

84. Pertica simplex (*considerando videlicet secundum longitudinem tantum*) *dividitur in* decem *partes, quas vocant Geometræ* pedes, & *hinc etiam* perticam *appellant*, decempedam; pedem unum *iterum dividunt in decem* digitos, & *hinc* decempeda *habet* 100 digitos. Digitum *porro subdividunt in decem* lineas, & *hinc* decempeda *habet* 1000. lineas, & *ita porro progrediuntur.*

COROLLARIUM I.

85. Hinc liquet species inferiores in *decempeda* per accrementum decadicum constituere species superiores; sic exempli gr. cum 10. *lineæ* faciant *digitum*, si numerus *linearum* excrescat ultra 9, ille transit in speciem *digitorum*; ita *digiti* accrescentes ultra 9, constituunt speciem *pedum*, idem est de *pedibus* respectu *perticarum*, seu *decempedarum*.

COROLLARIUM II.

86. Ex hoc accremento decadico liquet porro, non aliis regulis ad suas operationes egere *Logisticam decimalem*, quam quas dedimus in *parte I. de numeris integris vulgaribus*; nam & hi

ex

ex inſtitutione hominum accrementum habent decadicum. (§. 8.) Hinc in numero *Ex. gr.* iſto *Logiſtico ſimplici*: 5784, ſi ultima nota 4 denotet *lineas*, ſequens 8 denotabit *digitos*, illam vero conſequens 7, indicabit *pedes*, & numerus 5 ſignificabit *decempedas*, ſeu *perticas*. Intelligendo omnes ſpecies eſſe *ſimplices*.

HYPOTHESIS III.

87. Signa, *ſive* notæ, *aut* exponentes *harum ſpecierum ſunt ſequentia: ſignum* perticarum *eſt* (o) *ſeu zerus*. Pedum *eſt* (′) *ſeu una virgula*. Digitorum (″) *ſeu duæ virgulæ*: Linearum (‴) *ſeu tres virgulæ*. *Ponuntur hæc ſigna ſupra numeros ſibi cognomines*. Ex. gr. *Numerus Logiſticus decimalis iſte*: $\overset{0}{5}\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{8}\overset{\prime\prime\prime}{4}$ *aut ſimpliciter*: $578\overset{\prime\prime\prime}{4}$ *in ultima nota notatus, ſic enunciandus eſt*: 5 decempedæ ſimplices, 7 pedes ſimplices, 8 digiti ſimplices, 4 lineæ ſimplices. *Quod ſi reſpectus habeatur tantum ad ultimum ſignum numeri* 4, *poteſt* (§. 84.) *etiam ſic enunciari*: *quinque millia ſeptingentæ octuaginta quatuor* lineæ ſimplices.

COROLLARIUM I.

88. Ratio *conjunctim* ſcribendi numeros Logiſticos decimales ſimplices, colligitur ex (§. 84. & ſeq.) ſic, ſi *conjunctim* ſcribendi forent *Ex. gr.* $\overset{0}{4}$ & $\overset{\prime\prime}{6}$, ita ſcribentur $\overset{0}{4}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{6}$ (& non $\overset{0}{4}\overset{\prime\prime}{6}$) quia locum deficientis intermediæ ſpeciei, nempe *pedum*, ſupplere debet *zerus*; quemadmodum etiam in numeris vulgaribus monuimus

(§.

(§. 10.) similiter si *conjunctim* scribendi sint $\overset{0}{8}$ & $\overset{'''}{5}$, ita scribentur: $\overset{0}{8}\overset{'}{0}\overset{''}{0}\overset{'''}{5}$ (non $\overset{0}{8}\overset{'''}{5}$) quia loca *pedum* & *digitorum* intermediorum *zeris* supplenda sunt. (§. 84.)

COROLLARIUM II.

89. Liquet etiam (ex §. 84.) *simplices perticas* ad inferiorem quamvis speciem *simplicem* facile reduci per adjectionem tot *zerorum*, quot *virgulæ* datam speciem inferiorem denotant. *Ex. gr.* Sint $\overset{0}{7}$ reducendæ ad *digitos*, cum signum digitorum sint (//) *bina virgulæ*, scribantur ad dextram numeri $\overset{0}{7}$ duo *zeri*, & habebuntur $\overset{0}{7}\overset{'}{0}\overset{''}{0}$ id est, septem *perticæ* ad speciem *digitorum* reductæ. Si vero species superior reducenda ad inferiorem jam signata habetur una, vel pluribus *virgulis*, tali casu; tot *zeri* ad dextram speciei superiori apponendi sunt, quot *virgulis* species data inferior superat *virgulas* speciei reducendæ. *Ex. gr.* sint reducendi $\overset{'}{8}$, ad *lineas*, cum virgulæ lineas designantes sint (///) tres, superant virgulam *pedum* reducendorum *duabus virgulis*, igitur ad $\overset{'}{8}$ apponendi sunt *duo zeri*, & erunt $\overset{'}{8}\overset{''}{0}\overset{'''}{0}$ reducti. Sic $\overset{''}{5}$ ad *lineas* reducti sunt $\overset{''}{5}\overset{'''}{0}$, & ita porro.

DEFINITIO I.

90. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. TAB.
quadratus (ob figuram) appellatur pro- LOG.
ductum, aut factum quod producitur, si Fig.
pertica simplex, vel *pes*, aut *digitus simplex* I.
perseipsum multiplicetur. *Ex. gr.* Si linea recta A B insistens alteri B C *æquali*, ad neu-

neutrum latus declinando, repræſentet *perticam*, vel *pedem*, aut *digitum ſimplicem*, & hæc linea A B moveri concipiatur per omnia puncta alterius lineæ rectæ B C ipſi prorſus *æquali*, ita, ut relinquere veſtigia ſui intelligatur, ſpacium viæ A B C D poſtquam pervenit ad C, vocatur (ob figuram) *quadratum*, & quidem in ſpecie: ſi linea A B erat pertica ſimplex, ſpacium A B C D vocatur *pertica qradrata*, ſi linea A B fuit pes ſimplex, appellatur *pes quadratus*, ſi linea A B fuit digitus, vocatur *digitus quadratus*. Hic ductus lineæ rectæ in lineam rectam *multiplicatio Geometrica*, Area vero, ſive ſpacium A B C D, *productum Geometricum* appellatur.

COROLLARIUM I.

TAB. LOG. Fig. 2. 91. Hinc ſi pertica ſimplex concipiatur diviſa in 10 pedes ſimplices, continebit *productum* perticæ quadratæ in pedes diviſæ, 100 *pedes quadratos*; eodem modo: *pes quadratus* (ſi pes ſimplex in 10 digitos diviſus concipiatur) 100 *digitos quadratos* continebit, & *digitus quadratus* in lineas diviſus continebit 100 *lineas quadratas* &c. Igitur propter accrementum *centenariorum*, cum pertica ſimplex in *digitos* diviſa contineat 100 *digitos* (§. 48.) ergo *pertica quadrata* continebit 100 *digitos* per 100 multiplicatos, id eſt, 10000 *digitos quadratos*, & cum pertica ſimplex diviſa in *lineas* contineat 1000 *lineas* (§. 84.) continebit pertica quadrata in lineas diviſa 1000 *lineas* per 1000 multiplicatas, id eſt 1000000 *lineas quadratas*.

Notandum : *Signum* □ *loco vocis* quadratum *deinceps usurpandum.*

COROLLARIUM II.

92. Porro ex his productis □ patet *primo* : Ad hoc, ut lineæ □ efficere possint digitum □, debeat numerus *linearum* □ attingere *tres notas* numericas, id est, adæquare numerum 100; idem est, de *digitis* □, ut efficiant *pedem* □, & de *pedibus* □, ut efficiant *perticam* □. *Secundo*: Ut *lineæ* □ efficiant *pedem* □, debent hæ attingere *quinque notas* numericas, id est 10000, & ad hoc, ut *lineæ* □ efficiant *perticam* □, debent attingere *septem notas* numericas, id est 1000000. Unde patet ratio reducendi speciem superiorem ad inferiores species, per adjectionem bis tot zerorum, quot virgulas species inferior continet.

PROBLEMA I.

93. PROP. *Enunciare, & per virgulas exprimere numerum logisticum decimalem* □.

RESOLUTIO.

I. Propositus numerus □ in classes distinguatur, inchoando à nota designante speciem minimam, & cuilibet classi sinistram versus binæ notæ numericæ attribuantur, quod fit, si numeri propositi logistici, notæ numericæ (inchoando à virgulis speciei infimæ) *alternando* signentur virgulis sinistram versus numero decrescentibus. Sit numerus logisticus decimalis □

Ex.

Ex. gr. $2463847\overset{\prime\prime\prime}{7}0$, erit inchoando à nota numerica $\overset{\prime\prime\prime}{7}$, *alternando signatus* per virgulas decrescentes sinistram versus: $2\overset{0}{4},6\overset{\prime}{3},8\overset{\prime\prime}{4},\overset{\prime\prime\prime}{7}0$. & sic enunciatur: *viginti quatuor* perticæ $\square$, *sexaginta tres* pedes $\square$, *octuaginta quatuor* digiti $\square$, & *septuaginta* lineæ $\square$.

II. Si post numerum signatum virgulis speciem minimam designantibus nulla sequatur nota numerica, subintelligendus est in fine zerus. *E. g.* in hoc numero logistico $\square$: $\overset{0}{3}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{7}45$, numerus ultimus $\overset{\prime\prime}{5}$ valet $\overset{\prime\prime}{5}0$.

III. Numeros sinistimos, id est, proxime sequentes virgulam designantem speciem pedum, omnes esse *perticarum*, quotcunque reperiantur, clarum est.

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 91. & 92.) Reg. III. constat, quia perticæ sunt species maxima.

COROLLARIUM.

94. Ex hactenus dictis liquet ratio quoque *conjunctim* scribendi numeros logisticos $\square$: sic $\overset{0}{5}4$ perticæ $\square$, & $\overset{\prime\prime}{7}2$ digiti $\square$, scribentur *conjunctim*: $\overset{0}{5}4\overset{\prime}{0}0\,\overset{\prime\prime}{7}2$ (non $\overset{0}{5}4\overset{\prime\prime}{7}2$) quia speciei omissæ *pedum* locus suppleri debet duobus zeris

(§. 91.

(§.91.92.93.) ita $\overset{0}{32}$ perticæ □, & $\overset{///}{45}$ lineæ □, conjunctim scribentur: $3\overset{0}{2}0\overset{/}{0}0\overset{//}{0}4\overset{///}{5}$ (non $3\overset{0}{2}4\overset{///}{5}$) ut patet ex (§. 92. & 93.)

HYPOTHESIS IV.

95. *Geometræ utuntur perticis, pedibus, digitis &c. □, in determinandis magnitudinibus arearum, seu superficierum, idque ex institutione hominum.*

SCHOLION.

96. *Mirari non debent tyrones (dum aliorum Authorum regulas tractandi numeros logisticos decimales legerint) nos à Methodo vulgari recessisse; experientur enim Methodum hanc nostram non modo intellectu faciliorem, sed usu ipso etiam longe præstantiorem. Præterquam enim, (ut patebit inferius) quod juxta regulas vulgares dispescendi in classes numeros logisticos □, non levis è virgularum heterogeneitate oriatur perturbatio, eas etiam universales non esse demonstrabitur. Accedit, quod virgularum eadem signaturâ adhibitâ, discrimen non indicetur, inter numerum logisticum simplicem, & inter numerum logisticum quadratum, aut cubicum perticarum, pedum &c. Quod in nostra Methodo, vel primo virgularum dispositarum intuitu illicò patescit.*

DEFINITIO II.

97. *Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* &c. *cubicus* (ob figuram) appellatur *productum*, quod oritur, si pertica □ per perticam *simplicem*, aut pes □ per *pedem simplicem*, item digitus □ per digitum *simplicem* &c. multiplicetur. *Ex. gr.* Si quadratum A B C D, repræsentans *perticam*, vel *pedem*, aut TAB. LOG. Fig.4.

aut *digitum* □ &c. moveri concipiatur directe deorſum per lineam A E *æqualem perticæ*, vel *pedi*, aut *digito ſimplici* &c. ita, ut intelligatur hoc □ motum, per ſingula puncta lineæ B E, relinquere ſui veſtigia, ſpacium A B C D E H K F (per modum corporis conſideratum) per quod □ moveri concipitur, vocatur *cubus*; & quidem in ſpecie: ſi moveatur pertica □ per perticam *ſimplicem*, dicitur *pertica cubica*; ſi pes □ per pedem *ſimplicem*, *pes cubicus*; ſi digitus □ per digitum *ſimplicem*, *digitus cubicus* appellatur &c.

COROLLARIUM I.

TAB. LOG. Fig. 5. 98. Quoniam pertica □ in pedes diviſa continet 100 pedes □; & pes □, 100 digitos □; digitus □, 100 lineas □ &c. (§. 91.) ſi pertica □ A B D. moveri intelligatur deorſum per perticam *ſimplicem* B E diviſam in 10 pedes, continebit *pertica cubica* pedes *cubicos* 1000, quod eſt *productum*, ſi 100 per 10 multiplicetur. Ex eadem ratione, pes *cubicus* numerabit 1000 digitos cubicos, & *digitus cubicus* cenſebit 1000 lineas cubicas, per accrementum videlicet *millenariorum*, ut patet ex fig. 5.

COROLLARIUM II.

99. Præterea liquet; cum pertica □ in digitos diviſa numeret 10000 digitos □ (§. 91.) & pertica ſimplex 100 digitos *ſimplices* (§. 84.) ſequitur perticam cubicam in digitos diviſam continere 1000000 *digitorum cubicorum*; nam 10000 per 100 multiplicata producunt 1000000; item cum pertica □ in lineas diviſa contineat 1000000 *linearum* □ (§. 91.) & pertica *ſimplex* in

in lineas diviſa 1000 *lineas ſimplices* (§. 84.) ſequitur perticam cubicam in lineas diviſam continere 1000000000 *linearum cubicarum*; nam 1000000 per 1000 multiplicatum, producit factum 1000000000.

COROLLARIUM III.

100. Contemplando producta cubica ex multiplicatione quadratorum in ſpecies *ſimplices* orta, certum eſt, *primo* ad hoc, ut lineæ cubicæ efficere poſſint unum digitum cubicum, eæ adæquare debeant numerum 1000, adeoque ſuperare *tres notas* numericas; idem eſt de digitis cubicis reſpectu habito ad pedem cubicum, & de pedibus cubicis relate ad perticam cubicam. (§. 98.) *Secundo*: Ut lineæ cubicæ adæquent pedem cubicum, neceſſe eſt, ut aſſurgant ad numerum 1000000, ſeu *ſeptem notarum*; & ut eædem lineæ cubicæ adæquent perticam cubicam, attingere debent numerum 1000000000, ſeu *decem notarum*.

PROBLEMA II.

101. PROP. *Exprimere per virgulas, & enunciare datum numerum logiſticum decimalem cubicum.*

RESOLUTIO.

I. Propoſitus numerus logiſticus cubicus in claſſes diſtinguatur inchoando à nota deſignante ſpeciem infimam, & cuilibet claſſi, ſiniſtram verſus, *tres notæ* numericæ aſſignentur, quod fit, ſi ſignentur ſingulæ *ternæ notæ*, à minima incipiendo, virgulis numero decreſcentibus. *Ex. gr.* Sit numerus logiſticus cubicus ſignandus:

$5678329^{\prime\prime\prime}453$, erit per virgulas in qua-libet *tertia nota* signatus: $5^{0},6^{\prime}78^{\prime\prime},329,453^{\prime\prime\prime}$, & ita enunciatur: *quinque* perticæ cubicæ, *sexcenti septuaginta octo* pedes cubici, *trecenti viginti novem* digiti cubici, *quadringentæ quinquaginta tres* lineæ cubicæ.

II. Si post numerum speciei minimæ per virgulas designatum, non reperiantur notæ numericæ, subintelligi debent duo zeri apponendi, sic: $8^{0}3^{\prime}452^{\prime\prime}687^{\prime\prime\prime}$ numerus ultimus $7^{\prime\prime\prime}$, valet $700^{\prime\prime\prime}$ lineas cubicas; si vero una nota numerica sequatur, subintelligi adhuc debet unus zerus. *Ex.gr.* $4^{0}8^{\prime}943^{\prime\prime}5$, ultimi $3^{\prime\prime}5$, valent $3^{\prime\prime}50$ digitos cubicos. (§.100.)

III. Post virgulam pedum cubicorum sinistram versus positi numeri (quotcunque sint) designant perticas cubicas.

Demonstr. liquet, *ex* (§.98. & sequ.)

COROLLARIUM.

102. Ex hactenus explicatis liquet quoque ratio *conjunctim* scribendi numeros logisticos cubicos, sic: 24^{0} perticæ cubicæ, & $3^{\prime\prime}29$ digiti cubici *conjunctim* scribentur: $24^{0}0^{\prime}0^{\prime\prime}329$ (§.100.) & non $(24^{0\prime\prime}329)$ propter defectum speciei intermediæ pedum cubicorum; ita quoque scribentur: 3^{0} cubicæ, & $250^{\prime\prime\prime}$ cubicæ, videlicet: $3^{0}0^{\prime}0^{\prime\prime}0000250^{\prime\prime\prime}$ (& non 3250)

$\overset{0///}{3250}$) ob eandem rationem; sic pariter $\overset{0}{8}$ cubicæ, $\overset{/}{682}$ cubici, & $\overset{///}{3}$ cubicæ, scribentur hoc modo: $\overset{0}{8}\,\overset{/}{682}\,\overset{//}{000}\,\overset{///}{003}$. per (§. 99. & 100.)

SCHOLION.

103. *Tyro in his Hypothesibus logisticorum decimalium intelligendis studium ponat, ac exercitium, quibus memoria retentis praxim quatuor sequentium speciei um Arithmeticarum sine difficultate imbibet, ac subinde tam in Geometria practica, quam Philosophia naturali, eas absque errandi timore usurpabit.*

CAPUT II.

De Additione numerorum logisticorum decimalium.

DEFINITIO III.

104. Numeri logistici decimales *diversæ denominationis* dicuntur, qui sub eodem genere non comprehenduntur, etsi in specie conveniant, *Ex. gr. perticæ simplices*, & *perticæ* □, aut *perticæ cubicæ* &c. *Ejusdem* vero *denominationis* sunt, qui in eodem genere conveniunt, etsi specie differant. *Ex. gr. Perticæ simplices*, & *pedes simplices.* Item *perticæ* □, & *pedes* □, aut *perticæ cubicæ*, & *digiti cubici.*

DEFINITIO IV.

105. Numeri logistici decimales *diversæ speciei* dicuntur, qui in tota specie differunt, etsi in genere conveniant. *Ex.*

gr. perticæ ſimplices, & *pedes ſimplices*, qui conveniunt in eo, quod ſint *quantitates ſimplices*, ſeu *longitudines*, differunt vero in eo, quod pertica ſit longitudo aliter menſurabilis, quam pes.

DEFINITIO V.

106. Numeri logiſtici decimales, & ejusdem *ſpeciei*, & ejusdem *denominationis* vocantur, qui & in eadem ſpecie, & in eodem genere conveniunt. *Ex. gr.* 9 perticæ ſimplices, & 5 perticæ ſimplices. Item ejusdem denominationis, & ſpeciei ſunt 3 perticæ □, & 4 perticæ □ &c.

DEFINITIO VI.

107. Numeri logiſtici decimales, & *diverſæ denominationis*, & ſimul *diverſæ ſpeciei* dicuntur, qui tam in genere, quam in ſpecie inter ſe differunt. *Ex. gr. Perticæ ſimplices*, & *digiti quadrati*; aut *digiti* □, & *pedes cubici.*

THEOREMA I.

108. PROP. *Quæ adduntur ſibi invicem, aut ab ſe invicem ſubtrahuntur, illa ejusdem & ſpeciei, & denominationis eſſe debent.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. inter ea, quæ addi, aut ſubtrahi debent, requiritur homogeneitas

(§.

(§. 30. & 31. item §. 37. & 40.) ergo ejusdem ſpeciei eſſe debent. (§. 20.)

Demonſtratur Pars altera. Ea, quæ adduntur, aut ſubtrahuntur, in eadem ſpecie conveniant oportet, (per Partem I. hujus) ergo multò magis neceſſe eſt, ut in genere conveniant, id eſt, ut ſint ejusdem *denominationis.* (§. 106.) Q. E. D.

PROBLEMA III.

109. PROP. *Addere numeros logiſticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Ex diſpoſitione virgularum videatur, cujusnam ſint denominationis dati numeri addendi, an ſint logiſtici *ſimplices?* an *quadrati?* an *cubici?* &c.

II. Si numeri logiſtici ſint, & ejusdem *denominationis*, & *ſpeciei*, ij, ita ſub ſe invicem collocentur, ut lineæ lineis, digiti digitis, pedes pedibus, &c. reſpondeant.

III. Si in addendis ſpecies una, vel plures (ſive eæ ſint intermediæ, ſive finales) deficiant, ſuppleantur zeris; in ſimplicibus quidem juxta doctrinam. (§. 88. & 89.) In quadratis juxta doctrinam. (§. 91. 92. & 94.) In cubicis juxta (§. 99. 100. item 102.) *Vide exempl. II. & III.*

IV. Ita collocati, addantur invicem

juxta regulas Arithmeticæ integrorum (§. 32.) traditas.

V. Superſcriptio virgularum in ſumma, relate ad ſpeciem infimam, manet eadem, quæ fuit in addendis, à qua (ſpecie infima) reliquarum notationes juxta doctrinam (§. 87. & 88.) item (§. 93. & 101.) dependent.

DEMONSTRATIO.

Per datas regulas, tam in logiſticis ſimplicibus, quam quadratis, & cubicis, habentur in ſumma ſingulæ ſpecies, ſed etiam per datas regulas in ſumma habentur ſingularum ſpecierum unitates, decades, centenarii &c. (§. 84. 92. 99.) ergo in ſumma habetur *totum* omnium datorum logiſticorum. Q. E. D.

PARADIGMA I.

Additionis logiſticorum ſimplicium.

EXEMP. I. REG. II.

$$\text{Addendi}\left\{\begin{array}{ccccl} 0 & / & // & /// & \\ 8 & 9 & 5 & 2 & A \\ 0 & / & // & /// & \\ 7 & 4 & 3 & 6 & B \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcccccl} & & 0 & / & // & /// & \\ \hline \textit{Summa} & 1 & 6 & 3 & 8 & 8 & C \end{array}$$

EXEMP. II. REG. III.

Si ad $\overset{0}{5}\ \overset{/}{6}\ \overset{//}{7}$ *add. ſint* $\overset{0}{3}$ & $\overset{//}{2}$ *erunt*

$$\textit{Add.}\left\{\begin{array}{cccl} 0 & / & // & \\ 5 & 6 & 7 & A \\ 0 & / & // & \\ 3 & 0 & 2 & B \end{array}\right. \textit{completus (§. 88.)}$$

$$\begin{array}{lcccl} & 0 & / & // & \\ \hline \textit{Sum.} & 8 & 6 & 9 & C \end{array}$$

Ex-

EXEMP. III. REG. III.

```
                    /      o / // ///
Si adden. ſint 2 ad 4 5 3 8
          erunt
         ⎧ o / // ///
Addendi  ⎨ 4 5 3 8 A
         ⎪   / // ///
         ⎩   2 0 0 B  re-
         ──────────── duct.
           o / // ///
Summa      4 7 3 8 C
```

EXEMP. IV. REG. V.

```
         ⎧ / // ///
Addendi  ⎨ 8 3 7 A
         ⎪ / // ///
         ⎩ 9 8 9 B
         ──────────
           o / // ///
Summa      1 8 2 6 C
```

PARADIGMA II.

Additionis logiſticorum □

EXEMP. I. REG. II.

```
      ⎧ o /  //  ///
Add.  ⎨ 4 3 4 2 5 3 6 A
      ⎪ o /  //  ///
      ⎩ 7 9 6 7 9 5 8 B
      ──────────────────
        o /  //  ///
Sum.  1 2,3 1,0 4,9 4 C
```

EXEMP. II. REG. III.

```
        o / //            o  //
Si ad   5 3 4 2 6 ſint add. 5 & 60
              erunt
      ⎧ o /  //
Add.  ⎨ 5 3 4 2 6 A
      ⎪ o /  //
      ⎩ 5 0 0 6 0 B comple-
      ──────────── tus (§.94.)
        o /  //
Sum.  1 0,3 4,8 6 C
```

EXEMPLUM III. REGULÆ III. & V.

```
                    /     / // ///
Si addendi ſint 7 2 ad 8 9 6 7 0 5
                erunt
         ⎧ / // ///
Addendi  ⎨ 8 9 6 7 0 5 A
         ⎪ / // ///
         ⎩ 7 2 0 0 0 0 B reductus. (§.91.)
         ──────────────
         o / // ///
Summa 1,6 1,6 7,0 5 C
```

PARADIGMA III.
Additionis logisticorum cubicorum.

EXEMPLUM I. REG. II.

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{0}{4},\overset{\prime}{889},\overset{\prime\prime}{785}\ \text{A} \\ \overset{0}{9},\overset{\prime}{798},\overset{\prime\prime}{907}\ \text{B} \end{cases}$$

$$\text{Summa}\quad \overset{0}{14},\overset{\prime}{688},\overset{\prime\prime}{692}\ \text{C}$$

EXEMPLUM II. REGULA III. & V.

$$\textit{Si sint addendi}\ \overset{0}{3}\ \&\ \overset{\prime\prime\prime}{25}\ \textit{ad}\ \overset{0}{8},\overset{\prime}{273},\overset{\prime\prime}{845},\overset{\prime\prime\prime}{002}$$

erunt

$$\text{Addendi}\begin{cases} \overset{0}{8},\overset{\prime}{273},\overset{\prime\prime}{845},\overset{\prime\prime\prime}{002}\ \text{A} \\ \overset{0}{3},\overset{\prime}{000},\overset{\prime\prime}{000},\overset{\prime\prime\prime}{250}\ \text{B}\ \textit{completi.} \end{cases}$$

$$\text{Summa}\quad \overset{0}{11},\overset{\prime}{273},\overset{\prime\prime}{845},\overset{\prime\prime\prime}{252}\ \text{C}$$

SCHOLION I.

110. Examen, *sive proba additionis, fit per subtractionem, ut* (§. 44.) *monuimus, & cap. sequ. docebitur.*

SCHOLION II.

111. Regula III. *iis, qui frequenti exercitio praxim imbiberunt, opus non esse, ex contemplatione horum exemplorum liquet, modo animadvertant ad* regulam II. *in subscriptione logisticorum; in usum tamen tyronum, donec praxi assuescant, non inutilem censuimus.*

CAPUT III.

De ſubtractione logiſticorum decimalium.

PROBLEMA IV.

112. PROP. *Subtrahere numerum logiſticum decimalem minorem à majore.*

RESOLUTIO.

I. obſerventur ex (§. 109.) *Reg. I. II. & III.* deinde fiat ſubtractio, ut *in Arithmetica* (§. 41.) *docuimus;* pro ſuperſcriptione virgularum in reſiduo, *ſervetur regula V. ejusdem.* (§. 109.)

DEMONSTRATIO.

Per datam reſolutionem in reſiduo habentur ſingulæ differentiæ ſpecierum ſingularum minoris à majore, ſed etiam habentur differentiæ ex ſingulis ſpeciebus unitatum, decadum, &c. ergo in reſiduo habetur tota differentia totius numeri minoris à majore, Q. E. D.

Exempla ſubtractionis logiſticorum decimalium deſumptis numeris ex adductis in additione exemplis.

PARADIGMA I.

Subtractionis logiſticorum decimalium ſimplicium.

EXEMPLUM I.

	0 / // ///
	1 6 3 8 8 C
	0 / // ////
Subtrab.	7 4 3 6 B
	0 / // ///
Reſiduum	8 9 5 2 A

EXEMPLUM II.

	0 //	
Sit ſubtrahendus	3 [illegible] 2 [illegible]	
	0 / //	
	8 6 9 C	
	0 / //	
Subtrab.	3 0 2 B	*compl.*
	0 / //	
Reſiduum	5 6 7 A	

EXEMP. III. IN ADDIT. IV.

0 / // ///
1 8 2 6 C
/ // ///
Subtrab. 9 8 9 B

/ // ///
Residuum 8 3 7 A

EXEMP. NOVUM.

/ /// 0
Sint subtrahendi 2 & 3 à 7
erunt
0 / // ///
7 0 0 0 } *re-*
/ // ///
Subtrab. 2 0 3 } *ducti.*
0 / // ///
Residuum 6 7 9 7

PARADIGMA II.

Subtractionis logisticorum decimalium □.

EXEMPLUM I.

0 / // ///
1 2 3 1 0 4 9 4 C
0 / // ///
Subtrab. 7 9 6 7 9 5 8 B

0 / // ///
Resid. 4,3 4,2 5,3 6 A

EXEMPLUM II.

0 //
Sint subtrahendæ 5 & 60 *ab*
0 / //
1 0 3 4 8 6 C
0 / //
Subtrab. 5 0 0 6 0 B *redu.*
0 / //
Residuum 5,3 4,2 6 A

EXEMPLUM NOVUM.

/ /// 0
Sint subtrahendi 24 □ & 53 □ *ab* 8 □
erunt
0 / // ///
8 0 0 0 0 0 0 } *reducti.*
/ // ///
Subtrab. 2 4 0 0 5 3
0 / // ///
Residuum 7,7 5,9 9,4 7

PARADIGMA III.

Subtractionis logisticorum decimalium cubicorum.

EXEMPLUM I.

0 / //
1 4 6 8 8 6 9 2 C
0 / //
Subtrab. 9 7 9 8 9 0 7 B
0 / //
Residuum 4,8 8 9,7 8 5 A

Ex-

EXEMPLUM NOVUM.

Sint subtrahendi $803'$ *cubici ab* $7^{\circ}, \& \ 234''$

erunt

$$\left.\begin{array}{r} \overset{\circ}{7}\overset{\prime}{000}\overset{\prime\prime}{234} \\ \textit{Subtrab.}\ \ \overset{\prime}{803}\overset{\prime\prime}{000} \end{array}\right\}\ \textit{reducti.}$$

$$\textit{Residuum}\ \overset{\circ}{6},\overset{\prime}{197},\overset{\prime\prime}{234}$$

SCHOLION.

113. *Examen, sive proba subtractionis fit per additionem, ut in* Arithmetica (§. 43.) & Logist. (§. 109.) ostensum est. *Ex contemplatione quoque horum exemplorum liquet, non inutilem esse tyronibus observationem* regulæ III. additionis (§. 109.)

CAPUT IV.

De multiplicatione logisticorum decimalium.

THEOREMA II.

114. PROP. *Factum, sive productum ex logisticis factoribus decimalibus* simplicibus, *in factores logisticos* simplices, *est Area, seu superficies, constans* quadratis *logisticis decimalibus; Item factum, sive productum ex factoribus logisticis* quadratis, *in factores* simplices *logisticos, est corpus, (aut saltem spacium) constans cubis logisticis decimalibus.*

DEMONSTRATIO.

I. *Pars* patet ex definitione (§. 90.)
II. *Pars* ex definitione (§. 97.)

PRO-

PROBLEMA V.

115. PROP. *Numeros logiſticos decimales invicem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ante omnia advertendum: an factores ſint ejusdem ſpeciei? (ut ejusdem denominationis quoque ſint, neceſſe non eſt) & utrum ſpecies intermediæ non deficiant.

Itaque I. Si non ſint ejusdem ſpeciei, aut aliqua ſpecies intermedia deficiat, reducantur ad eandem ſpeciem, & intermediæ ſpecies compleantur. *Ut in Addition. & ſubt. dictum.*

II. Scribantur ſub ſe invicem, ut in *Arithmetica* (§. 53.) *docuimus.* Fiat multiplicatio, & facta partialia addantur in unum factum totale, ut *eodem* (§. 53.) *dictum.*

III. Factum totale per virgulas diſtinguatur in ſpecies ſuas, quæ diſtinctio hac ratione perficitur. *Primo: Si factores ambo erant logiſtici ſimplices;* tali caſu, in facto totali ſuper notam penultimam dextimam tot ponantur virgulæ, quot erant in aliquo factorum ſpeciem minimam denotantes, & ab ea notata inchoando, ſiniſtram verſus, ſignentur alternando reliquæ notæ per virgulas numero decreſcentes. (§. 93.) *Secundo: Si unus factorum fuit quadratus, alter ſimplex;* tali caſu, ſignetur nota tertia dextima per virgulas de-

no-

notantes ſpeciem minimam factorum, & ab hac notata, ſiniſtram verſus, ſingulæ ternæ notæ ſignentur per virgulas numero decreſcentes. (§. 101.)

DEMONSTRATIO.

Regula II. demonſtrata eſt ſupra (§. 53.) Reg. III. demonſtrata eſt (§. 114.) Reg. I. patet, quia hac ratione determinatur locus debitus ſcribendi facta partialia, & in unum factum totale addendi. Q. E. D.

PARADIGMA I.

Multiplicationis, ſi factores ſint logiſtici ſimplices.

EXEMPLUM I.

Factores { 0 / //
 8 4 3
 0 / //
 7 3 2

facta 1 6 8 6
 partialia 2 5 2 9
 5 8 9 1

0 / //
 fact. tot. 6 1,6 0,7 6 □ *per reg. III.*

EXEMPLUM II. REG. I. & III.

Si unus factorum detur $\overset{0}{3}$ *&* $\overset{//}{7}$, *& alter* $\overset{0}{2}$ *&* $\overset{///}{4}$ *erunt*

Factores { 0 / // ///
 3 0 7 0 *reducti per* (§. 89.)
 0 / // /// *&*
 2 0 0 4 *completi* (§. 88.)

Facta partialia 1 2 2 8 0
 6 1 4 0

0 / // ///
 Factum totale 6,1 5,2 2,8 0 □ *per reg. III. ſignatum.*

PA-

PARADIGMA II.

Si factorum unus sit logisticus □, *alter logisticus* simplex.

EXEMPLUM I.

$$\textit{Factores}\begin{cases} \overset{0}{6}1\overset{\prime}{5}2\overset{\prime\prime}{2}\,\square \\ \quad\overset{0}{7}\overset{\prime\prime\prime}{3}4 \end{cases}$$

246088
184566
430654

$$\textit{Factum tot.}\ \overset{0}{4}5,\overset{\prime}{1}57,\overset{\prime\prime}{1}48\ \textit{cubici per reg. III. hujus.}$$

EXEMPLUM II.

Sint $\overset{0}{3}$ □, & $\overset{\prime\prime}{25}$ □, *multiplicandi per* $\overset{0}{2}$ & $\overset{\prime\prime\prime}{5}$ *simplices. erunt*

$$\textit{Factores}\begin{cases} \overset{0}{3}\overset{\prime}{0}0\overset{\prime\prime}{2}5\overset{\prime\prime\prime}{0}0\,\square \\ \quad\overset{0}{2}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{5} \end{cases}\ \begin{matrix}\textit{completi per (§.94.)} \\ \& \\ \textit{reducti per (§. 92.)}\end{matrix}$$

Facta partialia 15012500
6005000

$$\textit{Fact. tot.}\ \overset{0}{6},\overset{\prime}{0}20,\overset{\prime\prime}{0}12,\overset{\prime\prime\prime}{5}00\ \textit{cubicæ per reg. III. hujus.}$$

Examen multiplicationis fit ope divisionis infra docendæ.

SCHOLION I.

116. *Productum* Exempli I. Paradig. I. *quod juxta nostram methodum sub hac forma* $\overset{0}{6}1,\overset{\prime}{7}0,\overset{\prime\prime}{7}6$ *exhibemus, secundum* vulgarem *modum multiplicandi logisticos decimales, ita exprimeretur*: $\overset{0}{6}\ \overset{\prime}{1}\ \overset{\prime\prime}{7}\ \overset{\prime\prime\prime}{0}\ \overset{\text{iv}}{7}\ 6$. *Item in* exemp. II. parad. I. *productum nostrum*: $\overset{0}{6},\overset{\prime}{15},\overset{\prime\prime}{22},\overset{\prime\prime\prime}{80}$, *juxta* vulgarem, *ita haberetur*: $\overset{0}{6}\ \overset{\prime}{1}\ \overset{\prime\prime}{5}\ \overset{\prime\prime\prime}{2}\ \overset{\text{iv}}{2}\ \overset{\text{v}}{8}$. *Videlicet vir-*

virgulæ ſpeciei minimæ factorum colliguntur in unam ſummam, hæc ſumma virgularum, dextimæ notæ producti ſuperponitur, ſignando reliquas producti notas virgulis numero decreſcentibus ſiniſtram verſus; ex qua methodo ſignandi, perturbationem, & variationem ſignificationis virgularum oriri neceſſe eſt; nam cum in producto ſint quadratæ *perticæ, pedes, digiti &c. atque adeo bini numeri aſſignandi ſint claſſi unius ſpeciei, (§. 93.) item in producto* cubicarum perticarum pedum *&c. tres numeri unam claſſem conſtituant, liquet, variari ſignificationem virgularum. Sic in pro-*

0 / // ///iv v

ducto Exem. II. parad. I. *vulgariter expreſſo*: 6 1 5 2 2 8

//

virgulæ binæ ſupra numerum 5 *poſitæ, non ſignificant digitos, ſed pedes* □. *Item tres, & quatuor virgulæ*

/// iv

numerorum 2 2, *non ſignificant lineas, & partes decimales linearum; ſed digitos* □, *atque idem eſt de cæteris virgulis, quæ eam ſpeciem non ſignificant, quam præſeferunt. Quæ variatio ſignificationis tyronibus magnum faceſſit negotium diſcernendi veros valores.*

SCHOLION II.

117. *Quoniam factores* (juxta modum vulgarem) *non reducuntur ante multiplicationem ad eandem ſpeciem, ſi diverſæ ſpeciei infimæ factores ſimplices ſint, & ſumma virgularum ſit impar, ſequitur, notam dextimam producti, ſignatam per ſummam virgularum non ſignificare* unitates, *ſed* decades *in productis* □. *In cubicis vero productis nec regula ſtatui poteſt, cum virgulæ* centenariorum *alternando, jam pares, jam impares ſint. Sic in* exemp. II. paradig. I. *juxta vul-*

0 / // ///iv v

garem expreſſo; 6 1 5 2 2 8, *dextima nota* 8, *non valet octo* unitates, *ſed octo* decades, *id eſt* 80; *unde rurſus tyronibus errandi campus quidem aperitur; ſed via declinandi erroris, aut corrigendi non ſatis oſtenditur ad captum.*

SCHOLION III.

118. *Oſtendendum nobis eſt, quod* (§. 96.) *nos facturos recepimus, regulam* vulgarem, *univerſalem non*

eſſe

esse hanc: ut virgulæ factorum decimalium, signantes speciem minimam, collectæ in unam summam superscribantur notæ dextimæ in producto totali. *Nam*, TAB. LOG. Fig. 3. Ex, gr. *sint multiplicandi* $4'$ *per* $2'$, *dico productum esse* $8'$, *id est octo pedum*, *ergo productum* $8'$, *hoc modo signatum* $(8'')$ *male per duas virgulas exprimitur.* Ostenditur: *vel enim appositæ juxta modum* vulgarem *virgulæ retinent suam significationem digitorum*; *vel non retinent? si retinent*, *falsum est*, *productum ex* $2'$ *pedibus in* $4'$ *pedes esse* $8''$ *digitos*, *quia evidens est*, *esse* $8'$ *pedes* ☐, *si vero non retinent significationem digitorum*, *sed in tali casu*, *duæ virgulæ non* digitos, *sed* pedes, *significare debeant*, *ergo non eadem servatur hypothesis virgularum*, *quæ variatio hypotheseum in omni methodo non levem inducit terminorum confusionem*, *ac perturbationem. Deinde*, *si mutant significationem virgulæ* (*ut eam mutari necesse est*) *novis erit opus regulis docentibus*, *unde initium summendum sit signandi*, *& quot virgulæ pro inducta variatione accipi debeant*, *ad hoc*, *ut proximam speciem indicent*; *quas regulas in productis*, *præsertim cubicis*, *non est facile generales statuere*, *cum supponatur* determinatio *speciei maximæ sinistram versus*, *cujus tamen* determinatio *non docetur universaliter sine algorithmis fractionum decimalium*, *quibus substitutæ sunt virgulæ. Unde apparet nostram methodum*, *& faciliorem*, *& intellectui tyronum longe commodiorem*, *atque in praxi minime erroneam esse.*

SCHOLION IV.

119. *Ne tamen aliquid neglexisse videamur*, *quod tyronibus usui esse queat*, *problema sequens subjungimus*, *quodvis productum juxta vulgarem methodum expressum*, (*secus*, *si non sit expressum*) *ad nostram reducendi*, *modo constet*, *an productum sit quadratorum decimalium*, *an cubicorum*, *seu quod idem est*, *num fuerint factores simplices*, *vel unus eorum quadratus*, *alter simplex. Igitur*

PRO-

PROBLEMA VI.

120. PROP. *Reducere productum logiſticum* □, *juxta methodum vulgarem expreſſum, ad noſtram methodum.* Item *productum logiſticum cubicum vulgarem.*

RESOLUTIO.

I. *Si productum eſt logiſticus* □, Ex.gr. $6^{0}\,1^{\prime}\,5^{\prime\prime}\,2^{\prime\prime\prime}\,2^{iv}\,8^{v}$, inchoando à nota unitatum in ſpecie perticarum, *Ex.gr.* $\overset{0}{6}$, facto inferne *commate*, poſt ſingulas binas notas dextram verſus ponatur *comma*, ut *exemplum docet*: $6^{0},1^{\prime}\,5^{\prime\prime},2^{\prime\prime\prime}\,2^{iv},8^{v}$, deſignabit prima poſt perticam claſſis *pedes*; claſſis ſecunda, *digitos*; tertia claſſis *lineas* □ &c.

Notandum: *Si in dextima claſſe reperiatur una nota numerica (ut in hoc exemplo numerus 8) hæc valere debet decades* □.

Quod ſi non adſint perticæ, pro prima claſſe ſiniſtima, duæ notæ accipiantur, atque ab hac claſſe, reliquæ claſſes per duas notas determinentur, deſignabunt virgulæ, ſupra notam ſiniſtimam poſitæ, ſpeciem maximam. *Ex.gr.* $1^{\prime}\,9^{\prime\prime},4^{\prime\prime\prime}\,4^{iv}$, erunt 19 digiti □, 44 lineæ □

II. *Si productum eſt logiſticus cubicus*, *Ex.gr.* $4^{0}\,5^{\prime}\,1^{\prime\prime}\,5^{\prime\prime\prime}\,7^{iv}\,1^{v}\,4^{vi}\,8$ facto *commate* poſt unitates perticarum, ponatur *comma* post singulas ternas notas dextram versus, ut

0 / // /// iv v vi

in *exemplo*: 4 5,1 5 7,1 4 8, designabit prima post perticas classis, *pedes cubicos*; secunda, *digitos cubicos*, &c.

Notandum: *Si in dextima classe reperiatur una tantum nota numerica, hæc valet centenarios, si duæ, tunc prima valet centenarios, secunda decades.*

Quod si non adsint perticæ cubicæ, tali casu, pro prima sinistima classe tres notæ assignentur, & ab hac reliquæ determinentur, *ut supra* (§. 110.) *de quadratis diximus.* Demonstratio I. partis patet ex (§. 92.) II. partis ex (§. 100.)

CAPUT V.

De divisione logisticorum decimalium.

PORISMA.

121. PROP. *Quod multiplicatio componit seu colligit, tollit aut solvit divisio, & vicissim.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicatio est ejusdem quantitatis toties ad seipsam facta *additio*, quot unitates altera quantitas denotat (§.46.& 90.) & *divisio* est quantitatis minoris à majore toties facta *subtractio*, quoties minor in majore continetur, seu quot unitates denotat quotus, (§. 42.) sed quod colligit

seu

ſeu ponit *additio*, auſert ſeu tollit *ſubtractio*, (§. 37. & 43.) ergo quod *multiplicatio* componit ſeu colligit, tollit aut ſolvit *diviſio*. Q. E. D.

THEOREMA III.

122. PROP. *I. ſi numeri logiſtici decimales □ dividantur per logiſticos ſimplices, quotus producitur logiſticus ſimplex. II. ſi logiſticus decimalis cubicus dividatur per logiſticum ſimplicem, quotus erit logiſticus □, & viciſſim, ſi cubicus logiſticus dividatur per logiſticum □, quotus eſt logiſticus ſimplex.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. logiſticus □ componitur per multiplicationem factorum ſimplicium (§. 90.) ergo per diviſionem ſolvitur iterum in factores ſimplices (§. 121.) ſed factores ſunt *diviſor*, & *quotus* (§. 61. & 67.) ergo ſi numeri logiſtici □ dividantur per logiſticos ſimplices, quotus producitur logiſticus ſimplex. Q. E. D. Eodem modo demonſtratur pars altera.

THEOREMA IV.

123. PROP. *Dividendus logiſticus nequit eſſe logiſticus ſimplex, ſeu unius dimenſionis, ſi tam diviſor, quam quotus emergens ſit logiſticus decimalis.*

DEMONSTRATIO.

Dividendus logisticus æquatur facto, quod producitur ex *quoto* logistico in *divisorem* logisticum ducto (§.61. & 67.) ergo *quotus*, & *divisor* sunt duo factores logistici, sed factum logisticum ex *factoribus logisticis* est duarum dimensionum saltem per (§.90.) ergo *dividendus* logisticus nequit esse logisticus unius dimensionis, id est *simplex*. Q. E. D.

COROLLARIUM.

124. Hinc si *dividendus* proponatur sub forma *simplicis* per virgulas expressus (ut proponitur in logistica vulgari) hic reipsa sub ficta imagine *simplicis*, aut □ est, aut *cubicus*, prout factores, aut erant logistici simplices ambo, aut unus logisticus simplex, alter □. *Ex. gr.* sit:
o / // /// iv
6 1 7 0 7 6 propositus numerus logisticus sub ficta imagine *simplicis*; hic numerus reipsa logisticus □ est, productus ex factoribus simplici-
o / // o / //
bus: 8 4 3, & 7 3 2, atque à nobis sub sua vera imagine propositus habetur (§. 115.) *parа-*
o / //
dig. I. exempl. I. ita expressus: 6 1,7 0,7 6.

SCHOLION.

125. *Etsi dividendus esse nequeat logisticus simplex,* (§. 123.) *sua tamen utilitate non caret hæc fictio, cum ope hujus* valor quoti *in divisione logisticorum facillime determinetur per virgulas*, ut infra patebit. *Itaque ad fictam hanc imaginem simplicis ante divisionem reducendus erit dividendus, si is nondum formam simplicis induit, quæ reductio per resolutionem sequentis problematis ostenditur.*

PRO-

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Reducere numerum logisticum decimalem quemvis □, aut cubicum ad fictam imaginem simplicis.*

RESOLUTIO.

I. *Si in dato numero adsint perticæ;* tali casu, dextimæ notæ reducendi super ponantur tot virgulæ, quot numerantur notæ numericæ inchoando à perticis dextram versus. *Ex.gr.* Sit propositus numerus logisticus □, ad formam fictam simplicis reducendus: $\overset{0}{6}1,\overset{\prime}{7}0,\overset{\prime\prime}{7}6$, erit ad fictam imaginem simplicis reductus: $6\overset{0}{1},707\overset{iv}{6}$. Quia 4 notæ numerantur inchoando à perticis ad finem, quas claritatis gratia adjecto *commate* distinximus.

II. *Si perticæ non adsint;* tali casu, reducetur, si à virgulis speciem in dato numero maximam signantibus inchoando, omnes reliquæ notæ virgulis numero crescentibus signentur. *Ex. gr.* Sit reducendus ad formam simplicis: $\overset{\prime}{1}5,\overset{\prime\prime}{2}2,\overset{\prime\prime\prime}{8}0$, in quo species maxima sunt pedes, erit reductus: $\overset{\prime}{1}\overset{\prime\prime}{5}\overset{\prime\prime\prime}{2}\overset{iv}{2}\overset{v}{8}\overset{vi}{0}$. Seu brevius ultimam tantum signando: $1528\overset{vi}{0}$. *Hæc resolutio demonstratione non eget.*

PROBLEMA VIII.

127. PROP. *Dividere numeros logiſticos decimales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an tam *dividendus*, quam *diviſor* ſint ſub forma logiſtici ſimplicis; *vide exemp. I.* Si non ſint, reducantur, juxta regulas (§. 126.) datas, *vide Ex. II.*

II. Si *dividendus* reductus non continet ſaltem ſpeciem linearum, augeatur in fine tot zeris, quot requiruntur, ut ſub forma ſimplici ſaltem lineas logiſticas contineat, (juxta §. 84.) *vide exempl. III.*

III. Inſtituatur diviſio, ea prorſus methodo, qua in numeris vulgaribus (§. 64.) uſi ſumus, nihil reſpiciendo virgulas, ſed eas pro non adjectis habendo.

IV. Finita diviſione, ut inventus quotus apte per virgulas ſignetur, numerus virgularum, ſpeciem minimam in *diviſore* ſignantium, ſubtrahatur à virgulis *dividendi* itidem ſpeciem minimam denotantibus, & (ſi quotus ſimplex eſt) per reſiduas virgulas ſignetur dextima quoti nota, à qua inchoando ſignentur reliquæ per virgulas numero decreſcentes ſiniſtram verſus. *Vide exempl. I. II. & III.* Si vero quotus □ ſit, (ut fit, ſi logiſticus cubicus per diviſorem ſimplicem dividatur) isque

ſub

ſub ficta imagine ſimplicis lateat, reducendus erit ad veram ſuam formam, per (§. 120.) *Vide exempl. IV.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. demonſtratione non egent. Reg. III. patet ex (§. 86.) ſolum igitur reſtat, ut Reg. IV. demonſtretur: tunc *quotus* juxta datam regulam exacte ſignatus habetur, quando ita ſignatus, per *diviſorem* quoque ſignatum multiplicatus, reſtituit cum iisdem virgulis ſignatum *dividendum*, ſed *quotus* ita ſignatus, & multiplicatus per *diviſorem* ſignatum reſtituit *dividendum* exacte ſignatum per (§. 115.) ergo Q. E. D.

PARADIGMA DIVISIONIS.

logiſticorum decimalium.

EXEMPLUM I.

Sit ſub forma logiſtici ſimplicis.

	0 / // /// iv	0 / //	
I. *Divid.*	6 1 7 0 7 6	(8 4 3	*quotus log. ſimplex, & ſignatus virgulis per reg. IV.*
	0 / //		
Diviſor	7 3 2 . .		
fact. ſub.	5 8 5 6 . .		
II. *Divid.*	3 1 4 7 .		
Diviſor	7 3 2 .		
fact. ſub.	2 9 2 8 .		
III. *Divid.*	2 1 9 6		
Diviſor	7 3 2		
fact. ſubtr.	2 1 9 6		
	0 0 0 0		

EXEMPLUM II.

0 / // ///
Sit dividen. 6,1 5,2 2,8 0
erit
ad formam simplicis.
0 VI (0 / // /// IV
I. *Div. red.* 6 1 5 2 2 8 0 (3 0 7 0 *quotus logist. simplex & signatus virgulis per reg. IV.*
///
Divisor 2 0 0 4 . . .
fact. subt. 6 0 1 2 . . .

II. *Dividend.* 1 4 0 2 . .
Divisor 2 0 0 4 . .

III. *Ividen.* 1 4 0 2 8 .
Divisor 2 0 0 4 .
fact. subtr. 1 4 0 2 8 .

IV. *Dividen.* - - - - - 0
Divisor 2 0 0 4

EXEMPL. III. REG. II.

0 / //
sit div. 8 6 4 *erit auct. zer*
0 / // /// IV (0 / // /
I. *Div.* 8 6 4 0 0 (3 7 5
0 /
Divisor 2 3 . . .
fact. sub. 6 9 . . .

II. *Div.* 1 7 4 . .
Divisor 2 3 . .
fact. sub. 1 6 1 . .

III. *Div.* 1 3 0 .
Divisor 2 3 .
fact. subt. 1 1 5 .

IV *Div.* 1 5 0
Divisor 2 3
fact. subt. 1 3 8

Residuum 1 2 *negligitur ob parvitatem.*

EXEMPLUM IV.

0 / //
Sit dividend. 4 5,1 5 7,1 4 8, *erit reductus ad form. simplic.*
0 IV (0 / // /// IV
I. *Dividend.* 4 5 1 5 7 1 4 8 (6 1 5 2 2 *quotus quadratus, & reductus per* (§. 119.)
0 / //
Divisor 7 3 4 . . . .
fact. subtr. 4 4 0 4 . . . .

II. *Dividend.* 1 1 1 7 . . .
Divisor 7 3 4 . . .
fact. subtr. 7 3 4 . . .

III. *Dividend.* 3 8 3 1 . .
Divisor 7 3 4 . .
fact. subtrab. 3 6 7 0 . .

IV. *Dividend.* 1 6 1 4 .
Divisor 7 3 4 .
fact. subtrab. 1 4 6 8 .

V. *Dividend.* 1 4 6 8
Divisor 7 3 4
fact. subtrab. 1 4 6 8

Residuum - - - - 0 0 0 0

0 / //
6,1 5,2 2,

128.

SCHOLION I.

128. *Examen divisionis instituitur, ope multiplicationis* (§. 115.) *quotus nempe multiplicatus per divisorem restituere debet dividendum.*

SCHOLION II.

129. *Si divisor sit logisticus incompletus, seu si intermediæ species desint, compleatur juxta superius tradita.* (§. 89. 94. & 102.)

SCHOLION III.

130. *Ratio cur in casu reg. II. augendus sit* dividendus *per zeros, hæc est, ut si post divisionem ultimam aliquid remaneat, id in praxi negligatur ob minutiam exiguam, quæ pro nihilo habetur, cum ultra lineas decimales in praxi ordinaria vix procedatur, etsi in Philosophia naturali longe majore opus sit accuratione, nec unquam nimia fuerit, si vel cum indefinite parvis quantitatibus calculus institui posset.*

SCHOLION IV.

131. *Prolixiorem me fuisse in hoc calculo logistico tradendo non diffiteor, in quo etiam à* praxi vulgari *in quibusdam recessi, sed enim noverint tyrones (in quorum gratiam hæc conscripta sunt) nunquam nimium esse posse in eo, quod est fundamentum maximum totius calculi Geometrici, & Philosophiæ naturalis, fidenter ajo, quemadmodum tyro in his logisticorum decimalium Algorithmis egregie versatus, omnes tum Geometriæ praxes, tum Philosophiæ naturalis experimenta ad calculum revocans, inoffenso pede percurrendo, facillimè determinabit; Ita his non insignitus Mathematicus, aut Philosophus, nihil præter errores (si calculum species) loquetur.*

ARITH-

ARITHMETICÆ NUMERICÆ PARS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas numericas.

CAPUT I.

De Reductione numerorum mixtorum Heterogeneorum reducibilium.

PROBLEMA I. UNIVERSALE.

132. PROP. *Reducere quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducibilem ad species inferiores, & vicissim speciem inferiorem ad superiorem.*

RESOLUTIO.

I. *Si species superior, seu major reducenda sit ad inferiorem, seu minorem.* Multiplicetur species major per speciem minorem, id est, per eum numerum speciei minoris, cujus unitates adæquant unitatem speciei superioris, seu majoris. *Ex.gr.* Sint reducendi 7. flor. germ. ad speciem crucif.

cum

cum unus flor. in ſpecie xr. habeat 60 unitates, multiplicentur 7 per 60, erit factum 420 xr. ſeu 7 fl. reducti ad cruciferos.

II. *Si ſpecies inferior, ſeu minor reducenda ſit ad ſuperiorem, ſeu majorem;* opus eſt diviſione, videlicet; ſpecies inferior, ſeu minor dividatur per tot unitates, quot ſpecies inferior continet relate ad unitatem ſpeciei ſuperioris, ad quam reducenda eſt. *Ex. gr.* Sint reducendi 420 xr. ad fl. ger. cum flor. germ. contineat 60 xr. dividantur 420 xr. per 60, & quotus 7 deſignabit fl., ſeu ſpeciem majorem.

SCHOLION I.

133. *Si quod reſiduum ex diviſione ſit, illud eſt ejusdem ſpeciei cum* dividendo. Ex. gr. *Si ex diviſione crucifer. remaneat aliquid, illud ſunt xr.*

SCHOLION II.

134. *Cum ad reductionem numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium prærequiratur notitia ſpecierum inter ſe reducibilium, non inutile cenſuimus, quasdam tabulas ſubjungere, in quibus ſingularum ſpecierum unitates continerentur, quarum uſus ad calcem tabularum declaratur.*

SCHOLION III.

135. *Sua utilitate non carebit nobis in Tranſylvania verſantibus praxim adferre, qua calculo perquam facillimo absque multiplicatione illico determinare licet, quotnam dati flor. germ. conficiant fl. Ung. per Tranſylvaniam uſitatos, & viciſſim, quod ſequentibus duobus problematibus docetur.*

PROBLEMA II.

136. PROP. *Flor. germ. integros in Ung. ope additionis convertere.*

RESOLUTIO.

Conſtare debet operanti, flor. Ung. in Tranſylvania valere 100 *nummos, quales in flor. germ. habentur* 120, *juxta tabulam infra ponendam.* Igitur I. Si dentur flor. germ. quotcunque convertendi in Ungaricos, ſcribantur hi dati flor. germ. bis directè infra ſe invicem, ut unitates unitatibus, decades decadibus &c. reſpondeant, deinde idem numerus florenorum adhuc ſemel infra cæteros, ſed una nota remotius, ſiniſtram verſus, ſcribatur.

II. Subducta linea hi numeri addantur in unam ſummam, cui ſummæ ad dextram adjungatur zerus.

III. A ſumma hac duæ notæ dextimæ abſcindantur, erunt hæ duæ notæ nummi, reliquæ ad ſiniſtram erunt flor. Ung. quos valent dati flor. germ. *Ex.gr.* Quæritur: 16 flor. germ. quot faciunt Ungaricos? Igitur juxta datas regulas ſic ſtabit operatio, id eſt flor. 16 germ. faciunt 19. flor. Ung. & 20 nummos.

16 }
16 } *Reg. I.*
16 }
flor. ———
Ung. 19,20 *nummi*

DEMONSTRATIO
hujus Praxeos.

Quod hoc ordine numeri flor. ſcripti per additionem convertantur in Ung. eſt, quia hujusmodi additio vicem ſubit multipli-

ca-

cationis, quæ fieri deberet per 120 nummos, quot nempe nummos habet fl. ger. juxta (§. 132.); nam ad oculum patet, si 16 multiplicentur per 120, eodem modo collocati reperientur numeri. *Ex.gr.* In quo exemplo productum primum per numerum 2 est 32, sed hoc est 16 additum ad 16. *Deinde* ex producto secundo per numerum 1 patet, quod idem numerus 16 una nota remotior scribi debeat versus sinistram; ac *tandem*, quod zerus in fine summæ addi debeat, ratio est, quia multiplicans 120 habet zerum, ergo: Q. E. D.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 120 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 19{,}20 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

137. Quod si florenis germ. adhæreant crucif. hos per 2 multiplicando, aut (quod idem est) sibimet ipsis addendo, in nummos conversos adde classi nummorum.

COROLLARIUM II.

138. Hac methodo quilibet sibi facile conficere poterit tabellam, in qua ab uno flor. ger. ad 100 flor. conversio habeatur, qua uti poterit ad reducendos quotcunque flor. germ.

PROBLEMA III.

139. *Florenos datos Ungaricales per Transylvaniam usitatos, in German. convertere.*

RESOLUTIO.

I. Vide an flor. Ung. ſint integri, ſine nummis, an vero adjectos habeant nummos. Si ſint integri ſine nummis, appone zerum unum ad dextram, & numerum flor. divide per 12, quotus dabit flor. germ. *Vide exempl. I.*

II. Si quid reſiduum maneat ex hac diviſione, huic reſiduo adde iterum zerum, cujus ſummæ *dimidium* valebit crucif. *Vide exempl. II.*

III. Si floreni adjectos habeant nummos, illos abſcinde à flor. integris, & cum flor. operare, ut in *Reſolutione I.* deinde ad reſiduum, ſi quod eſt, adde abſciſſos nummos, & hujus dimidium dabit crucifer. *Vide exempl. III.*

IV. Quod ſi ſumma nummorum ex reſiduo, & abſciſſis nummis adæquet numerum 120, cujus dimidium eſt 60, numero flor. invento addendus eſt unus flor. *Vide exempl. IV.*

EXEMPLUM I.

Sint flor. Ung. 24 in Germ. convertendi, erit

I. divid. 240 (20 *flor. germ.*
diviſ. 12
fact. ſub. 24

II. div. - - 0
diviſ. 12

EXEMPLUM II.

Sint flor. Ung. 28. *erit*

divid. 280 (23 *flor. ger.* & 20 *cruc.*
diviſ. 12.
fact. 24.

divid. 40
diviſ. 12
fact. 36

Reſid. 4 *addito zero erit* 40, *cujus dimid.* 20 *xr.*

EXEMPLUM III.

Sint flor. Ung. 23 *numi* 40 *erit*

divid. 230 (19 *flor. ger.*
divis. 12 (30 *crucif.*

divid. 110
divis. 12
fact. 108

Residuum 2 *auctum zero erit* 20 *cum* 40 *facit* 60, *cujus dimidium* 30

EXEMPLUM IV.

Sint flor. Ung. 22 *numi* 80 *erit*

220 (18 *flor. germ.*
12. (*crucif.* 60 *seu flor. ger.* 19.

110
12
96

Residuum 4 *auctum zero erit* 40 *cum* 80 *facit* 120, *cujus dimidium* 60 *cruc. seu fl. germ.*

CAPUT II.

REDUCTIONUM TABULÆ XV,

Ad praxim Arithmeticam summe utiles, ad usum vero civilem, & Philosophicum etiam necessariæ.

TAB. I.

Mensurarum vulgarium, seu civilium longitudinis.

			$\frac{1}{4}$ *digiti.*
		Digit.	4
	Pes	12	48
Orgya una	6	72	288

Magnitudo pedis varia in Geometria adferetur.

TAB. II.

Ponderum Angliæ, *quibus in experimentis Philosophicis utuntur.*

Gran. min.			
24	*Gran. maj.*		
480	20	*Uncia*	
5760	240	12	*Libra.*

Uncia valet $585\frac{1}{7}$ *gr. Paris. vel* $499\frac{4}{5}$ *gr. Apoth. Tab. VI.*

TABULA III.

Ponderum Civilium, seu Mercatorum per Austriam, Ungariam, & Transylvaniam.

1 libra hujus æquiponderat 1 lib. 2 unc. 4 gros. 22 gran. pond. Parif.

1. *Drachma, seu Quintl* $\frac{1}{4}$ *loth.*			
1. *Semuncia, seu Loth*	4		
1. *Libra*	32	128	
1. *Centenarius*	100	3200	12800

TABULA IV.

Ponderum Galliæ, & Parisin.

Uncia hujus valet 1 Unc. 12$\frac{5}{6}$ gr. pond. Apoth. Tab. 6.

1. *Carobe, seu filiqua aut tertia pars oboli*						
1. *Grain, seu Granum*	24					
1. *Denier, ou carras, seu numus*	24	576				
1. *Gros, seu grossus*	3	72	1728			
Once, seu uncia	8	24	576	13824		
1. *Marcha*	8	64	192	4608	110592	
1. *Livre, seu libra*	2	16	128	384	9216	221184

TABULA V.

Temporis vulgaris.

			Minut. 2dum
		Minut. 1mum	″ 60
1. *Hora*		′ 60	3600
1. *dies*	° 24	1440	86400
1. *Annus communis*	365$\frac{1}{4}$	8766	525960	31557600

TA-

TABULA VI.

Ponderum Apothecariorum Nostratium.

1. *Granum.*				
20	1. *Scrupulus.*			
60	3	1. *Drachma.*		
480	24	8	1. *Uncia.*	
5760	288	96	12	1. *Libra.*

Granum valet circiter pondus unius grani piperis albi. Ponderis hujus 1 *libra, &* 7 Unc. *faciunt* 1 *libram nostratem Tab III. item* 1 *unc. ponderat* 562 *gr. (Paris.*

TABULA VII.

Ponderum Angliæ, Avoir du pois, seu Civil.

1. *Scrupul.*					
3	1. *Drachma.*				
24	8	1. *Uncia.*			
384	128	16	1. *Libra.*		
43008	14336	1792	112	1. *Centenar.*	
860160	286720	35840	2240	20	1. *Tonna.*

Uncia Angliæ valet 534. *grana pond. arisini. Ponderis vero Apoth.* Tab. VI. *valet* 456. *gr.*

TABULA VIII.

Exhibens numerum librarum inter se, & cum Parisinis æquiponderantium ex Cl. Combe, Negoce rendu facile Pag. 448.

100 *Parisin.*	103 *August. Vind.*	125 *Vratislav.*
100 *Amstelodam.*	104 *Coloniens.*	150 *Genuens.*
100 *Argentorat.*	105 *Antverpiens.*	151 *Bononiens.*
89 *Genevens.*	105 *Hispaniæ.*	152 *Florent.*
95 *Berg. Norveg.*	105 *Lipsiens.*	166 *Venetia.*
98 *Basileens.*	113 *Dantiscan.*	169 *Neapolit.*
98 *Norimberg.*	114 *Lusitan.*	109 *Londin. min.*
102 *Hamburg.*	117 *Stockholm.*	97 *Londin. maj.*

Si Uncia Apoth. (ut ponit Cl. Eisenschm.) *habet* 562 *gr. Paris. tunc Vien. lib.* $86\frac{10}{32}$ *ferè faciunt* 100 *Paris.*

TAB. IX.
Valor pecuniæ Germ. in Transylvania.

Nummi.

1. *Crucif.*			2
1. *Grossus.*		3	6
1. *flor. germ.*	20	60	120

Marianus, valet 17. xr. & septenarius 7. xr. ut in Austria, & Ungaria.

TAB. X.
Pecuniæ Ungaricæ per Transylvaniam.

Nummi.

2			1. *Crucif.*
6	3		1. *Grossus.*
100	50	$16\frac{2}{3}$	1. *fl. Ung. in Transf.*

Marianus, & septenarius valorem suum retinent ut in Austria.

TABULA XI.
Valor pecuniæ Germ. in Ungaria.

Nummi.

1. *Crucif.*						$1\frac{2}{3}$
1. *Grossus.*					3	5
1. *Septenar.*				$2\frac{1}{3}$	7	$11\frac{2}{3}$
1. *Marianus.*			$2\frac{3}{7}$	$5\frac{2}{3}$	17	$28\frac{1}{3}$
1. *flor. Germ.*		$3\frac{9}{17}$	$8\frac{4}{7}$	20	60	100
1. *Aureus Kremn.*	$4\frac{1}{5}$	$14\frac{14}{17}$	36	84	252	420

TABULA XII.
Mensuræ Vini in Transylvania.

Quadrans

1. *Sextarius, seu Media.*				2
1. *Cupa, seu Mensura.*			2	4
1. *Urna Transylv.*		8	16	32
1. *Urna Germ. in Transyl.*	5	40	80	160

2. Mensuræ Transyl. faciunt 1¼. mensuram Austriacam, vel Ungaricam cupam.

TABULA XIII.

Mensuras Geographorum exhibens.

1. Granum Hordei.										
4	1 Digitus.									
16	4	1. Palmus.								
64	16	4	1. Pes.							
320	80	20	5	1. Passus.						
40000	10000	2500	625	125	1. Stadium.					
320000	80000	20000	5000	1000	8	1. Milliare Italicum.				
1280000	320000	80000	20000	4000	32	4	1. Milliare Germ. com.			
320000	80000	20000	5000	1000	8	1	$\frac{1}{4}$	1. Minutum.		
19200000	4800000	1200000	300000	60000	480	60	15	60	1. Gradus.	
9612000000	1728000000	432000000	108000000	21600000	172800	21600	5400	21600	360	Circulus maximus
2201600000	550400000	137600000	34400000	6880000	55040	6880	1720 ferè	Diameter		Telluris.

NB. Granum Hordei secundum latitudinem suam accipitur.

TABULA XIV.

Valor pecuniæ Germ. secundum Valachos in Transylvania.

Nummi.

2	1.*Crucif.*				
6	3	1.*Grossus.*			
12	6	2	1.*Susták.*		
34	17	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{6}$	1. *Horgas, seu Marian.*	
102	51	17	$8\frac{3}{6}$	3	1.*Vonás flor.*

TABULA XV.

Monetariorum nostratium, exhibens gradum puritatis metallorum.

1.*Granum.*

12	1.*Carat, seu Gradus.*		
18	$1\frac{1}{2}$	1. *Loth.*	
288	24	16	1.*Marcha.*

Puritas obrysi, seu nullo heterogeneo metallo permisti auri statuitur esse 24 carat, seu graduum, nempe totum pondus 16 loth, continet 24. gradus, seu carat auri puri; & secundum hunc numerum graduum, defectum puritatis exprimunt tam Monetarii, *quam* Aurifabri Ex. gr. *Dum dicunt, speciem auri dati esse 23 carat, indicare volunt, in Marcha auri admixtum esse unum carat de metallo heterogeneo.* Ex. gr. Cupro. *Similiter puritatem summam argenti statuunt esse 16. loth, id est, in Marcha dantur 16. loth argenti puri, & secundum hunc numerum lothonum (quem* probam *vocant) exprimunt defectum puritatis argenti, dum dicunt.* Ex. gr. *Hoc argentum est 14. loth seu probæ decimæ quartæ, indicare volunt, Marcham, seu (16. loth) hujusmodi argenti continere argenti puri loth 14. reliquos vero 2. loth, ad complendos 16. lothones, esse metallum heterogeneum* Ex. gr. *Cuprum admixtum; quam permixtionem* legam *vocant. Si vero pondus consideretur, tunc 72 aurei Kremn. faciunt* Marcham, *& unus aureus ponderat 4. grana Tabulæ XV. 3. aurei faciunt unum carat ponderis, 1. carat appendit 160. grana ponderis Apothecariorum nostratium.* PRO-

PROBLEMA IV.

140. Prop. *Uſus harum Tabularum.*

Resolutio I.

Si quæratur: unitas datæ ſpeciei majoris, quot continet unitates ex data ſpecie minore? Ex. gr. *Orgya civilis, quot continet digitos?* Exquire in Tab. I. titulum *Orgyæ*, & titulum *digiti*, & communis concurſus, ſeu cellula dabit petitum numerum, 72 digitorum; eadem eſto regula de cæteris tabulis.

Resolutio II.

141. Si quæratur: *Ex. gr.* 8. orgyæ civiles quot faciunt digitos? Exquire, in Tab I. unius orgyæ digitos, per prius dicta, qui ſunt 72, hos multiplica per datum numerum 8, dabit productum 756 digitos, qui continentur in 8 orgiis; *Hæc reſolutio eſt eadem, quæ probl. univerſ.* (§. 132.) *de reductione majoris ad minorem ſpeciem.*

Resolutio III.

142. Si quæratur: *Ex. gr.* 756 digiti, quot faciunt orgyas? Exquire numerum digitorum unius orgyæ in Tab. I. quem invenies 72, & per hunc numerum divide datos 756 digitos, dabit quotus numerum orgyarum petitum 8. *Hæc reſolutio eadem*

eſt, cum probl. univ. (§.132.) *de reductione ſpeciei minoris ad majorem.*

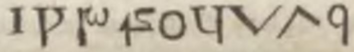
SCHOLION.

143. *Reliquos harum tabularum uſus dabimus ſuis locis; interea curioſo tyroni, coronidis loco, ultimas horum elementorum paginas, non ineruditis in notas Arithmeticas animadverſionibus locupletatas, ad eruditum uſum defero;* Primum: *notas numericas Arabum modernorum,* dein *eorundem Arabum* (*vel ut alii volunt Indorum*) *antiquiores in Europam illatas numerorum figuras, quibus Europæi ad ſæculum ferè* XVI. *uſi fuere, adferam;* Subinde *originem Romanarum notarum dabo, ac poſtremo Tabellam tum Hebræi, tum Græci Alphabeti valorem literarum numericum exprimentem, adjunctis quibusdam veterum Græcorum notis compendiariis. Itaque.*

CAPUT III.

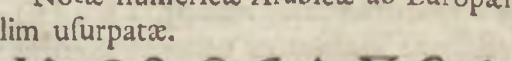
Animadverſiones in notas numericas.

Figuræ, ſeu notæ Arabibus hodiernis uſitatæ.

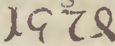
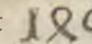


1 2 3 4 5 6 7 8 9

Notæ numericæ Arabicæ ab Europæis olim uſurpatæ.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Notis his poſtremis Arabicis, etiamnum in plerisque Templis, & ædibus antiquioribus, per Auſtriam, Ungariam, & præſertim per Tranſylvaniam in ſedibus, ut vocant, Saxonicis, annos legimus conſignaſignatos, *Ex.gr.* legitur annus poſitarum ædium: , aut , vel , quos, niſi eruditus lector, nemo alter interpretabitur.

Notæ Romanæ hodiernæ, quæ vulgo pro literis latinorum habentur.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

L.	C.	D.	M.
50	100	500	1000.

En Originem harum notarum.

Quemadmodum hodiernum rude vulgus hominum, ita Romani populi Patres primi, ignari Arithmeticæ, res ſuas numero definitas, lineolis, ſeu virgulis deſignabant, & exprimebant *Ex.gr.* Volentes exprimere, ſe viginti modios tritici venumdediſſe, ita ſcripſerunt: ||||||||||||||||||||, atque harum ope virgularum maximos quosvis exprimebant numeros; qui modus conſignandi numeros, utpote prolixus admodum, & rudis tædium non leve conſignandi, computandique creabat. Igitur de breviore modo ſcribendi per easdem uſu receptas virgulas à quibusdam acutioris ingenii cogitatum eſt, videlicet, ut duabus, tribusve virgulis, varie ad ſe invicem inclinatis, prolixiorem modum redderent breviorem, conſenſuque communi hominum in uſum civilem inducerent. Itaque compendium, à numero *quinario* inchoantes, ita exorſi videntur.

1. Numerum IIIII quinque virgularum, duabus virgulis ad ſe invicem inclinatis indicabant, videlicet \/ dein celerius exarando ita conjungebant V, unde orta figura hodierna numeri *quinque* (V), ſeu litera (v).

2. Hac figura numeri *quinque* \/ cum adjunctis dextram verſus virgulis rectis exprimebant cæteros usque ad decadem, ſeu numerum decem; cum itaque bis *quinque* ſit *decem*, è duabus notis numeri *quinque*, ſibi ad verticem oppoſitis, figuram numeri *decem* compoſuerunt, videlicet \/ /\, quam celerius ſcribendo, ita efformabant X, cui originem debet nunc uſitata nota (X) ſeu litera (x).

His quatuor virgulis IIII, nota *quinarii* \/, & *decenarii* X compendium quidem in minoribus, at non in majoribus numeris nacti Romani, cæteras quoque numerorum figuras invenêre.

3. Itaque per incrementum *quinarii*, cum X X X X X ſeu quinquies decem, fit *quinquaginta*, è binis virgulis rectis hoc ſitu |_ collocatis figuram com-

componentes, *quinquaginta* indicarunt, quam celerius figurando, ita ſcribebant L, ex qua hodierna nota (L) ortum habet.

4. Porro, cum *centum* ſit bis quinquaginta, binas notas numeri *quinquaginta* I_ I_ hoc ſitu I=, quaſi inverſam unam I‾, alteram rectam I_ conjungentes expreſſerunt, quam celerius exarando, ita figurabant I=, dein ita C, ac tandem celerrime fingendo in hanc C abiit, non abſimilem literæ hodiernæ (C), centum deſignanti.

5. Cum quinquies centum ſint *quingenta*, loco figuræ centum, quinquies repetitæ, notas duas centenarii, converſim jungendo I=I, ſubſtituerunt, quæ celeritate ſcribendi in hanc I⊐, dein in hujusmodi I), aut ſimilem D, ac tandem in hanc D figuram, literæ (D) conformem, & hodie uſitatam tranſiit.

6. Denique cum bis quingenta efficiant *mille*, binas *quingentarum* notas converſim locando, I=I=I *mille* efformabant, atque celerius ſcribendo ita ⊏I⊐ ſeu CIↃ, celerrime ↀ, vel CD, aut M, quæ ultima figura, ſimillima minori literæ (m) occaſionem præbuit ſcribis, eam elegantius efformandi per literam majorem (M) nunc uſitatam. Harum varias figuras ſub unum conſpectum hic exhibeo.

Nu-

Numeri Romani originarii.

Notæ primævæ	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
Celerius ſcriptæ	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
Multo celerius	I,	V,	X,	L,	C,	IƆ,	CIƆ
Celerrimè	I,	V,	X,	L,	C,	IƆ,	CIƆ
Ex quibus							
Ortæ hodiernæ	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.

His ſeptem figuris omnem numerum conſignabat populus Romanus ſua adhuc ruditate felix, quibus ingenioſa poſteritas alias quasdam adjecit, quarum nonnullas ex Arithmetica Cl. Poetii excerptas damus.

Signum ∞ vel ꝏ, aut ◇◇ uſurpatum eſt loco numeri 1000.

Signum , vel , aut CCIƆƆ ſignificabat numerum: 10000.

Geminata vel , deſignabant bis 10000, ſeu 20000.

Si ſignum millenarii (∞) anteponatur, *Ex.gr.* ∞ , ſubtrahendum intelligitur, id eſt: 19000.

Signum vel ſignificat 20, & denotat 30. quibus uſu poſteriore acceſſerunt ſigna ab Authoribus ætatis etiam aureæ paſſim uſurpata ſequentia.

(I),	IƆƆ,	((I)),	IƆƆƆ,	(((I))),	((((I)))).
$\overline{\text{I}}$,	$\overline{\text{V}}$,	$\overline{\text{X}}$,	$\overline{\text{L}}$,	$\overline{\text{C}}$,	$\overline{\text{M}}$.
1000,	5000,	10000,	50000,	100000,	1000000.

SCHOLION.

144. *Ne vero quispiam minus eruditus existimet, expositam harum notarum originem, & natales, aut lusum ingenii, aut opinionem sua carentem ratione, is quæso consulat scriptores rerum antiquarum, qui lapides, manuscripta, nummos, cæteraque venerandæ antiquitatis monumenta pulcherrima, his notis consignata, erudito orbi reliquerunt*; Vide Cl. Eisenschmid. Disquil. Tab. II. *Et certe, si rogatus fuerit quispiam dare rationem, cur nota literæ* (V) *denotet numerum* quinque, *aut litera* (X) decem, *vel litera* (L) quinquaginta, *litera* (D) quingenta, *litera* (C) centum, *item* (M) mille: *Si originem, & natales harum notarum ignoret, quid roganti erudite reponat, non inveniet; unde liquet, cui fundamento vocum chronographicarum lusus innitatur, quarum literæ, si ad natales suos reducantur, litem grammaticis moveant, cæteris vero ænigma intentent, est necesse, ut isthoc:*

I꞊ONI꞊L_I/I꞊IAI꞊I꞊I.

TABULA COMPENDIARIA,

Notarum numericarum Hebræis, & Græcis, scriptoribus usu receptarum in gratiam eorum, qui lectione eruditorum librorum, cumprimis rerum antiquarum notitia delectantur.

Monades, seu Unitat.					Decades.				
Hebr.	*Græc. M.*	*min.*	*mi.*	*vulg.*	*Hebr.*	*Græc. M.*	*min.*	*mi.*	*vulg.*
א	I	ά	α	1	י	Δ	ί	ι	10
ב	II	β'	β	2	כ	ΔΔ	κ'	κ	20
ג	III	γ'	γ	3	ל	ΔΔΔ	λ'	λ	30
ד	IIII	δ'	δ	4	מ	ΔΔΔΔ	μ'	μ	40
ה	Π	ε'	ε	5	נ	|Δ|	ν'	ν	50
ו	ΠI	ς'	ς	6	ס	|Δ|Δ	ξ'	ξ	60
ז	ΠII	ζ'	ζ	7	ע	|Δ|ΔΔ	ό	ο	70
ח	ΠIII	η'	η	8	פ	|Δ|ΔΔΔ	π'	π	80
ט	ΠIIII	θ'	ϑ	9	צ	ИИ	ς'	ϙ	90

Cen-

Centenarii.

Hebr.	*Græc. maj.*	*min.*	*min.*	*vulgar.*
ק	H	ρ'	ρ	100
ר	HH	σ'	σ	200
ש	HHH	τ'	τ	300
ת	HHHH	υ'	υ	400
ך	|H|	φ'	φ	500
ם	|H|H	χ'	χ	600
ן	|H|HH	ψ'	ψ	700
ף	|H|HHH	ω'	ω	800
ץ	|H|HHHH	ϖι'	ϡ	900

Chiliades, ſeu Millenarii.

א,	X	,α	α,	1000
ב,	XX	,β	β,	2000
ג,	XXX	,γ	γ,	3000
ד,	XXXX	,δ	δ,	4000
ה,	|X|	,ε	ε,	5000
ו,	|X|X	,ϛ	ϛ,	6000
ז,	|X|XX	,ζ	ζ,	7000
ח,	|X|XXX	,η	η,	8000
ט,	|X|XXXX	,θ	θ,	9000

Myriades, ſeu decem millenarii.

י,	M	,ι	ι,	10000
כ,	MM	,κ	κ,	20000
נ,	|M|	,ν	ν,	50000
ס,	|M|M	,ξ	ξ,	60000
צ,	|M|MMMM	Ϙ	ϙ,	90000

Cen-

Centum millenarii.

Hebr.	Græc. maj.	min.	min.	vulgar.
ק,	XH,	,ρ	ρ,	100000
ך,	$\boxed{\text{XH}}$	,φ	φ,	500000
ם,	$\boxed{\text{XH}}$XH,	,χ	χ,	600000

Et ſic de aliis.

Tres lineæ, quibus aliqua litera circumdatur, eſt figura literæ Π, quæ cum 5 ſignificet, indicat valorem literæ ſibi incluſæ quinquies auctum, ut ex Schemate liquet.

SCHOLION I.

145. *Si quis ultro progredi voluerit in numeris, modum precedendi facile ex tabula intelliget; ex qua etiam ratio colligendi, & componendi numeros liquet; ſic: ſi quis præſentem annum 1755 deſignare vellet per literas Græcas, eum denotare poterit vel majuſculis* X$\boxed{\text{H}}$HH$\boxed{\Delta}$Π. *vel minuſculis* ,αψνε, *aut ſimpliciter* α,ψνε, *item Hebraice:* אןנ״ה,

SCHOLION II.

146. *Præter has in antiquis græcorum monumentis reperiuntur etiam ſimiles numerorum expreſſiones; Ex. gr.* *ſignificat* 1000, *ſupra quam figuram ſi ſcriptæ reperiantur literæ, ita accipiendæ ſunt, ut literæ monadum denotent* decades, *decadum*, centenarios, *centenariorum* millenarios; Ex. gr. *Apud Ptolom.* *legitur* λα ,αψπγ, *id eſt*: 310000, & 1783. *ſimul* 311783. *Item apud eundem* κβ δ,χθ, *loco* 224609.

CAPUT ULTIMUM.

Tyronem manuducens ad praxim, & usum quatuor Algorithmorum Arithmetica numerorum integrorum.

USUS ADDITIONIS.

QUÆSITUM I. Quando utendum Additione? ℞. Cum additio ſit collectio plurium numerorum partialium in unum totum (§. 30.) conſtat ampliſſimum additionis uſum in commerciis, conventisque hominum eſſe, dum rationes *accepti*, & *expenſi* reddendæ, aut expoſcendæ ſunt; Itaque additione utimur, quando indagamus ſummam acceptorum, aut expoſitorum, unius ſeptimanæ, vel menſis, aut anni, vel pluriuum etiam annorum generalem ſummam. *Sic* Magiſter rationum (*vulgo* Perceptor, *aut* Proviſor) *rationem inire volens, quantum toto anno perceperit? colligit, aut addit ſingularia accepta ſeu hebdomadarum, ſeu menſium in unam ſummam, quæ oſtendit quantum toto perceperit anno. Per additionem quoque indagamus, quantum per particulares expenſas erogatum, aut venditum, vel diſtractum, aut quoquo modo conſumptum ſit longiore quovis elapſo tempore.*

USUS

USUS SUBTRACTIONIS.

QUÆSITUM II. Quando utendum ſubtractione? ℞. Cum per ſubtractionem innoteſcat Reſiduum, ſeu differentia duorum numerorum (§.37.) ſubtractione utimur, quotiescunque indagamus differentiam, vel reſiduum duorum quantorum quorumvis. *Sic* Oeconomus *ex acquiſitis per annum frumenti metretis 2685 ſequenti anno partim venum dedit, partim in domeſticas neceſſitates conſumpſit metretas 1899 (ut illi ex libro rationum expoſitarum conſtat) quærit igitur ante meſſem novam quot metretas adhuc reliquas habeat? ſubtrahendo ergo 1899, à 2685, reperiet reliquas ſibi adhuc eſſe debere 786 metretas; quod tamen reſiduum frumenti, ſi actuali adhibita menſuratione, cum imto calculo non reſpondeat exacte, neminem aut furti, aut infidelitatis arguat Oeconomus, cum grana frumenti recentis ob humorem nativum turgentia, & menſurata majorem numerum metretarum conficiant, quam tempore diuturno ſiccata, ut nórunt Oeconomi; quod etiam in liquidis obſervandum occurrit.*

Sic quoque Paterfamilias *rationem inire volens perceptæ ex cenſu annuo, rebusque Oeconomicis pecuniæ,* Ex gr. 3427 *fl. Ger.* 45. *xr. cum expoſita eodem anno pecunia*

3342 fl. Germ. 55 xr. per ſubtractionem inquirit in reſiduam pecuniam, quam in dato exemplo reperiet eſſe 84 *fl. Germ.* 50 *xr. unde liquet & hujus algorithmi uſus per omnem vitam civilem ampliſſimus.*

USUS MULTIPLICATIONIS.

QUÆSITUM III. Quando utendum multiplicatione? ℞. Cum multiplicatio ſit ejusdem numeri ad ſeipſum toties facta additio, quot alter quivis datus numerus unitates continet (§.46.) patet, & hujus algorithmi uſum frequentiſſimum eſſe in commercio humano; nam multiplicatione utendum eſt, quotiescunque indagamus ſummam, ſeu quantum, quod conſurgere debet ex repetita ejusdem numeri ad ſeipſum facta additione: *Ex.gr.* Præfecto annonæ *experientia conſtat juxta præſcriptam normam in* 2000 *Milites ſingulis menſibus diſtribui farinæ metretas* 768, *quærit pro toto anno, ſeu per menſes* 12, *quot metretas erogaturus eſt in eosdem* 2000 *milites; addit ergo* 768 *metretas ſibimet duodecies, ſeu per* 12, *qui eſt menſium numerus, multiplicat* 768 *metretas, & factum* 9216 *dabit metretas intra annum* 2000 *militibus diſtribuendas.* Item Proviſor rei œconomicæ *habet unum agrum, ad quem conſerendum ſiliginis metretas inſumit* 16, *habet autem alium agrum, quin-*

quies majorem isto, quærit, quot metretis ejusdem frumenti ad conserendum illum agrum opus habeat, multiplicat igitur 16 per 5, & factum 80 indicat numerum metretarum, quibus opus habet ad conserendum agrum quinquies majorem priore.

USUS DIVISIONIS.

QUÆSITUM IV. Quando utendum divisione? ℞. Præter innumeros fere casus divisione in vita communi utimur, quoties inquirimus in partem unam, quæ emergere debet, si certa summa in plures partes æqualiter, vel inæqualiter partienda sit. *Ex. gr. Habeo legatam summam pecuniæ 360 fl. Germ. in 24 pauperes æqualiter erogandam, quæritur, quot floreni singulis pauperibus dandi sunt? dividendo itaque numerum 360 per 24, prodibit quotus 15 fl. Germ. quæ est pars vigesima quarta de 360 flor. danda singulis pauperibus.* Item Præfectus annonæ *notum sibi habet, quod in 2000 milites spacio unius anni, seu 12 mensium, erogatæ sint 9216 metretæ frumenti, quærit, quot singulis mensibus aut erogatæ sint, aut erogari debeant? dividendo itaque 9216 per 12, emergit quotus 768 metretæ, spacio unius mensis erogatæ, aut erogandæ. Item cuipiam civitati impositum est quantum pecuniæ in ærarium Regium conferendæ 7620 fl. Ger.*

reperiuntur autem cives esse 1524, quæritur, quid singuli conferre debeant? dividendo itaque 7620 per 1524, emergit quotus 5, seu totidem floreni à singulis civibus æqualiter conferendi.

SCHOLION.

Cæteros fere innumeros horum algorithmorum per omnem Mathesim, Philosophiam naturalem, ac vitam socialem usus, docentis institutioni, & discipulorum industriæ in datis circumstantiis usurpandos relinquimus potius, quam ut iis hic loci referendis, molem augendo, libellum pretiosum nonnullis Tyronibus reddamus. Porro hæc, quæ de algorithmis numerorum integrorum à nobis dicta sunt, reliquorum omnium, quæ per universam arithmeticam traduntur, fundamenta, atque elementa esse, quisque facile assequetur, cum nihil aliud in quæstionibus arithmeticis præcipiendum sit, quam, ut numeri vel addantur, subtrahanturve, *aut* multiplicentur, dividanturve. *Itaque, nisi Tyro, in his algorithmis probe sit exercitatus, frustra se se ad alia conferet, quæ ad Gloriam DEI Majorem ex bono Patriæ, ac vitæ civilis commodo consequendam, tradituri sumus.*

FINIS ARITHMETICÆ
Numericæ integrorum.

IN-

INDEX PROBLEMATUM.

PARTIS I.

De Natura, & Algorithmis numerorum vulgarium integrorum.

PARTIS II.

De Logistica decimali Geometrarum.

PARTIS III.

De Reductione numerorum mixtorum, & Animadversionibus in notas Numericas.

O. A. M. D. G.

ELE- MENTA AL- GEBRAE.

PRÆFATIO.

ALgorithmis quatuor Arithmeticæ numericæ instructo Tyroni Prima Algebræ *principia traditurus, ad summum scientiarum apicem aditum pando. Est hæc scientia inter Mathematicas hujus Ævi præcipua, ac nobilissima, quæ methodo Analytica veritates Mathematicas quantumlibet ignotas, & intricatas sagacitate mira feliciter detegit, explicat, invenit. inventas stricto compendio clarissime demonstrat, inque methodum* Syntheticam *non sine legentium admiratione ordinat. Hujus scientiæ tanta quorundam Mathematicorum animis insedit æstimatio, ut* Divinam *appellarent propterea, quod à sensuum cognitione longe remotissima perscrutando, nullis numerorum, aut mensurarum finibus, nulla magnitudinum mole conclusa per omnem, qua late patet veritatum Mathematicarum, rerumque naturalium campum diffusa quidquid* Quantum *audit, sibi proprium faciat, eaque facilitate abstrusa quæque pandat mysteria, ut oracula fundere videatur.*

Mirandam hanc artem munere DEI veteribus quoque usitatam fuisse (cujus ope Theoremata, ac Problemata invenerint) quamque ipsi, ut eo major subiret alios inventorum admiratio, studiose dissimulaverint, Græcum de Arithmetica testatur opus a Diophanto Alexandrino *conscriptum, signisque consignatum Algebraicis.* * *Nec immerito*

* Floruit Alexandriæ *Diophantus Mathem.* seculo post Christum natum secundo, scripsit 13. de Algebra libros, quorum 6. tantum hodie supersunt *à Xylandro* latinitate donati, hos primis Typis Anno 1575. in lucem datos subinde *D. Casparus Bachet* commentariis suis Anno 1621. editis, auxerat.

scientia hac veteribus nullo non æstimanda pretio, tanquam summus mathematum Thesaurus secreti silentio tecta, paucisque discipulorum, (ut opinor) concredita, studiose custodienda curabatur, cujus finem, ac scopum esse norant, quantitatem, sub quibusvis quæstionis etiam difficillimæ involucris delitescentem, ex levissimis, ac obviis indiciis (ut ita dicam) subodorari, tantisque veritatum certissimarum divitiis, quasi aliud agendo Philetis Sui *paucarum horarum laborem levissimum remunerari, quas arte Synthetica, summo etiam ingenio præcellens, labore maximo vix unquam satis assequeretur.*

Quapropter Recentiores hac arte beati, vim ejus mirandam in perscrutandis, determinandisque naturæ phœnomenis fausto successu experti, Philosophica sua circa res naturales dogmata Algebraicis expressa formulis proposuere, probe gnari, unicâ sæpe lineâ Algebraicis rite signata figuris, tot tantaque naturæ mysteria declarari, quibus explicandis (si verbis uterentur) complures paginas conscribendi necessitatem sibi imponerent.

Quæ cum ita sint, Matheseos juxta, ac Philosophiæ Recentiorum Studiosus diligentem scientiæ huic operam navet, oportet, qua adjutus non sinè sincera voluptate animi ea reperiet Marte suo, quæ è veterum libris magna & temporis, & scientiæ jactura vix hauriet sine tædio, itaque secum statuat velim Tyro Analyseos, tantum se profecturum in Mathematicis, ac Philosophia naturali, quantum exercitatus fuerit in Algebra Geometriæ juncta, cujus prima principia duntaxat Recentiorum more, ad captum Tyronum methodo clara in DEI Gloriam concinnata, isthic propono. Velim autem ea sibi in memoriam revocet Tyro monita, quæ Elementis Arithmeticæ præmiseram.

CON-

CONSPECTUS

PARTIUM, ET CAPITUM
Algebræ.

PARS I.

De Arithmetica literali, seu Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.

PARS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

PARS

PARS III.

De Analysi speciosa, seu arte resolvendi Problemata, & Quæstiones quantumvis reconditas.

PARS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, usu Regulæ Aureæ, Inventione Theorematum, ac Problematum.

ELE-

ELEMENTA ALGEBRÆ
PARS I.
DE ARITHMETICA LITERALI,
SEU
Algebra tam ſpecioſa, quam numeroſa integrorum cum fractis.

CAPUT I.
Hypotheſes, & Definitiones in Algebram univerſam.

DEFINITIO I.

1. A*Lgebra* eſt ſcientia, quæ ope literarum alphabeti, & certis adhibitis ſignis per regulas ſibi proprias inquirit in quantitates, & veritates ignotas, easque ex datis quibusdam cognitis ſecundum axiomata *Æqualitatis*, infallibiliter eruit, ac demonſtrativè deter-

minat. Dicitur etiam *calculus universalis*, quia literæ universaliter significant quamcunque quantitatem, pro qua significanda assummuntur.

SCHOLION.

2. *Dividitur* Algebra *in* Arithmeticam literalem, *seu* speciosam, *& in* Analysim sublimiorem; Illa, *substitutis loco numerorum literis, in naturam numerorum, & veritates Arithmeticas* universaliter *inquirit*, Hæc *quantitates quasvis finitas, & mensurabiles per universam Mathesim, ac Philosophiam vagantes eruit, demonstrat, ac regulas universales invenit, & statuit. Prior illa, si numeris (non substitutis literis) utatur, appellatur etiam* Algebra numerosa.

DEFINITIO II.

3. *Quantitas* dicitur, quidquid addendo augeri, aut subtrahendo minui potest. *Quantum* verò appellatur, quod constare partibus intelligitur; harum respectu vocatur etiam *Totum*.

HYPOTHESIS I.

4. *Literæ Alphabeti minusculæ substituuntur in Algebra pro* quantitatibus ; *&* *quidem literæ alphabeti priores*, Ex. gr. a, b, c, *&c. adhibentur pro quantitatibus nobis* notis, & cognitis. *Ultimæ vero* x, y, z, *pro* ignotis, *seu* quærendis, & determinandis *usurpantur*.

SCHOLION I.

5. *Cum* quantitatis *nomine intelligatur quidquid augeri vel minui potest (§. 3.) literæ alphabeti non tantum pro numeris, sed etiam pro lineis, areis, corporibus, & universim pro omni quantitate substitui* pos-

possunt; Utiliter autem quantitates cognitæ per primas, ignotæ per ultimas alphabeti literas exprimuntur, ut imaginationi, ac memoriæ distinctè exhibeatur quantitas, cui inquirendæ per datas regulas insistit operans. Sunt, qui, ut memoriæ, & imaginationi adhuc melius subvenirent, literis utuntur initialibus eorum nominum, per quas, quantitates tanquam cognitæ denominantur. Ex. gr. *Locò datæ quantitatis cognitæ* Temporis, *ponunt literam* T, *locò* ponderis P, *locò* milliarium M, *locò* celeritatis C, *&c. quod laudibile Recentiorum inventum etiam nos in Algebra ad Geometriam applicata sequemur; Ignotas tamen, seu quærendas quantitates non aliter, quàm per ultimas literas* x, y, z, *appellabimus.* Vieta *post antiquiores Algebræ restaurator, & inventor usus est literis majoribus alphabeti, alii cum Anglis secuti* Harriotum *incognitas quantitates per* vocales, *cognitas per* consonantes *exprimebant. Literis minusculis usus est* Cartesius, *cujus praxim hodierni ferè omnes sequuntur præter Anglos quosdam.*

SCHOLION II.

6. *Quoniam literæ substituuntur pro quacunque quantitate* (§. 4.) *eæque sic substitutæ*, universaliter significant *illam quantitatem, pro qua substitutæ sunt* (§. 1.) *sequitur calculum literalem Algebræ, esse calculum* quantitatum indeterminatarum: *non quidem in hoc sensu, quasi talis quantitas in se non esset determinata, & certa, sed quod relatè ad* unitatem (*quæ nobis arbitraria est*) *per quam determinatur talis quantitas, non sit determinata, eò quod unitas non supponatur determinata; determinata autem* unitate, *& ipsa quantitas determinata intelligitur. Sic, si litera* a *significet* altitudinem Ex. gr. *montis, aut turris, hæc litera* a *significare potest altitudinem magnam, aut parvam, mensurabilem per perticas, aut pedes, aut tantum per digitos, & hoc modo dicitur quantitas* a indeterminata; *si verò supponatur altitudo* a, Ex. gr. montis, *esse centum pedum, determinata habetur* unitas *nempe* pes, *à qua determinata, determinatur quoque quantitas altitudinis* a. *Et in hoc sensu calculus literalis, dicitur calculus* universalis, *seu* indeterminatorum, *vimque obtinet* regulæ, *ac* Theorematis universalis, *quidquid per literas ritè expressum habetur, ut inferius declarabitur.*

SCHOLION III.

7. Ut *Tyronibus* (*qui usu idæarum universalium destituti in primis Algebræ algorithmis*, & *principiis*, *nescio*, *quas tenebras experiri solent*, *aut è præjudiciis aliorum sibimet monstrosa mysteria fingunt*) virtus, *ac non satis laudanda* vis universalis *Algebræ ob oculos ponatur*; *paritate desumpta ex Arithmetica numerica*, *ut puto*, universalitatem, & indeterminationem *quantitatum literis alphabeti expressarum*, *ad captum declarabimus. Itaque*, *quemadmodum in Arithmetica numerica*, signa, *seu* notæ numericæ puræ, & abstractæ *ab omni materia* Ex. gr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. *significant suo modo* universaliter, & indeterminate *omnem numerum mixtum*, & *concretum*, Ex. gr. *numerus* purus, & abstractus 5, *significare potest* 5 studiosos, *vel* 5 domus, *vel* 5 libros, *aut* 5 urnas vini, 5 perticas, 5 ulnas &c. *ita pariter* (*imo magis universaliter*) *literæ alphabeti pro quantitatibus in Algebra usurpatæ*, *ac substitutæ*, *significant quantitatem* universaliter, *ac* indeterminate, *ut* exemplum in priore scholio adductum declarat; *Et vero quid magis universaliter significare potest*, *quam litera* a, *aut* b, *denotans* Ex. gr. lineam, *quæ cum multorum milliarium longa*, *aut tam brevis esse possit*, *ut unius*, *alteriusve capilli latitudinem vix excedat*, *certe litera hujusmodi magnam æque*, *ac parvam denotabit*, *aut significabit lineam. Et hinc*, *sicut numerus* purus Ex. gr. 5. *ante applicationem ad materiam erat* signum, *seu* nota universalis *quinque unitatum suo modo* indeterminatarum, *applicatus vero ad materiam* Ex. gr. *urnas vini*, *jam* determinatus *evadit*; *ita litera alphabeti* Ex. gr. a, *aut* b, *substituta pro significanda quantitate lineari*, *significat universaliter omnem longitudinem lineæ*, *assumpto autem determinato numero* Ex. gr. *perticarum*, *cujus* unitas (*nempe pertica*) *determinata intelligitur*, *jam determinata evadit quantitas per literam prius universaliter indicata*; *Aut quemadmodum in dialectica vox* domus *significat omne ædificium habitabile*, *atque* indeterminate *significat domum*, *vel religiosam*, *vel sæcularem*, *aut rusticanam*, &c. & *per adjectam vocem aliquam determinantem ad certam speciem.* Ex. gr. Principis, *primo restringitur*, *ita etiam litera pro quantitate substituta*; *hoc*

hoc solum discrimine, quod dialectico (propter communem hominum institutionem) voce domus, *uti non liceat ad significandum* Ex. gr. calamum, *liceat autem utenti Algebrâ, per literam* a Ex. gr. *significare, & denominare vel lineam, vel numerum, vel milliare &c. non secus, atque in arbitrio Parentis est, nato sibi filio imponere nomen Petri, aut Joannis, aut Stephani, &c.*

AXIOMA I. FUNDAMENTALE.

8. Quantitas, quæ sub consideratio-nem, & calculum Algebraicum aut Mathematicum cadere potest, triplex constituitur: 1. Quantitas *positiva*, vel *affirmativa*, quæ etiam *major nihilo* dicitur. 2. Quantitas *nulla*, aut *æqualis nihilo*. 3. Quantitas *negativa*, aut *minor nihilo*.

DECLARATIO AXIOMATIS FUNDAMENTALIS.

Primo: Petrus *Ex.gr.* habet florenos 8, nullique hominum tenetur, aut debet aliquid; hi 8 floreni relate ad Petrum possessorem sunt quantitas *positiva*, *realis*, & *affirmativa*, atque *major nihilo*, cum plus habeat, quam nihil.

Secundo: Habeat Petrus tantùm 8 florenos, teneatur autem ex debito hos 8 florenos, seu totidem Joanni, tali casu, si Petrus Joanni det hos 8 fl. intelligetur habere nihil, id est quantitatem *nullam*, seu *æqualem nihilo:*

Tertio: Habeat Petrus 8 florenos, teneatur autem Joanni flor. 10, tali casu, si

Petrus Joanni det hos 8 flor. tenebitur adhuc 2 florenis, qui 2 flor. ſunt quantitas *negativa*, & *minor nihilo*, cum ad hoc, ut Petrus nihil habeat, requirantur adhuc 2 floreni poſitivi, quos tenetur Joanni, iisque habitis, & redditis Joanni, primum intelligetur Petrus habere nihil.

SCHOLION I.

9. *Sunt, qui axioma hoc fundamentale declarant per motum progreſſivum hominis;* Ex. gr. *Statue te medium inter portam, & feneſtram oppoſitam portæ tui cubiculi, & eſto tibi negotium aliquod peragendum extra cubiculum, ad quem finem obtinendum neceſſe eſt, te propinquum fieri portæ, ut per eam exeas. Itaque* 1mo: *ſi e medio cubiculi, in quo conſiſtis, duos paſſus verſus portam facias, diceris, facere duos paſſus* poſitivos, *quia conducunt ad tuum finem, extra cubiculum egrediendi.* 2do: *Si vero in medio conſiſtens quietus maneas, id eſt, nec verſus portam, nec feneſtram verſus ullum paſſum facias, habebis motum* nullū, *id eſt, quantitatem* nullam *motus progreſſivi portam verſus.* 3tio: *Si ex medio non portam verſus (per quam te exire neceſſe eſt) ſed verſus feneſtram duos paſſus retro facias, diceris feciſſe duos paſſus* negativos, *reſpectu nempe habito ad exitum per portam, cum non appropinques portæ, ſed ab ea magis elongeris, atque ad hoc, ut ex medio portam verſus non proceſſiſſe dicaris, neceſſe eſt, te per duos paſſus ad medium redire cubiculi, in quo conſiſtens, deprehendes, te nihil magis portæ appropinquaſſe, quam ſi ibi quietus manſiſſes.* Cl. Jo. Poetius *explicat per motum progreſſivum hominis in navi a prora ad puppim progredientis dum interea navis ſecundo fluvio defertur. Nobis tamen prima declaratio, utpote magis ad captum Tyronum, placet præ cæteris.*

SCHOLION II.

10. *Tyrones axioma hoc fundamentale* (§. 8.) *alte menti imprimant, & omnem quantitatem, quæ per decurſum Algebræ occurret, per modum illorum* 8, *&*

10 *florenorum considerare assuescant, ex qua consideratione maxima tum intelligendi, tum operandi facilitas in algebra dependet.*

HYPOTHESIS II.

11. *Signum Algebraicum indicans quantitatem aliquam esse* positivam, *vel* affirmativam (§. 8.) *aut* majorem nihilo, *est præfixa quantitati datæ crucula hujusmodi* (+) *minor, & enunciatur per vocem:* plus, *sic:* + a, *significat quantitatem* a *esse* positivam, & *enunciatur;* plus a. *Similiter;* a + b, *enunciatur;* a plus b. *Signum quantitatis* negativæ (§. 8.) *aut* minoris nihilo, *est lineola* (—) *præfixa, & enunciatur per vocem* minus; Ex. gr. *sit,* a — b, *dic,* a minus b. *Signum quantitatis* nullius (§. 8.) *est zerus* (o), *qui, cum* nullam quantitatem *significet, præfigi non solet literis, sed tantum inservit in problematibus reductis ad* nihilum, *ut locum unius partis æquationis occupet*, ut infra dicetur.

SCHOLION I.

12. *Signa hæc* +, *&* — *afficiunt tantum illas quantitates, aut literas, quibus præfiguntur, nec ultra suam vim exerunt.* NB. Si initio alicujus calculi literalis nullum *expresse* præfigatur signum, semper intelligatur *tacite* præfixum esse signum +, idque ex institutione hominum, adeoque illam quantitatem primam, esse positivam.

SCHOLION II.

13. *Quantitas* negativa, *seu quæ præfixum habet* (—) *signum hoc, non in eo sensu accipienda est, esse*

negativa, *quasi esset* non ens, *aut quid imaginarium, existens tantum in cerebro Mathematicorum, sed reipsa est quantitas realis quidem, & existens, sed quæ tantum suam* præsentiam *hic & nunc negat, id est, pro his certis circumstantiis præsens esse non intelligitur, tanquam non conducens ad finem intentum. Exemplum habes (in §.9.) de duobus passibus fenestram versus factis, qui utique* reales, *&* existentes *intelliguntur, sed solum sunt* negativi *relate ad finem intentum, exeundi nempe per portam, ad quem finem tanquam non conducentes,* præsentiam *suam negant, id est, negativi evadunt respective tantum ad datas circumstantias, licet in aliis circumstantiis positivi esse possint,* Ex. gr. *si consistens in medio cubiculi fenestram aperire velis. Non secus duo illi floreni* negativi *(in §. 8.) quos propter debitum* 10 *florenor. supra* 8 *flor.* positivos *persolvere tenetur* Petrus Joanni, *tantum* non præsentes *intelliguntur relate ad Petrum, etsi alibi* reales *sint, &* existant, *atque seclusa circumstantia debiti, etiam relate ad Petrum esse possint* positivi, *id est,* præsentes. *Itaque quantitatem esse* negativam, *est,* non negare existentiam, sed præsentiam *quantitatis pro datis circumstantiis.*

HYPOTHESIS III.

14. *Loco vocis* æqualis, *vel* æquale, *per quam indicamus* æqualitatem *duarum, vel plurium quantitatum, in Algebra usurpantur hæc signa,* ($=$) *vel* (::) *aut* ($\propto$), *inter quantitates* æquales *posita.* Ex. gr. *Si volumus indicare quantitatem* a *esse æqualem quantitati* b, *scribatur sic*, $a = b$, *aut* a :: b, *vel* $a \propto b$, *& enunciatur*, a æquale b, *ita* 7 :: 7, *dic*, 7 æquale 7.

HYPOTHESIS IV.

15. *Signum* Majoritatis *est* ($>$); *signum vero* Minoritatis ($<$) *indicans duarum quantitatum eam esse* minorem, *versus*

quam cuſpis porrigitur, alteram verò majorem. Ex. gr. a $>$ b, *enunciatur;* a eſt majus quàm b, *item* b $<$ a, *enunciatur;* b eſt minus quàm a, *eodem modo;* 8 $<$ 12, *dic*, 8 eſt minus quàm 12; *aut*, 12 $>$ 8, *dic*, 12 eſt majus quàm 8.

SCHOLION.

16. *In Algebra etiam per certa ſigna ipſæ quoque operationes, ſeu Algorithmi indicantur, uti ſunt:* Additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio, extractio radicis, proportionis &c.

HYPOTHESIS V.

17. *Signum* Additionis, *ſeu* collectionis *eſt* (+) *præfixum quantitati additæ, & enunciatur per vocem;* Plus. Ex. gr. *Summa duarum quantitatum* a & b *indicatur, aut ſcribitur ita,* a + b, *& enunciatur;* a plus b, *hoc eſt:* ad quantitatem a addita eſt quantitas b. *Quod ſi* Ex. gr. 8 *vocetur* a, & 5 *vocetur* b, *quantitas* a + b *ſignificabit ſummam* 8 + 5 = 13.

HYPOTHESIS VI.

18. *Signum* ſubtractionis, *ſeu* diminutionis *eſt lineola* (−) *præfixa quantitati ſubtrahendæ, & enunciatur per vocem;* Minus, Ex. gr. *Reſiduum, aut differentia duarum quantitatum* a & b, *indicatur, aut ſcribitur ita,* a − b, *& enunciatur,* a minus b, *hoc eſt:* ex quantitate a ablata, *aut* ſubtracta eſt quantitas b. *Quod ſi* Ex. gr.

8 vocetur a, *&* 5 *vocetur* b, *significabit residuum* a—b *idem quod* 8—5, *id est*, 3.

COROLLARIUM.

19. Quoniam + est signum *Additionis*, simulque signum quantitatis *positivæ* (§. 11.) hæc verò — est signum *subtractionis*, & simul signum quantitatis *negativæ* (§. 11.) quantitas autem *positiva*, & *negativa*, itemque *additio*, & *subtractio* sibi contrarie opponuntur (§. 121. Arithm.) patet quantitates duas, quarum una habet signum +, altera signum — præfixum, esse sibi *contrarie* oppositas, & invicem *destructivas*; hinc signa + & — vocantur etiam *signa contraria*, & quantitates his affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Ex qua hypothesi manifestum est sequens axioma fundamentale.

AXIOMA II. FUNDAMENTALE.

20. Quantitas positiva cum quantitate negativa *æquali*, æquatur *nihilo*, seu *zero* (0), id est, se invicem totaliter destruunt, sic: $a - a = 0$, aut $-a + a = 0$ seu si 4 valeat a, erit $4 - 4 = 0$, aut, $-4 + 4 = 0$.

COROLLARIUM.

21. Si quantitas *positiva* major est quantitate negativa sibi conjuncta, tali casu, quantitas *negativa* tantam partem destruit ex *positiva*, quantam ipsa *negativa* indicat: & vicissim, si quantitas *negativa* major est quantitate *positiva* sibi conjuncta, quantitas *positiva* tantum destruit ex *negativa*, quantum *positiva* se habere indicat. *Ex. gr.* Sit quantitas + 8, & altera — 5, cum sit $8 > 5$, erit; $8 - 5 = 3$, id est, quinque unitates *negativæ* ex 8 *positivis* destruunt quinque uni-

unitates; & iterum, sit quantitas $+5$, & altera -8, erit $-8+5=-3$. Quia quinque *positivæ* unitates, destruunt ex 8 negativis quinque, unde remanent tres *negativæ*. Ut patet ex (§.8.)

DEFINITIO III.

22. *Quantitas incomplexa*, aut *monomia*, vocatur quævis quantitas seorsim sumpta, id est, non conjuncta cum altera quantitate per signa $+$ vel $-$ interposita; *Ex. gr.* a, vel b, aut c, item ba, vel cba, aut dfc &c.

DEFINITIO IV.

23. *Quantitas complexa*, aut *Polynomia*, dicitur, cum duæ vel plures quantitates interpositis signis $+$ vel $-$ sibi junguntur; *Ex. gr.* $a+b$, aut $a-b$, vel $a+b+c$; item: $ba+c-ad$ &c.

SCHOLION.

24. *Quando duæ quantitates per signum* $+$ *vel* $-$ *conjunguntur;* Ex. gr. $a+b$, *vel* $a-b$, *aut* $ad+bc$ *&c. hujusmodi* complexa quantitas *vocatur*, Binomia, *id est:* (duarum partium) *Si* tres, Ex. gr. $a+b+c$, *vel* $a-b+c$, *&c. vocatur* Trinomia; *si* quatuor, Ex. gr. $a+b-c+d$, *&c. dicitur* Quadrinomia. *In genere, si plures per signa* $+$ *vel* $-$ *jungantur, appellatur quantitas complexa* Polynomia.

HYPOTHESIS VII.

25. *Signa Algebraica* multiplicationem *quantitatum indicantia, sunt:* Primo: *usitatissimum signum est, si factores absque ullo signo interposito sibi connexi scriban-*

tur,

tur; Ex. gr. *Si volumus indicare productum, quod ortum est ex multiplicatione duorum factorum* a & b, *scribatur*, ba, *vel* ab; Secundo: multiplicationem *indicat punctum* (.) *inter factores interjectum*, *aut duæ lineæ decussatæ* ($\times$) *interpositæ*. Ex. gr. a.b, *vel* a$\times$b, & *enunciatur*, a est multiplicatum per b;

Hoc ultimo ($\times$) *signo nos rarò utemur.*

SCHOLION.

26. *Itaque si* Ex. gr. a *valeat* 8, & b *valeat* 3, *erit productum ex* a *per* b; *id est*: ab = 24, *item* a.b = 8.3 = 24, *aut* a $\times$ b = 8 $\times$ 3 = 24. *hoc est* productum 24, *quod factum est ex* factoribus 8 & 3, *indicari potest per signa, vel sic*: 8.3, *vel* 8 $\times$ 3, *quæ significant* multiplicationem. *Adhibent etiam aliqui pro signo multiplicationis* comma (,) *sed minus recte propter confusionem typi, nos* commate *pro signo multiplicationis nunquam utemur, sed sufficiat insinuasse, ne erroris Typographos arguamus, cum pro signo multiplicationis* comma *positum legerimus.*

HYPOTHESIS VIII.

27. *Si multiplicatio quantitatis polynomiæ per monomiam, & vicissim, item multiplicatio quantitatis polynomiæ per polynomiam indicanda sit, quantitas polynomia parenthesi includatur, & alteri quantitati vel cum, vel sine signo multiplicationis* (§. 25.) *jungatur.* Ex. gr. *Sit indicanda multiplicatio ex factore* a + b − c *in factorem* d; scribatur (a + b − c) d, vel d (a + b − c) vel interjecto puncto

(a

$(a+b-c).d$, vel interjecto $\times$ signo, $(a+b-c)\times d$, seu $d\times(a+b-c)$, *sit item indicanda; multiplicatio quantitatis* polynomiæ, $a+b-c$, *per polynomiam* $d+f-m$; scribatur: $(a+b-c)(d+f-m)$ vel $(a+b-c).(d+f-m)$, aut etiam $(a+b-c)\times(d+f-m)$.

SCHOLION I.

28. *Vulgo, exempla à nobis expressa ita etiam scribuntur;* $\overline{a+b-c}$,d ; vel $\overline{a+b-c}$.d, aut $\overline{a+b-c}\times d$, *item exempla nostra polynomiorum vulgo sic exprimuntur:* $\overline{a+b-c}.\overline{d+f-m}$, aut $\overline{a+b-c}\times\overline{d+f-m}$; *in quibus* notandum; *quod si superducta linea non omnes quantitates includat;* Ex. gr. $a+\overline{b-c}\times\overline{d+f}$, *intelligi debet, illas quantitates, ad quas linea superducta non porrigitur, non esse multiplicatas per cæteras, uti in hoc exemplo est quantitas* a, *quæ non intelligitur multiplicata per* $\overline{d+f}$, *sed solum quantitas* $\overline{b-c}$; *quia linea supra* $\overline{b-c}$ *ducta, non extenditur supra quantitatem* a. *Unde, quia per ductum hujusmodi lineæ facilè error committi potest, tutius erit uti parenthesi, & ab usu hujuscemodi expressionu abstinere, nisi casus* scholii sequentis *urgeat.*

SCHOLION II.

29. *Contingit non nunquam, ut per signa* (§. 27.) indicatam *jam duorum factorum* multiplicationem *per novum tertium factorem aliquem, multiplicatam esse, indicare cogamur; tali casu, super priori modo indicatam multiplicationem linea ducenda erit, quæ indicet, an uterque factorum prioris expressionis, an unus aliquis tantum per novum tertium factorem multiplicatus sit.* Ex. gr. *Sit quantitas, quæ jam est expressa per signa multiplicationis hæc:* $(a+b-c).(d+f-m)$ *denuo super indicanda, esse tota multiplicata per novum*

fa-

factorem; n + u. scribatur sic: $\overline{(a+b-c).(d+f-m)}\times(n+u)$, vel sic: $\overline{(a+b-c).(d+f-m)}\times\overline{n+u}$. *Quodsi linea super unum ex factoribus ducta non sit, intelligendum est, illum non esse multiplicatum per tertium novum factorem;* Ex. gr. *Si scribatur:* $(a+b-c).\overline{(d+f-m)}\times\overline{n+u}$, *vel sic:* $(a+b-c).\overline{(d+f-m)\times n+u}$; *Vulgo hæc exempla sic exprimuntur:* $\overline{\overline{a+b-c}.\overline{d+f-m}}\times\overline{n+u}$, *vel etiam hoc modo:* $\overline{\overline{a+b-c.d+f-m}\times n+u}$, *aut* $\overline{a+b-c.\overline{d+f-m}\times n+u}$; *sed hæc Tyronibus insinuasse sufficiat, cum ejuscemodi exempla rarius occurrant.*

HYPOTHESIS X.

30. *Signa Algebraica* Divisionem *indicantia sunt* Primo: *usitatissimum signum est, si indicetur per modum* fractionis, *id est, si* dividendus *subducatur linea, & infra lineam scribatur* divisor; Ex. gr. *Indicare volumus quantitatem dividendam* a *esse divisam per divisorem* b, *scribatur sic,* $\frac{a}{b}$ & *enunciatur,* a divisum per b. Secundo: *Non minùs usitatum signum* divisionis *sunt duo puncta* (:) *interjecta inter totum* dividendum, & divisorem; Ex. gr. *Si scribatur* a:b, *dic,* a *est* divisum per b.

SCHOLION.

31. *Quemadmodum* multiplicatio indicata (§. 25.) *significat* productum, *ita* divisio indicata, *significat* quotum, *adeoque hæ expressiones* $\frac{a}{b}$ *vel* a : b *exprimunt* quotum *ex* divisione *ortum.* Ex. gr. *Si* a *valeat* 12, b, *va-*

b valeat 4, *erit* $\frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3$, *item* $a : b = 12 : 4 = 3$, *cum* 3 *sit* quotus *ortus ex divisione* 12 *per* 4.

HYPOTHESIS X.

32. *Si* divisio *quantitatis* polynomiæ *per* monomiam, *& vicissim; item, si* divisio polynomiæ *quantitatis per* polynomiam *indicanda sit, polynomia quantitas parenthesi includatur, si nempe pro signo* divisionis *usurpentur* (:) *duo puncta; si verò per modum fractionis exprimere placeat, ommittatur parenthesis, sed linea sub* dividendo *ducta ad totum dividendum, & divisorem extendatur;* Ex. gr. *Sit quantitas* $a + b$ *indicanda esse divisa per* c, *scribatur*, $(a + b) : c$, *vel* $\frac{a + b}{c}$ *eodem modo, si dividendus sit* a, *& divisor sit* $b + c$, *scribatur*, $a : (b + c)$ *vel* $\frac{a}{b + c}$ *item, sit quantitas* polynomia $a + b - c$ *indicanda esse divisa per polynomiam* $d + m$, *scribatur*, $(a + b - c) : (d + m)$ *vel sic* $\frac{a + b - c}{d + m}$.

SCHOLION.

23. *Vulgo, ut in multiplicatione indicanda* (§. 28.) *dictum est, etiam in indicanda* divisione *pro* parenthesi *usurpatur linea.* Ex. gr. *locò* $(a + b) : c$, *ita* scribitur: $\overline{a + b} : c$, *item divisio polynomiæ per* polynomiam, *sic exprimitur*: $\overline{a + b - c} : \overline{d + m}$. *Hinc, quæ de his signis in scholio* (§. 28. & 29.) *monuimus huc quoque cum analogia applicari possunt.*

co-

COROLLARIUM I.

34. Quoniam, *quod multiplicatio componit, tollit divisio* (§. 121. Arith.) patet *multiplicationem*, & *divisionem* sibi *contrarie* opponi, atque adeo adducta (§. 25.) *signa multiplicationis*, & adducta (§. 30.) *signa divisionis* esse signa *contraria*, & *hinc destructiva*, sive *deletiva* quantitatum earundem his signis affectarum; quantitates his signis affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Unde manifestum est, sequens corollarium.

COROLLARIUM II.

35. Quantitas aliqua *multiplicata* per quantitatem aliam quamcunque, & per eandem simul *divisa*, manet *invariata*, id est, nec illi quantitati aliquid accedit per *multiplicationem*, nec per *divisionem* decedit aliquid. *Ex. gr.* Sit a quantitas *multiplicata* per b, & *divisa* per eandem b, erit expressio hujusmodi; $\frac{ab}{b} = a$, vel $\frac{a.b}{b} = a$, aut $\frac{a \times b}{b} = a$, item sic: $(a.b):b = a$, vel sic: $(a \times b):b = a$.

Idem patet in numeris, si *Ex. gr.* a valet 5, b valeat 2, erunt priores literales expressiones in numeris hujusmodi: $\frac{10}{2} = 5$, vel $\frac{5.2}{2} = 5$, aut $\frac{5 \times 2}{2} = 5$, item sic $(5.2):2 = 5$, vel $(5 \times 2):2 = 5$.

COROLLARIUM III.

36. Unde quantitas *multiplicans* simul, & *dividens* aliam aliquam quantitatem tanquam si non adesset, id est, pro *nulla* quantitate habetur, atque adeo *deleri*, & *omitti* potest.

SCHO-

SCHOLION.

37. *Ut memoriæ tyronum consuleretur, Hypothesium hucusque declaratarum tabellam compendiariam, velut* memoriæ adjumentum quoddam *subjicere placuit, in qua residuas quoque nondum adductas* signorum Hypotheses *quæ explicatione vix egent, subjungimus.*

TABULA COMPENDIARIA.

38. *Exhibens Hypotheses signorum in Algebra hodierna usitatorum.*

$+$ Est signum quantitatis *Positivæ*, seu *Affirmativæ*, & *Præsentis* (§.11.) item signum est *Additionis*, seu *collectionis*, (§.17.) & enunciatur per vocem: *plus*; sic $a+b$, dic, *a plus b*.

NB. *Hoc signum initio formulæ alicujus Algebraicæ, non præfigitur, præfixum tamen subintelligitur.* (§.12.)

$-$ Est signum quantitatis *Negativæ* (§.11.) item *Subtractionis*, seu *diminutionis*, (§.18.) & enunciatur per vocem, *minus*; sic, $a-b$, dic, *a minus b*.

$\times$ vel (.) aut (,) est signum *Multiplicationis*, seu *producti*, sic, $a \times b$, vel $a.b$, dic, *a est multiplicatum per b*, usitatissimè sic scribitur *ab* (§.25.& seq.)

: *Divisionis*, seu *quoti*, sed usitatissimè per modum fractionis; sic, $a:b$, vel $\frac{a}{b}$, dic, *a est divisum per b*, (§.30. & seq.)

$=$ vel (::) aut (∞) est signum *Æqualitatis*; sic, $a=b$, vel $a::b$, aut $a ∞ b$, dic, *a est æquale b*, (§.14.)

$>$ Est *Majoritatis*; sic, $a > b$, dic, *a est majus, quàm b*, (§. 15.)

$<$ *Minoritatis*; sic, $b < a$, dic, *b est minus, quàm a*, (§. 15.)

O *Nullitatis*; sic, $a = 0$, dic, *a est æquale nihilo*, id est, *nulla quantitas*, (§. 20.)

$\backsim$ *Similitudinis*; sic, $a \backsim b$, dic, *a est quantitas similis quantitati b.*

∞ *Infinitudinis*; sic, $a = \infty$, dic, *a est æquale infinito*, vel potius, *indefinito.*

$\surd$ Est signum *Radicis*; sic, $a = \surd b$, dic, *a est æquale radici de quantitate b.*

$\surd\surd$ Significat *Radicem radicis*; sic, $a = \sqrt{\sqrt{b+d}}$, dic, *a æquale radici de radice $b+d$.*

$\div\div$ Est signum *Proportionis geometricæ continuæ*, ut suo loco dicetur.

Cætera pauca per algebram occurrentia signa suis locis adferentur.

SCHOLION I.

39. *Iisdem omnino signis utitur* Algebra numerosa (§. 2.), *seu ea pars Algebræ, quæ pro numeris puris, &* abstractis *non substituit literas alphabeti, sed adhibitis signis Algebræ cum numeris suas operationes peragit.*

SCHOLION II.

40. *Tyrones significationem, & usum horum signorum admodum familiarem sibi reddant oportet, in quorum recto usu stupenda totius Algebræ virtus, & admiranda vis, ac efficacia potissimum consistit. His enim solis signis in acceptis referre debemus, artem,*

ac

ac methodum proprio marte inveniendi, ac demonstrandi veritates mathematicas, seu Theoremata; *His signis debemus, resolutiones per quam faciles problematum seu quæstionum, quorum solutio vix possibilis fore crederetur; His signis adjuti plus hora, velut aliud agendo, sine fatigio, & intensione intellectus condiscimus, quam alia methodo vix mense integro ex aliorum libris non sine tædio, & molestia hauriremus. His signis adjuti regulas nobis formamus ipsimet generales, quæ literis, & signis paucis expressæ memoria ita retinentur, ut earum ætate tota vix oblivisci possimus; si tamen oblivisceremur, in his signis, penum mathematicam, velut in nuce Illyadem, collectam habemus, è qua sine magno labore regulam universalem, dum illa opus habemus, ultro nobismet ipsis depromimus. Signa hæc vices docentis, & nos instruentis Magistri fideliter obeunt, nihil recondunt, sed arcana omnia pandunt, & clarius longè, paucisque verbis veritates eloquuntur mathemathicas, quam dissertissimus Mathematicorum unquam præstare potuerit;* Verbo, *in his mysteria omnia totius artis analyticæ contineri usus ipse docebit; hujus verò stupendæ signorum horum virtutis ratio in eo sita est, quod* notiones signis expressæ, *sint imagines quædam sistentes imaginationi nostræ ea præsentia, quæ alias, aut ultra ejus agendi sphæram ascenderent, aut ob imaginationis evagationem facilem, elaberentur.*

HYPOTHESIS XI.

41. *Quantitates cognitæ* eædem *seu æquales*, literis iisdem; diversæ, *literis etiam* diversis *denominandæ sunt.* Ex. gr. *Sint in data aliqua quæstione* floreni, grossi, cruciferi, *denominetur jam* arbitrarie *florenus per literam* a, *igitur per hanc literam* a, grossum *denominare non licet, sed* grossum *per diversam literam* Ex. gr. b, *item* cruciferum, *nec per literam* a, *nec per* b, *sed per tertiam aliquam* c *denominare co-*

 gi-

gimur, (intelligendo in eadem tractanda quæstione) *quia* floreni, grossi, & cruciferi, *sunt inter se diversæ speciei, quam diversitatem, seu heterogeneitatem literæ substitutæ per seipsas exprimere tenentur.*

COROLLARIUM.

42. Quoniam numeri *puri*, & *abstracti* (§. 18. Arith.) solam multitudinem unitatum significant; unitatum autem multitudo una, altera multitudine major, minorve esse possit; sequitur *numeros puros* eandem multitudinem unitatum habentes, pro quantitatibus *æqualibus*, id est *iisdem* haberi, *Ex.gr.* 8, & 8, numeros verò puros majorem unitatum multitudinem habentes pro *inæqualibus*, id est *diversis*, censeri, *Ex.gr.* 5, & 8: Et hinc si pro numeris literæ substituantur, *Numeri ejusdem multitudinis per literas easdem, diversæ multitudinis per literas etiam diversas denominandi sunt*; ut si denominandi sunt numeri per literas, *Ex.gr.* 5, 8, 24. cum omnes inter se sint diversi; si sit $5 = a$, & $8 = b$, numerus 24 nec vocari potest *a*, nec dici *b*, sed per tertiam aliquam *Ex.gr.* $24 = c$, intelligendo in eadem quæstione tractanda.

SCHOLION.

43. *Quod de quantitatibus cognitis denominandis dictum est, idem in denominandis incognitis tenendum, ut diversæ incognitæ per diversas ultimas alphabeti literas, eædem verò per easdem denominentur, nisi diversæ quantitates incognitæ propter certam relationem ad se invicem, ad eandem reduci possint*, Ex.gr. *Sit una* x, *altera* y, *constet autem ex circumstantiis, vel aliunde*, y *quantitatem esse* duplam *de quantitate* x, *tali casu, utique loco* y, *scribere possum* 2x, *adeoque* y *sub eadem expressione* x, *exhibere licet;* ut infra dicetur, *quod monitum etiam servit in denominandis cognitis.*

DE-

DEFINITIO V.

44. Quantitas monomia *compoſita*, dicitur, quæ duabus, vel pluribus literis (nullo intermediante ſigno aliquo) ſibi invicem conjunctis expreſſa habetur; *Ex. gr.* bc, vel bca, aut $abdc$; item aa, vel aab, aut dfc, &c.

COROLLARIUM.

45. Ex (§.25.) patet, quod quantitas monomia compoſita exprimat Hypotheſim multiplicationis *primo modo* indicatam, & viciſſim Hypotheſis multiplicationis *primo modo* indicata, exprimat quantitatem monomiam compoſitam.

DEFINITIO VI.

46. Quantitas monomia *affecta coëfficiente*, dicitur, cui ad partem ſiniſtram (NB. *nequaquam ad dextram*) præfixus eſt numerus aliquis, vel absque ſigno ullo intermediante, *Ex. gr.* $3a$, vel $4ab$, aut $15bc$; vel etiam intermediante ſigno, ſed *ſolius multiplicationis*, *Ex. gr.* $3.a$, vel $4.ab$, aut $15.ab$. Numeri vero præfixi vocantur *coëfficientes*.

COROLLARIUM I.

47. *Coëfficientes* itaque indicant, quoties ſibimet quantitas literalis *addita* eſt, *Ex. gr.* $3a$ ſignificat quantitatem a *ter* ſibimet *additam*, & *Coëfficiens* 3 conjunctus quantitati a, ſupplet hanc longiorem expreſſionem; $a+a+a$: item $4ab$ ſignificat quantitatem ab *quater* ſibimet *additam*.

tam, & ſupplet vicem hujus longæ expreſſionis; $ab + ab + ab + ab$; unde porro liquet, quod expreſſio per *coëfficientes*, ſit modus quidam ſcribendi per *abreviationem* quantitates literales, ſibimet aliquoties additas, ita *Ex. gr.* loco hujus ſeriei; $bc + bc + bc + bc + bc + bc + bc$, breviſſimè ſcribitur, $7bc$. Item loco hujus, $2bd + 3bd + 5bd + 7bd$, ſcribatur: $17bd$. Idem intelligendum de quantitatibus negativis, ſic $-4a$, eſt compendioſa expreſſio hujus, $-a-a-a-a$.

COROLLARIUM II.

48. Quoniam omnis quantitas monomia (conſiderata per modum *totius*) ſeipſam *ſemel* ſumptam, id eſt *unum* totum ſignificat, omnis quantitas monomia non affecta coefficiente, *unitatem* tacite præfixam habere intelligitur; *Ex. gr.* a idem eſt quod $1a$, aut $bc = 1bc$; &c. NB. *Hæc unitas nunquam expreſsè præfigitur*, (niſi circumſtantiæ aliud ſuadeant) *ſemper tamen tacite præfixa intelligitur.*

DEFINITIO VII.

49. Quantitas literalis *affecta exponente*, illa dicitur, quæ ad dextram ſurſum verſus, vel numerum, vel literam appoſitam habet; *Ex. gr.* a^3, vel ab^4, aut a^e, vel a^m; numeri verò, vel literæ ad dextram poſitæ, vocantur *Exponentes.*

COROLLARIUM.

50. Cum *exponentes* ex Hypotheſi indicent repetitam datæ quantitatis per ſemetipſam multiplicationem, *Ex. gr.* a^3 indicat quantitatem a eſſe multiplicatam per eandem a ſeu aa, & hoc factum aa, eſſe iterum multiplicatum per a, ſeu aaa; ſequitur, expreſſionem hanc a^3, ſupplere

plere hanc longiorem, aaa, vel $(a.a).a$, aut hanc $(a \times a) \times a$; & hinc liquet, expressionem per *exponentes*, esse modum scribendi per *abreviationem* quantitates easdem in semet aliquoties multiplicatas. Sic loco hujus seriei; $a.a.a.a.a$, vel loco hujus; $aaaaa$, brevissimè scribitur; a^5.

SCHOLION.

51. *Observent tyrones, atque altè menti imprimant* notiones distinctas coëfficientium, & exponentium, *nè scilicet* coëfficientes, *cum* exponentibus *confundantur, aut pro eodem accipiantur; Alia enim longe quantitas indicatur per* coëfficientem, *& alia per* exponentem, *sic* Ex. gr. *alia quantitas est* $3a$, *& alia* a^3; *nam* $3a$ *ponitur loco hujus expressionis*, $a+a+a$ (§. 47.) *Hæc verò* a^3, *loco hujus* aaa, *vel loco hujus* $(a.a).a$, (§. 50.) *quarum prior nempe* $3a$ *significat* additionem simpliciter *toties factam, quot unitates habet coëfficiens numerus* 3. (§. 47.) *Altera verò*, a^3, *multiplicationem suimetipsius, & quidem iteratam indicat*, (§. 50.) *ut patet ad oculum si pro literis substituantur numeri; Ex. gr. Sit* $a=4$. *erit;* $3a=a+a+a$, *hoc est* $4+4+4=12$. (§. 47.) *Hæc verò* $a^3=(a.a).a$, *hoc est*: $(4.4).4=64$ *per* (§. 50.). *Adeoque* $3a=12$, *&* $a^3=64$. *patet autem* 12, *&* 64 *esse quantitates utique valde inter se discrepantes.*

DEFINITIO VIII.

52. Quantitates monomiæ dicuntur *Homogeneæ* (§. 20. Arith.) quæ, & iisdem literis constant (§. 41. & 43.) & *exponentes* (si adsint) eosdem habeant, tametsi diversis affectæ sint coëfficientibus; sic Homogeneæ sunt *Ex. gr.* $3a$, & $4a$, item, $2ab$, & $5ba$, vel $3a^2$, & $7a^2$.

SCHOLION.

53. *Animadvertant Tyrones* Homogeneitatem *in quantitatibus monomiis* compositis *non tolli per diver-*

sum præcise earundem *literarum inter se ordinem; & situm; sic quantitas composita monomia*, Ex. gr. abc *manet* homogenea, *licet* ejusdem *literæ quocunque ordine, & situ permutatæ combinentur*, Ex. gr. abc, acb, bca, bac, cba, cab, *& hinc adductæ hæ quantitates singulæ exprimunt* Hypothesim multiplicationis (§. 45. & 25.) factum *autem seu* productum *manet idem, quomodocunque factores inter se ducantur*, (§. 49. *Arith.*) *igitur manifestum est, adductas quantitates esse inter se easdem, & æquales, id est*, homogeneas.

DEFINITIO IX.

54. *Heterogeneæ* quantitates monomiæ (§. 21. Arith.) dicuntur, quæ vel per unam literam diversam inter se discrepant, aut *exponentes* (si adsint) diversos habeant; diversitas autem *coëfficientium* non inducit *heterogeneitatem*, (§. 52.) sic *heterogeneæ* sunt, *Ex.gr.* a & b, item, ab, & bc, aut cba, & bcd; *Heterogeneæ* quoque sunt, numeri seorsim positi, & literæ, *Ex.gr.* ab, & 15, aut $3bc$, & 3, &c.

SCHOLION.

55. *Quod de* homogeneitate, & heterogeneitate *quantitatum monomiarum* compositarum, exponentibus *affectarum, dictum est, idem omnino cum analogia intelligendum est de quantitatibus monomiis habentibus præfixum signum* ($\surd$), *ut suo loco declarabimus.*

DEFINITIO X.

56. *Formula*, aut *Propositio practica Algebraica*, dicitur quodvis literale complexum, exhibens universaliter per signa Algebraica factas, aut faciendas operationes algebraicas; *Ex.gr. Hoc complexum*

Al-

Algebraicum, $x = \frac{bc}{a}$ *exhibens quantitatem incognitam x*, *esse* æqualem *quantitati b*, multiplicatæ *per quantitatem c*, *&* divisæ *per quantitatem a*, & hinc.

DEFINITIO XI.

57. *Resolutio Algebraica*, (quæ etiam *constructio* in geometria appellatur) est, si formula algebraica secundum suam expressionem universalem proposita, resolvatur in suos valores determinatos, substituendo videlicet pro literis, vel *numeros arithmeticos*, vel *figuram per lineas* geometricè construendo; si in numeros simpliciter resolvatur, dicitur *Resolutio*, si verò per lineas geometricas determinetur, dicitur *constructio*. *Ex.gr.* Sit $b = 4$, $c = 3$, & $a = 2$, sitque *formula Algebraica resolvenda in numeros substitutos hæc*; $x = \frac{bc}{a}$ *erit in numeris*; $x = \frac{4 \cdot 3}{2}$, seu, $x = \frac{12}{2}$, id est, $x = 6$; *adeoque x est* æqualis *quantitati numericæ* 4, multiplicatæ *per numerum* 3, *&* divisæ *per numerum* 2; quod ipsum faciendum *formula algebraica* eloquitur.

DEFINITIO XII.

58. *Demonstratio*, seu *propositio speculativa algebraica*, est formula algebraica, quæ per sua signa, ac literas exhibet, &

eloquitur eam veritatem universalem, quam demonstrandam proposuimus, simulque continet tacitè argumentationem demonstrativam. *Ex.gr.* Sit algebraice demonstranda hæc veritas universalis: *Quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt;* erit demonstratio algebraica hæc formula: $-a+a=0$, quæ formula universalis dictam propositionem exactè eloquitur, & simul hanc tacitam argumentationem continet: *Quantitas* $-a$ *est quantitas* negativa *per* (§. 11.), & *quantitas* $+a$, *est quantitas* positiva *per* (§. 11.); *eadem hæc quantitas positiva* $+a$, *est simul* æqualis *quantitati* $-a$, *per* (§. 41.) *præterea quantitas* $+a$, *est simul* addita *quantitati* $-a$, *per* (§. 17.), *ergo* (in hac formula) *habetur quantitas positiva conjuncta cum quantitate negativa æquali; sed* quantitas positiva cum quantitate negativa æquali æquantur nihilo, id est, se invicem destruunt totaliter per (§. 20.), *ergo quantitas positiva addita quantitati negativæ æquali, & vicissim, se invicem destruunt totaliter.* En stupendam signorum energiam.

COROLLARIUM.

59. Liquet itaque formulas algebraicas, & exprimere *propositionem speculativam*, vel *practicam*, & simul continere modum perfectissimum argumentandi, id est, *demonstrationem*, & quidem paucissimis characteribus clarissimè tanquam

quam in imagine expressam, & eloquentem. *Patet secundo*: mira signorum, & literarum virtus, quæ utpote *universaliter* eloquuntur, quam virtutem *numeri*, etiamsi sint *puri*, possidere nequeunt, cum numeri determinatas unitatum multitudines exhibeant, id est, numeri sunt *quantitates determinatæ*. & hinc *formula Algebræ numerosæ* (§. 39.) *declarationi* tantum, non autem *demonstrationi* inservire potest. *Tertio*: clarum est, *formulas Algebraicas*, esse quoddam *compendium universale* veritatum mathematicarum, quo una linea sæpe tot veritates eloquitur, quas si per voces consignare, & explicare vellemus, non una pagina conscribenda foret, *ut patebit inferius*. Qua propter.

SCHOLION.

60. *Tyrones seriò* contemplationi, *ac* resolutioni *formularum Algebraicarum incumbant*, quod ipsum monitum in Prolegomenis ad Tyrones dedi, *atque habita præ oculis formula algebraica quacunque, identidem sibimet ipsis hanc cantilenam occinant*; Quid loquitur hæc formula? Quam veritatem per sua signa, & literas indicat, & exprimit? quid jubet faciendum? *Experto credant velim, cantilenam hanc* millies *repetitam*, millies *placituram magis, cum fructu Rei literariæ, & quod consequens est, Reipubl. nullo non tempore satis æstimando, proprio experimento discent, dum ea in lucem* marte proprio *proferent, quæ hactenus, vel acutissimos etiam Mathematicos, & Philosophos, aut latuerunt, aut quæ repererunt adeo obscuris ambagibus, ad nos transmissa dolemus, ut iis explicandis, & enodandis Oedipi sagacitatem vix suffecturam crederes.*

THEOREMA I. PRÆLIMINARE.

61. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propositionem speculativam rite per suas regulas, hypotheses, & axiomata deductam, vices obit* Theorematis Mathematici.

DE-

DEMONSTRATIO.

Theorema mathematicum eſt complexum conſtans propoſitione ſpeculativa univerſali, & demonſtratione propoſitionis, ſeu eſt veritas propoſita, & demonſtrata, per (*Prolegom.*), ſed hujusmodi complexum eſt omnis formula algebraica continens propoſitionem ſpeculativam ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata deductam, per (§. 58.) ergo. Q. E. D.

THEOREMA II. PRÆLIMINARE.

62. PROP. *Omnis formula algebraica, continens propoſitionem practicam ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata deductam, vices obit* problematis Mathematici.

DEMONSTRATIO.

Problema Mathematicum, eſt complexum conſtans propoſitione practica, reſolutione propoſitionis, & demonſtratione reſolutionis, per (*Prolegom.*) ſed hujusmodi complexum eſt omnis formula algebraica continens propoſitionem practicam ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata deductam per (§. 56. & 57.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

63. Quidquid igitur formula algebraica ritè per ſuas regulas, hypotheſes, & axiomata de-

ducta exprimit, & eloquitur, pro *demonstrato* ab omnibus concedendum, & admittendum est.

SCHOLION.

64. *Tyrones singula, quæ hoc capite, quod jure clavim totius Algebræ dixerim, continentur, sæpius relegendo repetant, ac memoriæ mandent. Expertus loquor, eos, qui hæc intelligendo penetraverint, & memoria retinuerint, vix aliquam per decursum hujus doctrinæ difficultatem habituros. Iis verò, qui hoc neglecto capite ad cætera Algebræ secreta sinè clavi hac se penetraturos confidunt, suadeo, pedem referant, atque tempus pretiosum, in hoc perdendum, in alio sçientiæ genere redimant.*

CAPUT II.

De Additione Algebraica.

DEFINITIO XIII.

65. *Quantitates literales*, seu *Algebraicæ* dicuntur quantitates quæcunque per literas alphabeti (§. 4.) denominatæ, & expressæ: *Ex.gr.* Si linea vocetur *a*, aut numerus 1000 appelletur *b*. Quantitates *a* & *b* vocantur *literales*, seu *algebraicæ*.

DEFINITIO XIV.

66. *Additio Algebraica* est quarumcunque, & quomodocunque affectarum quantitatum literalium, (sive eæ numeris permixtæ sint, sive non sint) in unum complexum algebraicum collectio. Hoc complexum vocatur *Totum*, seu *Summa*.

THE-

THEOREMA III. FUNDAMENTALE.

67. PROP. *Complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium* suis signis *affectarum, non variatur quoad quantitatem;* id est, *valor complexi algebraici nec augetur, nec minuitur.* *Ex. gr.* Complexum algebraicum ($a+b-c$) idem manet quoad quantitatem seu scribatur; ($b+a-c$), sive ($b-c+a$), sive ($-c+a+b$), aut ($-c+b+a$) &c.

DEMONSTRATIO.

Complexum Algebraicum est *totum quoddam*, aggregatum ex quantitatibus literalibus duabus, vel pluribus, tanquam partibus (§. 23. & 24.) *totum* autem variari non intelligitur quoad quantitatem, nisi varientur quoque quoad quantitatem partes constituentes totum (§. 25. Arith.) sed partes quoad quantitatem non variantur per solam permutationem loci aut ordinis (§. 3.), ergo complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium *suis signis* affectarum non variatur quoad quantitatem. Q. E. D.

SCHOLION.

68. *Theorema hoc per modum axiomatis assummi poterat, cum penetratis rite terminis veritas per se nota sit; certum nempe clarumque est, numerum Ex. gr.*

100

100 hominum non variari quocunque ordine 100 homines disponantur, semper enim numerus 100 hominum, erit centum, & nunquam major, aut minor per solam transpositionem localem evadere potest.

COROLLARIUM I.

69. Quoniam summa ex *Additione algebraica* resultans est *complexum algebraicum*; eadem erit summa, quocunque ordine quantitates literales cum suis signis collectæ scribantur; Et hinc *Additio* quantitatum literalium inchoari potest à quacunque quantitate literali ad arbitrium operantis, modo in summa, omnes ritè collectas esse, exprimatur.

COROLLARIUM II.

70. Cum in *subtractione algebraica* residuum, sit differentia quantitatum, & quidem singularum à singulis (§. 37. Arith.) differentiam quoque per solam permutationem quantitatum literalium suis signis affectarum, non variari; clarum est.

COROLLARIUM III.

71. In *multiplicatione* quoque *algebraica* factum totale per solam permutationem factorum partialium non variari, clarum est ex notione totius complexi algebraici (§. 67.); In factis autem partialibus combinatio literarum per (§. 25.) non variat factum, quocunque ordine factores inter se combinentur ut patet ex (§. 53.) Et hinc *multiplicatio algebraica* inchoari potest à quacunque quantitate *multiplicandi*, & per quamcunque quantitatem *multiplicantis*; *ut infra patebit.*

COROLLARIUM IV.

72. Ex eodem Theoremate sequitur, quod in *Divisione algebraica*, arbitrarium sit operanti, divi-

divisionem inchoare à quacunque quantitate *dividendi*, & per quamcunque quantitatem *divisoris*; item quotos ex divisione resultantes quocunque ordine scribi posse, infra docebitur.

SCHOLION.

73. Liquet itaque multo faciliores esse operationes Arithmeticæ literalis, quam numerorum, cum in operationibus numericis opus sit multis regulis solum situm, & ordinem concernentibus, easque regulas caute observandas habeat operans, quibus in calculo literali tutò supersedemus.

PROBLEMA I.

74. PROP. *Quantitates quascunque signis algebraicis expressas addere.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates addendæ sint inter se homogeneæ* (§. 52. & 53.)

I. *Coëfficientes* quantitatum homogenearum iisdem signis (hoc est, quarum quælibet habet signum +, vel quævis signum −) affectarum, colligantur in unam summam sub suis signis per (§. 47. & 48.) exprimendam. *Hic revocentur in memoriam* (§. 12. & 48.) *Vide exemp. I. casus I.*

II. Si quantitates homogeneæ sint affectæ diversis, seu contrariis signis (§. 19.) id est, (una harum habeat signum +, altera −), *coëfficiens* minoris subtrahatur à majore, & residuum scribatur in loco summæ, præfixo signo habentis majorem coëfficientem per (§. 21.) *Vide exemp. II. cas. I.*

III. Si

III. Si quantitates homogeneæ, diversis signis affectæ, sint æquales, id est (si æquales habeant coefficientes) in loco summæ omittantur, seu non scribantur. *Vide exempl. III. casus I.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. est hypothesis (§.47.& 48.) Reg. II. continetur in (§. 21.) Reg. III. innititur axiomati (§. 20.) Q. E. D.

CASUS II. *Si quantitates addendæ sint heterogeneæ* (§. 54.)

Regula unica; Quantitates heterogeneæ manentibus suis signis in loco summæ sibi tantum juxta scribantur, quocunque ordine; Hic in *memoriam* etiam *revocandus* (§. 12.) *Vide exemp. I. & II. casus II.*

DEMONSTRATIO.

Patet hanc collectionem esse solum additionem indicatam (§. 17.) cum heterogeneæ quantitates reipsa per coefficientes addi nequeant per (§.31.Arith.) Q. E. D.

CASUS III. *Si ex quantitatibus addendis, quædam sint homogeneæ, quædam vero heterogeneæ.*

I. *Homogeneæ* addantur *per regulas casûs I.*

II. *Heterogeneæ* sibi juxta ponantur in loco summæ cum suis signis per reg. casûs II. *Vide exemp. I. & II. casus III.*

CASUS IV. *Si quantitates addendæ sint numeri seorsim cum signis algebraicis positi.*

I. Cum numeri sint quantitates inter se homogeneæ, addendi sunt *per regulas casûs I. Vide exempl. I. casûs IV.*

II. Cum numeri seorsim positi sint quantitates heterogeneæ respectu quantitatum literalium, si cum iis addendi veniant, servetur *reg. casûs II. Vide exemp. II. cas. IV.* Hic casûs jam demonstratus est.

PARADIGMA
Exemplorum Additionis algebraicæ.

CASUS I.

EXEMP. I. REG. I.

$$\text{Ad.}\left\{\begin{array}{ll} 3a - 2b + c & \text{♂} \\ 4a - 3b + c & \text{♄} \end{array}\right.$$
$$\text{Sum. } 7a - 5b + 2c \quad \text{☿}$$

EXEMP. II. REG. II.

$$\text{Ad.}\left\{\begin{array}{ll} a^2 + 7b - 4c & \text{♂} \\ 7a^2 - 9b + 7c & \text{♄} \end{array}\right.$$
$$\text{Sum. } 8a^2 - 2b + 3c \quad \text{☿}$$

EXEMP. III. REG. III.

$$\text{Ad.}\left\{\begin{array}{ll} 2a + 3b - c + d & \text{♂} \\ 3a - 3b + c + 2d & \text{♄} \end{array}\right.$$
$$\text{Sum. } 5a \quad + 3d \quad \text{☿}$$

CASUS II.

EXEMP. I.

$$\text{Ad.}\left\{\begin{array}{ll} 3ab + cd - f & \text{♂} \\ ac + 5ab - 7 & \text{♄} \end{array}\right.$$
$$\text{Su. } 8ab + ac + cd - f - 7 \quad \text{☿}$$

EXEMP. II.

$$\text{Ad.}\left\{\begin{array}{ll} 12a - 4c + b & \text{♂} \\ - 3b + ad + 4c & \text{♄} \end{array}\right.$$
$$\text{Sum. } 12a - 2b + ad \quad \text{☿}$$

EXEMP. III.

$$\text{Ad.}\left\{\begin{array}{ll} 5x + 3y - 8b & \text{♂} \\ 2xy - 3y + 12 & \text{♄} \end{array}\right.$$
$$\text{Su. } 5x + 2xy - 8b + 12 \quad \text{☿}$$

CASUS III.

EXEMP. I.

$$\text{Addenda}\left\{\begin{array}{ll} 4a^3 + 3b & \text{♂} \\ 3ab - db & \text{♄} \end{array}\right.$$
$$\text{Sum. } 4a^3 + 3b + 3ab - db \quad \text{☿}$$

Ex-

EXEMP. II.

$$\text{Addenda}\begin{cases} a^2 + a^3 - 15 & ♂ \\ 2a - bc + 8c & ♄ \end{cases}$$

$$\text{Sum. } a^2 + 2a + a^3 - bc + 8c - 15 \quad ☿$$

CASUS IV.

EXEMP. I.

$$\text{Ad.}\begin{cases} 24 + 8 - 4 = 28 & ♂ \\ 15 - 10 + 4 = 9 & ♄ \end{cases}$$

$$\text{Sum. } 39 - 2 = 37 \quad ☿$$

EXEMP. II.

$$\text{Ad.}\begin{cases} ad + b - 4 & ♂ \\ 6 + ad - f & ♄ \end{cases}$$

$$\text{Sum. } 2ad + b - f + 2 \quad ☿$$

SCHOLION.

75. *In gratiam Tyronum (qui in idæis universalibus veritatem propositam non illico assequuntur) adductum* universale exemplum I. casûs I. *claritatis gratia ad determinatas quantitates applicare placuit, substituendo videlicet loco literarum, vel certas quantitates, vel numeros. Igitur significet;* a *unum florenum Germ.* b *unum grossum,* c *crucif. erit in numeris determinatis.*

EXEMPLUM I. CASÛS I.

	Algebraicè	*numericè*			
	$3a - 2b + c$ *id est;*	3 *flor.*	$-$ 2 *groff.*	$+$ 1 *cr.*	♂
	$4a - 3b + c$ *seu*	4	$-$ 3	$+$ 1	♄
Sum.	$7a - 5b + 2c$	$=$ 7 *fl.*	$-$ 5 *gr.*	$+$ 2 *cr.*	☿

Idem Arithmetice.

flor.	*groff.*	*crucif.*	
2	18	1	♂
3	17	1	♄
6	15	2	☿

Idem exemplum substituendo pro literis numeros

Sit; $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$

erit

	$3a - 2b + c$	$= 15 - 8 + 7$	$= 14$	♂
	$4a - 3b + c$	$= 20 - 12 + 7$	$= 15$	♄
Sum.	$7a - 5b + 2c$	$= 35 - 20 + 14$	$= 29$	☿

Eodem modo, & reliqua exempla substitutis loco literarum numeris, vel certis quantitatibus, veritatem doctrinæ declarant.

CAPUT III.

De Subtractione Algebraica.

DEFINITIO XV.

76. *Subtractio Algebraica*, eſt inventio, vel expreſſio complexi alicujus algebraici, quod per ſua ſigna exhibet *differentiam*, ſeu *reſiduum* alterius majoris, vel ſimplicis, vel complexæ quantitatis. *Ex. gr.* Si ex quantitate a, ſit ſubtrahenda quantitas b, erit complexum $a-b$, exhibens differentiam, ſeu reſiduum de quantitate a, (§.18.)

AXIOMA III.

77. Ablatio, ſeu ſubtractio quantitatis poſitivæ, eſt ejusdem quantitatis ſubtrahendæ poſitio negativa; & vice verſa, ablatio, ſeu ſubtractio quantitatis negativæ, eſt ejusdem negativæ quantitatis ſubtrahendæ, poſitio poſitiva. (§.20.& 21.) *Ex. gr.* Si Petrus habeat flor. 8. poſitivos, & eidem aufferantur 3. flor. poſitivi, habebit Petrus tantum 5. flor. id eſt; $8-3$. Et vice verſa; ſi Petro habenti 5 fl. ſeu $8-3$, donentur 3 floreni, habebit utique $5+3$ ſeu 8, id eſt $8-3+3=8$. (§. 20.)

PROBLEMA II.

78. PROP. *Quantitates quascunque, ſignis algebraicis expreſſas, ab aliis quantitatibus algebraicis ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quantitates ſubtrahendæ ſubſcribantur quantitatibus, à quibus ſubtractio fieri debet. *Vide exempl. I. & II. &c.*

II. Signa in quantitatibus ſubtrahendis mutentur in contraria, id eſt, (ſignum + mutetur in −, & ſignum − mutetur in +) *Vide exempl. I. & II. &c.*

III. Sic affectæ quantitates ſub ſignis ſuis contrariis, addantur (per regulas Problema prior.) cum quantitatibus ſuperioribus in unam ſummam, dabit ſumma hæc differentiam, ſeu reſiduum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Subtractio quantitatis poſitivæ à poſitiva eſt ejusdem quantitatis ſubtrahendæ poſitio negativa, & vice verſa per axioma (§. 77.), ſed hoc factum eſt per datas regulas, ergo per datas regulas ritè peracta habetur ſubtractio, ergo ritè inventa differentia, ſeu Reſiduum (§. 76.)

SCHOLION.

79. *In his & cæteris ſubtractionum algebraicarum adducendis exemplis*, mutationem ſignorum in contraria, *indicabimus ſignis inferiore loco in ſubtrahendo poſitis,* Ex. gr. *Si + in − ſit mutatum, indicabitur hoc modo* $(\underset{-}{+})$ *& vice verſa − in +, hoc modo* $(\overset{-}{+})$, *unde pro facienda additione* (juxta datam regulam III. hujus) *ſigna inferiore loco poſita uſurpanda erunt, ſuperiora verò in ſubtrahendo poſita ſigna, pro non adjectis habenda.*

PARADIGMA.

Exemplorum Subtractionis Algebraicæ desumptis exemplis ex Additione (§. 74.)

CASÛS I. EXEMPLUM I.

	$7a - 5b + 2c$	☿
Subtrah.	$4a - 3b + c$	
Mut. sig.	$-4a + 3b - c$	♄
Resid.	$3a - 2b + c$	♂

EXEMPLUM II.

	$8a^2 - 2b + 3c$	☿
Subtrah.	$7a^2 - 9b + 7c$	
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	♄
Resid.	$a^2 + 7b - 4c$	♂

EXEMPLUM III.

	$5a + 3d$	☿
Subtrah.	$3a + 2d - 3b + c$	
Mut. sig.	$- \quad - \quad + \quad -$	♄
Resid.	$2a + d + 3b - c$	♂

CASÛS II. EXEMPLUM II.

	$a^2 + 2a + a^3 - bc + 8c - 15$	☿
Subtrah.	$2a - bc + 8c$	
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	♄
Resid.	$a^2 + a^3 - 15$	♂

CASÛS II. EXEMPLUM III.

	$12a - 2b + ad$	☿
Subtrah.	$-3b + ad + 4c$	
Mut. sig.	$+ \quad - \quad -$	♄
Resid.	$12a + b - 4c$	♂

CASÛS IV. EXEMP. I.

	$39 - 2 = 37$	☿
Subt.	$15 - 10 + 4 = 9$	
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	♄
Resid.	$24 + 8 - 4 = 28$	♂

SCHO-

SCHOLION I.

80. *Ut veritas doctrinæ Tyronibus magis eluscat, bina exempla in scholio Additionis (§. 75.) adducta, & ad quantitates determinatas applicata, hic exhibemus, igitur significet* a *flor.* b *groß.* c *crucif. ut in additione.*

Casûs I. Exemplum I.

	$7a - 5b + 2c$		7 *fl.* $- 5$ *gr.* $+ 2$ *cr.* ☿
Subtr.	$4a - 3b + c$	*seu*	$4 - 3 + 1$ ♄
Mut. sig.	$- \quad + \quad -$		$- \quad + \quad -$
Resid.	$3a - 2b + c$	*seu*	3 *fl.* $- 2$ *gr.* $+ 1$ *cr.* ♂

Id est

flor.	*groß.*	*crucif.*	
6	15	2	☿
3	17	1	♄
2	18	1	♂

Idem in numeris juxta substitionem (§. 75.)

Sit $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$.

Erit

	$7a - 5b + 2c$	$=$	$35 - 20 + 14 = 29$ ☿
Subtr.	$4a - 3b + c$	$=$	$20 - 12 + 7 = 15$ ♄
M. sig.	$- \quad + \quad -$		$- \quad + \quad -$
Resid.	$3a - 2b + c$	$=$	$15 - 8 + 7 = 14$ ♂

SCHOLION II.

81. *Examen Additionis sive proba (si eam facere places) in Algebra, fit per regulas subtractionis* hujus Probl. *ut exempla omnia declarant. Eodem modo examen subtractionis fit per regulas additionis (§. 74.) adductas. Videlicet, si quantitas subtrahenda non mutatis signis, seu cum signis superioribus expressa, addatur residuo, summa restituit quantitatem, à qua subtractio facta est. En Examen, seu probam exempli I. casûs I.*

		$7a - 5b + 2c$	☿
	Subtrah.	$4a - 3b + c$	♄
	Mut. sig.	$- \quad + \quad -$	
Addenda	*Resid.*	$3a - 2b + c$	♂
	Subtr.	$4a - 3b + c$	♄
	Summa	$7a - 5b + 2c$	♂

CA-

CAPUT IV.

De Multiplicatione Algebraica.

DEFINITIO XVI.

82. Multiplicatio algebraica, eſt *ductus* quantitatis algebraicæ unius in aliam, qui *ductus* exprimitur per hypotheſim *multiplicationis primo modo* (§. 25.) *indicatæ.*

THEOREMA IV.

83. PROP. *Multiplicatio quantitatis negativæ per poſitivam, & vice verſa, quantitatis poſitivæ per negativam*, factum *producit* negativum; *id eſt; ſignum* — *cum* +, *item* + *cum* —, *dat in facto ſignum* —.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Multiplicatio eſt *iterata additio;* (§. 46. Arith.) ſed additio ejusdem quantitatis negativæ iterata, ſeu toties facta quoties quantitas poſitiva affirmat, producit ſummam negativam, (§. 47. & 74.) id eſt, *factum negativum*, ergo; *quod erat primum.*

Pars II. *Productum*, ſeu *factum* non variatur, ſive multiplicans in multiplicandum, ſive multiplicandus in multiplicatorem ducatur per (§. 49. Arith.) ſed (*per partem I. hujus*) quantitas negativa, multiplicata per poſitivam, factum producit negativum,

ergo

ergo etiam eadem quantitas poſitiva, multiplicata per negativam, *factum* producit *negativum. Cum tam affirmare negationem, quam negare affirmationem ſit ſimpliciter negare. Quod erat alterum.*

SCHOLION.

84. *Demonſtratio hæc, uti & ſequentis Theorem. Tyronibus (qui algebraicis nondum aſſuevere demonſtrationibus) interea ſufficiat, donec ad calcem hujus doctrinæ Algebraicæ, hoc, & cætera quæpiam Theoremata ope æquationum algebraicarum directe demonſtraturi ſummus. Ne quis vero me criminis*, admiſſi *in demonſtratione* paralogiſmi *arguat; videlicet, eadem, ſed inverſa ratione, argumentando, probari quoque*: multiplicationem quantitatis poſitivæ per negativam, & viciſſim negativæ per poſitivam, factum producere debere poſitivum; *adeoque eadem demonſtratione* contradictorium *confici; Is noverit, argumentationem hanc meam huic initi fundamento; quod*, tam affirmare negationem, quam negare affirmationem, ſit ſimpliciter negare; *quantitas autem poſitiva eſt affirmativa, & negativa eſt negativa* (§. 11.) ut patebit inferius in ſchemate affirmationum, & negationum; *cui fundamento, cum inverſa ratio argumentandi initi non poſſit, crimine* admiſſi paralogiſmi *me abſolvendum, ſano quisquis utitur judicio haud difficile intelliget.*

THEOREMA V.

85. PROP. *Multiplicatio quantitatis negativæ per negativam*, factum *producit* affirmativum, *ſeu* poſitivum; *id eſt, ſignum — cum —, dat in facto ſignum* +.

DEMONSTRATIO.

Negare negationem eſt ſimpliciter affirmare (per ſcholion §.87.) ſed multiplicare quantitatem negativam per negativam, est unam quantitatem negativam toties negare, esse sibi negative additam, quoties altera negativa negat, ergo se invicem affirmant, seu ponunt positive, ergo *factum* producunt *positivum*. Q. E. D.

COROLLARIUM.

86. Ex his duobus Theorematibus deducitur regula in multiplicatione algebraica cautè observanda, videlicet; *Signa eadem factorum, dant in facto* +, *diversa verò* −; id est: si uterque factorum habeat + præfixum, vel uterque habeat præfixum signum −, in facto ponendum est signum +; si verò unus factorum habeat +, alter −, in facto scribendum est −.

SCHOLION I.

87. *Ut veritas datæ regulæ, ex Theorematibus deductæ, vel ipsis oculis Tyronum pateat*, schema affirmationum, & negationum *subjectum*, *inspicere velint, in quo quantitas positiva, seu affirmativa, respondet affirmationi, seu signo* +, *quantitas verò negativa; negationi, id est signo* −.

Schema affirmationum, & negationum.

$$\overset{+}{\textit{Qui affirmat}}\begin{cases}\textit{Se }\overset{-}{\textit{negasse}}\textit{ aliquid, ille id ipsum }\overset{-}{\textit{negat.}}\\ \textit{Se }\overset{+}{\textit{affirmâsse}}\textit{ aliquid, ille id ipsum }\overset{+}{\textit{affirmat.}}\end{cases}$$

$$\overset{-}{\textit{Qui negat}}\begin{cases}\textit{Se }\overset{-}{\textit{negasse}}\textit{ aliquid, ille id ipsum }\overset{+}{\textit{affirmat.}}\\ \textit{Se }\overset{+}{\textit{affirmâsse}}\textit{ aliquid, ille id ipsum }\overset{-}{\textit{negat.}}\end{cases}$$

Ergo;

+ *cum* −, *dat* −.

+ *cum* +, *dat* +.

− *cum* −, *dat* +.

− *cum* +, *dat* −.

SCHO-

SCHOLION II.

88. *Ante faciendam multiplicationem per sequens problema, in memoriam veim revocentur (§§. 25. 53. & 71.) cum ductus quantitatis algebraicæ unius in alteram, fiat per solam literarum conjunctionem, seu combinationem.*

PROBLEMA III.

89. PROP. *Quantitates algebraicas quasvis, per quantitates alias quascunque multiplicare.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si quantitates literales non sint affectæ coëfficientibus, aut exponentibus, nec numeris aliis permixtæ.*

I. Infra multiplicandum ſcribatur multiplicans cum ſuis ſignis, & ſubducantur lineâ. *Vide exemp. I. & II.*

II. Singula membra *multiplicantis* ducantur in ſingula membra *multiplicandi*, ut *in arithmetica*. Ductus autem iſte fit præcisè combinando literas *multiplicantis* cum literis *multiplicandi*. (§. 25.) *Vide facta partialia in exempl. I. & II.*

III. Signa in factis partialibus præfigantur *juxta regulam* (§. 86.) videlicet; *ſigna eadem, dant* +, *diverſa* −; *Vide exempl. I. & II.*

IV. Facta partialia (*ductâ lineâ*) colligantur, ſeu addantur in unam ſummam totalem, *per Reg. Addit.* (§. 74.) ſumma hæc dabit factum totale. *Vide exem. I & II.*

DE-

DEMONSTRATIO

Regula I. demonſtratione non eget. Reg. II. conſtat ex (§.53.Arith.) Reg. III. eadem eſt, quæ (§. 86.) & denique Reg. IV. habetur demonſtrata (§. 74.) Q. E. D.

CASUS II. *Si quantitates inter ſe multiplicandæ affectæ ſint coëfficientibus.*

Præter Regulas datas in caſu I. obſerventur hæ:

I. Coefficientes ſingulorum membrorum in multiplicando, multiplicentur per coefficientes ſingulos multiplicantis, ut *in Arith.* & facta coefficientium ſingulorum adſcribantur ſingulis factis literalibus partialibus, ad ſiniſtram, præfixo ſigno *juxta reg. III. caſ. I. Vide exempl. I. caſ. II.*

II. Si factorum unus habeat coëfficientem, alter vero careat coefficiente, tum coëfficiens invariatus præfigatur facto literali partiali; *Vide exemp. II. caſ. II.*

DEMONSTRATIO.

Reg. I. patet ex (Arith. §. 53.) cum coëfficientes ſint numeri. Reg. II. clara eſt; quia coefficiens quantitatis literalis carentis coëfficiente eſt (1) tacitè præfixa, (§. 48.) unitas vero non multiplicat, hinc rectè præfigitur facto literali, coëfficiens alterius quantitatis invariatus.

CA-

CASUS III. *Si quantitates affectæ ſint exponentibus.*

Præter regulas casûs I. has ſervare neceſſe eſt;

I. Videatur an *factorum* literæ, exponentibus affectæ, ſint inter ſe homogeneæ; ſi homogeneæ ſunt, numeri, vel (ſi exponentes etiam ſint literæ) literæ exponentium, addantur, & pro *facto* (loco combinationis literarum homogenearum) una duntaxat ex homogeneis litera ſcribatur, cuj ad dextram ſurſum verſus ſumma inventa exponentium ſuperſcribatur, ceteræ verò literæ heterogeneæ adhærentes per *regulas caſ. I.* combinatæ exprimantur. *Vide exemp. I. & II. caſ. III.*

II. Si unus ex factoribus habeat exponentem, alter verò eidem homogeneus careat exponente; Exponens factoris homogenei augeatur unitate, & ita auctus ſuperſcribatur uni literæ homogeneæ, ut in *regula I. hujus. Vide exempl. IV. caſ. III.*

III. Exponentes heterogenearum literarum invariati, cum ſuis literis quas afficiunt, ſcribendi ſunt in facto. *Vide exemp. III. caſ. III.*

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 49. 50. & 51.) reg. III. ex (§. 41.)

SCHO-

SCHOLION.

90. *Tyrones adductum post exempla hujus III. casûs positum scholion (§. 91.) non prætermittant legendo, in quo fundamentum additionis exponentium, declaratur ad illorum captum.*

CASUS IV. *Multiplicare algebraicè inter se quascunque quantitates datas, affectas coëfficientibus, exponentibus, ac aliis numeris permixtas.* Serventur regulæ casus I. II. & III. ac præterea regulæ arithmeticæ (§. 53. Arith.) *Vide exempl. I. & II. cas. IV.* Hic cas. IV. demonstratione non eget, cum in hoc antecedentes omnes casus collecti habeantur.

PARADIGMA
Exemplorum Multiplicationis Algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I.			EXEMPLUM II.
Multiplicand.	$a - b$	*facto-*	$a + b - c$
Multiplicans	$a - b$	*res.*	$a + b$
Facta	$aa - ab$		$aa + ab - ac$
Partialia	$- ab + bb$		$+ ab + bb - bc$
Fact. tot.	$aa - 2ab + bb.$		$aa + 2ab + bb - ac - bc$

CASUS II.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{rl} & 3a + b \\ & 5a - 4b \\ \hline & 15aa + 5ab \\ & \quad - 12ab - 4bb \\ \hline \textit{Fact.} & 15aa - 7ab - 4bb \end{array}$$

Ex.

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} 2a + 3b - 2c \\ \quad 4a + 5b \\ \hline 8aa + 12ab - 8ac \\ \qquad + 10ab + 15bb - 10bc \\ \hline \textit{Fact.}\ 8aa + 22ab + 15bb - 8ac - 10bc \end{array}$$

CASUS III.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l} a^3 + b^2 \\ a^3 - b^2 \\ \hline a^6 + a^3 b^2 \\ \quad - a^3 b^2 - b^4 \\ \hline \textit{Fact.}\ a^6 - b^4 \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} a^n + a^x - b^m \\ \qquad a^n \\ \hline a^{2n} + a^{n+x} - a^n b^m \end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{l} a^2 + b^3 d - d \\ \qquad a^3 b^4 \\ \hline a^5 b^4 + a^3 b^7 d - a^3 b^4 d. \end{array}$$

EXEMPLUM IV.

$$\begin{array}{l} a + b^4 \\ a^6 + b \\ \hline a^7 + a^6 b^4 + ab + b^5 \end{array}$$

SCHOLION.

91. *Cum* (§.50.) *expressio per exponentes sit tantum modus scribendi brevior, idcirco, Tyrones ut multiplicationem quantitatum habentium exponentes menti fixius imprimant, exempla bina prioris casus III. per modum hasce fuse scribendi, expressa damus, ut, si Tyro dubitaverit in casu simili, quomodo per abreviationem scribenda sint facta, hac methodo servata, seipsum instruat.* En exempla hujus casus III. fuse descripta,

EXEMP. I. CASUS III. fusè.

$$\begin{array}{lll} & aaa + bb & \\ & aaa - bb & \\ \hline \textit{Fuse} & aaaaaa + aaabb & \\ & \qquad - aaabb - bbbb & \\ \hline \textit{Factum} & aaaaaa \quad - bbbb. & \\ \hline \textit{Brevius} & a^6 \quad - b^4 & \end{array}$$

EXEMP. III. CASÛS III. fusè.

$$\begin{array}{r} aa + bbbd - d \\ aaabbbb \\ \hline \end{array}$$

$$\textit{Fusè}\quad aaaaabbbb + aaabbbbbbbd - aaabbbbd$$

$$\textit{Brevius}\quad a^5b^4 + a^3b^7d - a^3b^4d.$$

CASUS IV.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r} 2a^3 - 4b + 1 \\ 5a^4b - 7 \\ \hline 10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b \\ - 14a^3 + 28b - 7 \\ \hline \end{array}$$

$$10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b - 14a^3 + 28b - 7$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} a^5 + 4a - d^n \\ 3a^2 + 8 \\ \hline 3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n \\ + 8a^5 + 32a - 8d^n \\ \hline \end{array}$$

$$3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^n + 8a^5 + 32a - 8d^n.$$

SCHOLION.

92. *Ut doctrina de multiplicatione algebraica hactenus tradita clarior Tyronibus evadat, præsertim quæ de signis demonstrata sunt, exemplum I. casûs I. ad numeros, seu determinatas quantitates applicabimus, quam applicationem in omnibus exemplis Tyronibus faciendam suadeo. Sit igitur* a $= 8$, & b $= 2$

Erit

$$\begin{array}{rcl} a - b = & 8 - 2 & \\ a - b = & 8 - 2 & \\ \hline aa - ab = & 64 - 16 & \\ - ab + bb = & - 16 + 4 & \\ \hline aa - 2ab + bb = & 64 - 32 + 4 = 36 & \end{array}$$

sed $8 - 2 = 6$

& $8 - 2 = 6$

factum ex multiplicatione 6 per 6

id est $= 36$.

CA-

CAPUT V.

De Divisione Algebraica.

DEFINITIO XVII.

93. *Divisio Algebraica* est producti, sive facti alicujus algebraici in suos factores *Resolutio*; & hinc *dividere algebraice*, est dato factore uno invenire alterum. *Ex.gr.* Dato facto algebraico *abc*, tanquam *dividendo*, datoque factore uno *a*, tanquam *divisore*, invenire factorem alterum *bc*, tanquam *quotum*, qui factores in se ducti produxerunt factum *abc*.

THEOREMA VI.

94. PROP. *Quantitas* negativa *divisa per quantitatem* positivam, *& vicissim* positiva *per* negativam, *pro quoto dat quantitatem* negativam. *Quantitas vero* negativa *divisa per* negativam, *dat* positivam; *seu universaliter:* signa eadem *in divisore, & dividendo, dant pro quoto* +, diversa *dant* −, *quemadmodum in multiplicatione ostensum est.*

DEMONSTRATIO.

95. Quod multiplicatio componit, hoc solvit divisio (§.121. Arith.) sed factum seu productum algebraicum per eandem regulam signorum componitur (§. 86.) ergo etiam per eandem signorum regulam

resolvi debet. Nam quotus, tanquam unus ex factoribus, multiplicatus per divisorem, tanquam factorem alterum, restituere debet dividendum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

96. In divisione itaque algebraica eadem regula studiose observanda; nempe *signa in divisore, & dividendo eadem, dant pro quoti signo* +, *diversa* —.

SCHOLION.

97. *Cum usus divisionis algebraicæ actualis per* Problema infra tradendum, *haud frequens sit, propterea quod exacta hujusmodi divisio, seu resolutio in factores raro fieri possit, idcirco præcipua duntaxat exempla, quæ usui Tyronum futura sint, adferentur.*

PROBLEMA IV.

98. PROP. *Productum algebraicum in suos factores resolvere, seu Dividere algebraicè.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si* divisor *sit quantitas monomia nullo* coëfficiente, *aut* exponente *affecta*, & dividendus *similiter non sit affectus aliquo* coëfficiente, *aut* exponente.

I. Si litera, vel literæ divisoris reperiantur in omnibus dividendi membris, peracta habetur divisio, simpliciter delendo in membris dividendi literas divisoris, erunt reliquæ dividendi literæ quotus (§. 35.) observata tamen cautè regula signorum (§. 96.) tradita. *Vide exemp. I. cas. I.*

II. Si

II. Si aliquod membrum dividendi sit idem cum divisore, seu præcisè eadem quantitas literalis, pro quoto illius membri scribenda est *unitas*, seu numerus 1 *Vide exemp. II. cas. I.*

III. Si in aliquo membro dividendi litera, vel literæ divisoris non reperiantur, interpositâ lineâ exprimendus est quotus *juxta doctrinam* (§. 30.) *Vide exemp. III. cas. I.*

CASUS II. *Si tam divisor, quam dividendus sint quantitates* polynomiæ *nullo aut* coëfficiente, *aut* exponente *affectæ.*

I. Ductis ad sinistram, & dexram deorsum versus lineis, includatur totus dividendus, divisor scribatur ante lineam sinistram dividendi, latus verò dextrum post lineam dextram deserviat quotis scribendis. *Vide positionem I. in omnibus exemplis.*

II. Divisoris polynomii membrum unum eligatur, quod placet, (*illud tamen præ cæteris eligendum, cujus litera, vel literæ in pluribus dividendi membris reperiuntur,*) cum quo tota divisio peragenda est; nam uno semel assumpto, aliud divisoris membrum intra eandem divisionem assumere non licet.

III. Videatur in quo *dividendi* membro reperiatur assumptum membrum *divisoris*, & reliquæ literæ membri dividendi, quæ in divisore non habentur, pro quoto scribantur, *ut in casu I. dictum*; servata regula de signis (§. 96.) adducta. *Vide positionem I. exempli I. cas. II.*

IV. Per hunc literalem quotum, juxta regulas multiplicationis algebraicæ, multiplicentur *omnia membra* divisoris, & facta partialia sub membis dividendi homogeneis scripta, subtrahantur algebraice. *Vide exemp. I. casus II.*

V. Cum membris dividendi residuis, eodem modo per easdem regulas III. & IV. inquiratur in quotum literalem, donec facta subtractione ultima nihil remaneat, *vide positionem I. exempli I. casûs II.* si aliquid remaneat, quod porro dividi non possit, illud juxta Hypoth. (§. 30.) exprimendum erit. *Vide exemp. II. cas. II.*

SCHOLION.

99. *Plenam divisionis praxim Tyrones oretenus edocendi sunt, nec enim ea à Typothetis impetrare potui, quæ ad plenam necessaria fuerunt doctrinam. Hic quoque recolenda, quæ (§. 72.) dicta sunt, nullum videlicet, ordinem, aut in inquirendo quoto, aut in subtrahendis factis partialibus observari, sed quemadmodum quotum literalem partialem ex quocunque membro dividendi eruere licet, ita facta partialia à quibusvis membris homogeneis subtrahi possunt.* Vide Paradigma exempl. divis.

CASUS III. *Si tam divisor, quam dividendus affecti sint* coefficientibus.

Præter regulas cas. II. servanda isthæc:

per

per coëfficientem diviſoris dividantur etiam coëfficientes dividendi arithmeticè. *Vide exempl. caſ. III.*

CASUS IV. *Si tam diviſor, quam dividendus affecti ſint* exponentibus.

Servatis regulis ſupra adductis, ſi quantitates affectæ exponentibus in diviſore ſint homogeneæ quantitatibus dividendi, exponentes diviſoris ſubtrahantur ab exponentibus dividendi, reliqua fiant, ut in caſu I. *Vide exemp. I. & II. caſ. IV.*

Regulæ harum Reſolutionum demonſtratione non egent, cum ex definitione diviſionis (§. 93.) pateat, hac ratione inventum quotum in ſingulis membris eſſe factorem alterum dividendi, ut per multiplicationem diviſoris in quotum liquet.

PARADIGMA

Exemplorum Diviſionis Algebraicæ.

CASUS I. EXEMPLUM I.

Dividendus. *Quotus totalis.*

$$\textit{Diviſor}\ a\left\{\begin{array}{ccc} ab & +ac & -ad \\ | & | & | \\ a & a & a \end{array}\right\} b+c-d$$

NB. *Signum deletivum ad libitum eſt lineola* (|) *interpoſita.*

EXEMPLUM II.

Dividendus.

$$\textit{Diviſor}\ -ab\left\{\begin{array}{ccc} abc & -abdc & -ab \\ || & || & || \\ -ab & -ab & -ab \end{array}\right\} -c+dc+1. \quad \textit{Quotus.}$$

Ex-

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{lc|c} & \textit{Dividendus} & \textit{Quotus.} \\ \textit{Divisor } d & \left\{\begin{array}{ccc} db & + ad & + bc \\ d & d & d \end{array}\right\} & b + d + \frac{bc}{d}. \end{array}$$

CASUS II.

Exempla sequentium casuum desumpta sunt ex exemplis in multiplicatione adductis.

EXEMPL. I. quod est primum CAS. I. Multipl.

$$\begin{array}{llll} & \textit{Dividendus} & & \\ \text{Positio I.} & \left\{\begin{array}{lll} aa & - 2ab & + bb \\ aa & - ab & \\ - & + & \end{array}\right\} & \begin{array}{l} \textit{quot. part.} \\ a \end{array} & \\ \textit{Divisor } a - b & & & \textit{Quotus totalis } a - b \\ \text{Positio II.} & \left\{\begin{array}{lll} \textit{resid.} & - ab & + bb \\ & - ab & + bb \\ \textit{subt.} & + & - \end{array}\right\} & \begin{array}{l} \textit{quot. part.} \\ - b \end{array} & \\ \textit{Divisor } a - b & & & \\ & \quad 0 \quad 0 & & \end{array}$$

Scilicet, in Positione I. *assumpta ad libitum ex divisore litera* a, *dico*: a *in* aa, *dat quotum* a, *per hunc quotum* a *multiplico totum divisorem* a − b, *& factum* aa − ab, *subscribo membris homogeneis dividendi*, vide Position. I. *deinde subtrahendo mutantur signa in contraria, unde* − aa, *&* + aa *se destruunt, item* + ab *destruit ex* − 2ab *unum* − ab *adeoque remanet adhuc* − ab *residuum, ad hoc residuum depono tertium membrum dividendi* + bb, ut factum vides in Positione II.

In hac Positione II. iterum ex divisore assumpta eadem litera a, *dico*: a *in* − ab, *dat quotum* − b, *& per quotum* − b *multiplicando totum divisorem* a − b, *dat factum* − ab + bb, *unde subtrahendo, mutatis in contraria signis, membra sibi homogenea ex dividendo totaliter destruunt, & nihil residui relinquunt, itaque quotus totalis emersit* a − b, *qui per divisorem* a − b *multiplicatus restituit dividendum*, aa − 2ab + bb.

Ut veritas *Reg. II. Cas. II.* pateat, de assumendo ad libitum quocunque divisoris membro, in gratiam Tyronum idem exemplum repetere placet

placet assumendo ex divisore $a-b$ secundam literam, nempe $-b$, sit itaque

Dividendus.

$$
\begin{array}{ll|l|l}
\text{Positio I,} & aa - 2ab + bb & \text{quot. part.} & \text{Quotus} \\
\text{Divis. } a-b & \text{fact.} \; - ab + bb & -b & \text{totalis} \\
 & \text{subt.} \; + \quad - & & -b+a. \\
\hline
\text{Positio II.} & \text{res. } aa - ab & \text{quot. part.} & \\
\text{Divis. } a-b & aa - ab & +a & \\
 & - \quad + & & \\
\hline
 & o \quad o & &
\end{array}
$$

In Positione I. assumpta igitur ex divisore litera $-b$, *dico*: $-b$ *in* $+bb$, *dat quotum* $-b$, *& multiplicando totum divisorem* $a-b$, *per* $-b$, *dat factum* $-ab+bb$, *subtrahendo mutatis signis fit* $+ab-bb$, *unde* $-bb$ *&* $+bb$ *se invicem destruunt*, *&* $+ab$ *ex* $-2ab$ *destruit unum* $-ab$ *unde remanet* $-ab$, vide Positionem I. *ad hoc residuum* $-ab$, *depono tertium membrum dividendi* aa, vide Positionem II.

In Positione II. retenta eadem divisoris litera $-b$, *dico*: $-b$ *in* $-ab$, *dat quotum* $+a$, *& multiplicando per quotum* a, *totum divisorem*, $a-b$ *dat factum* $aa-ab$, *mutatis itaque signis fit* $-aa+ab$, *unde cum* $-aa$ *&* $+aa$, *item* $+ab$ *&* $-ab$, *se invicem destruendo nihil relinquant, patet quotum totalem esse* $-b+a$, *qui idem est cum quoto operationis primæ*; $a-b$, *cum translocatio literarum non variet complexum.* (§.67.) *Ex hac operatione secunda, etiam liquet veritas tum Reg. III. cas. II. tum Coroll.* (§.72.) *adducti.*

EXEMPLUM II. CASUS II.

Dividendus

$$
\begin{array}{ll|l|l}
\text{Positio I.} & aa + 2ab + bb + dc & \text{quot. part.} & \\
\text{Div. } a+b & aa + ab & a & \text{quot. totalis.} \\
 & - \quad - & & \\
\hline
\text{Posit. II.} & \text{Resid. } \; ab + bb + dc & \text{quot. part.} & a+b+\dfrac{dc}{a+b} \\
\text{Div. } a+b & \text{Fact. } \; ab + bb & +b & \\
 & \text{Subtr.} - \quad - & & \\
\hline
\text{Posit. III.} & \text{Residuum} \quad +dc & \dfrac{dc}{a+b} & \\
\text{Div. } a+b & & &
\end{array}
$$

CASUS III.

Exemplum, quod est primum casûs II. multiplicationis.

$$
\begin{array}{llcl}
 & \text{Dividendus} & & \\
\text{Positio I.} & 15aa - 7ab - 4bb & \text{quot. pa.} & \\
\text{Div. } 5a - 4b & 15aa - 12ab & 3a & \text{quotus} \\
 & - \quad + & & \text{totalis} \\
\text{Positio II.} & \text{Resid.} \quad 5ab - 4bb & \text{quot. pa.} & 3a + b \\
\text{Div. } 5a - 4b & \quad 5ab - 4bb & + b & \\
 & \quad - \quad + & & \\
\hline
 & \quad 0 \quad 0 & &
\end{array}
$$

CASUS IV.

Exemplum I. quod est primum cas. III. multiplicationis.

$$
\begin{array}{llcl}
 & \text{Dividendus} & & \\
\text{Positio I.} & a^6 - b^4 & \text{quot. part.} & \\
\text{Div. } a^3 - b^2 & a^6 - a^3 b^2 & a^3 & \text{quot. tot.} \\
 & - \quad + & & \\
\text{Positio II.} & \text{Resi. } a^3 b^2 - b^4 & \text{quot. part.} & a^3 + b^2 \\
\text{Div. } a^3 - b^2 & \quad a^3 b^2 - b^4 & + b^2 & \\
 & \quad - \quad + & & \\
\hline
 & \quad 0 \quad 0 & &
\end{array}
$$

Exemplum II. quod est secundum casûs III. multiplic.

$$
\begin{array}{llc}
 & \text{Dividendus} & \\
 & a^{2n} + a^{n+x} - a^n b^m & \text{quotus totalis.} \\
\text{Div. } a^n & a^{2n} + a^{n+x} - a^n b^m & a^n + a^x - b^m \\
 & - \quad - \quad + & \\
\hline
 & 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

SCHOLION.

100. *Examen divisionis fit ope multiplicationis algebraicæ, & vicissim examen multiplicationis fit per divisionem algebraicam. Tyrones sequentia corollaria ex praxi divisionis orta, perspecta habeant, ut ea, quæ inferius de resolutione problematum tractabuntur facilius intelligant.*

CO-

COROLLARIUM I.

101. Quemadmodum in multiplicatione (§. 89. caſ. II. reg. II.) ſi unus factorum careat coëfficiente, alter verò factorum affectus ſit aliquo coëfficiente, in facto invariatus præfigitur coëfficiens alterius factoris, ita in diviſione, ſi *dividendus* habeat coëfficientem, non item *diviſor*, in quoto manet invariatus coëfficiens. *Ex. gr.* Sit dividendus $3abd$, & diviſor db, erit quotus, $3a$; Ratio clara eſt, quia db eſt idem quod $1db$ (§. 48.) ſed unitas non dividit (§. 77. Arith.) ergo. Quodſi verò *diviſor* habeat coëfficientem, non item *dividendus*, pro quoto ſcribenda erit illa litera, quæ in diviſore non comparet, & ſubſcripto coëfficiente diviſoris per Hypotheſ. (§. 30.) exprimenda. *Ex. gr.* Sit dividendus, abd; diviſor $3bd$, erit quotus $\frac{a}{3}$ ut patet ex caſ. I. §. 98.

COROLLARIUM II.

102. Ex caſ. I. §. 98. colligitur, quod in complexo algebraico per hypotheſ. (§. 30.) expreſſo, *Ex. gr.* $\frac{ab + ac}{a}$, aut $(ab + ac) : a$, deleri ſimpliciter poſſint literæ homogeneæ, tam in diviſore, quam dividendo, atque adeo loco hujusmodi expreſſionum, ſcribi poteſt, $b + c$, item loco hujus $\frac{xb + ax}{x}$, ſcribi poteſt. $b + a$. item $\frac{xb + b}{b}$, dat quotum $x + 1$. aut $\frac{ac}{bc}$ quotum $\frac{a}{b}$ dat (§. 36.)

COROLLARIUM III.

103. Quoniam *Ex. gr.* $ax - bx$, eſt factum ex quantitate $(a - b) . x$, ſi occurrat formula $\frac{ax - bx}{a - b}$, deletis ex formula utrobique, $a - b$,

erit quotus x, (non $x-x$) ut patet ex regula divisionis; item $\frac{ax+bx}{a+b}$ dat quotum x, (non $x+x$, seu $2x$); hinc in occurrente hujusmodi formula considerandum, an litera in dividendo sæpius repetita non compareat in divisore, hæc enim sola erit quotus, si cæteræ dividendi literæ in divisore compareant; sic, $\frac{ax+bx-cx}{a+b-c}$, valet tantum x.

COROLLARIUM IV.

104. Cum, quod ponit multiplicatio, tollit divisio (§. 121. Arith.) si in formula per divisionem expressa, *Ex. gr.* $\frac{x}{a+b}$, dividendus x multiplicari deberet per $a+b$, seu per divisorem suum, tali casu simpliciter delendus est divisor, manente solo dividendo; nam $\frac{x}{a+b}$ & idem x multiplicatum per $a+b$, dat factum $(ax+bx):a+b$, seu $\frac{ax+bx}{a+b}$, sed (per Corol. §. 103.) $\frac{ax+bx}{a+b}$, est $=x$. ergo.

COROLLARIUM V.

105. Divisio actualis per datas regulas fieri non potest, quoties litera, vel literæ divisoris non reperiuntur in membris dividendi. *Ex. gr.* Sit dividendus; $(ac+bc+cm)$ per divisorem, $(d+n)$; tali casu tantum exprimenda est divisio per hypothes. (§. 30.) videlicet. $\frac{ac+bc+cm}{d+n}$, cum $(d+n)$ non sit factor.

SCHOLION.

106. *Hæc de quatuor algorithmis adduxisse in compendio sufficiat Tyronibus, quorum plenior doctrina viva docentis voce dabitur; monitos iterum iterumque*

umque volo Tyrones, in his quatuor algorithmis præcipue versati sint, seque exerceant sedulo, nam ulterius progressi sine facilitate tractandi hos algorithmos sæpe sæpius ad hos redire cogentur, non secus atque in arithmetica numerica, nemo ullus divisionem instituit, sine notitia additionis, subtractionis, & multiplicationis propterea, quod hæ operationes divisionis algorithmum ingrediantur.

CAPUT VI.

De natura, & proprietatibus fractionum in genere.

DEFINITIO XVIII.

107. *Fractio* est quantitas unitate minor, id est, pars, vel partes alicujus totius, quod totum per modum *unius* consideratur. *Ex. gr. 2. crucif. qui sunt partes duæ totius grossi per modum unius considerati.*

HYPOTHESIS XII.

108. *Fractio exprimitur, vel designatur per expressionem hypotheticam divisionis* (§. 30.) *declaratam.* Ex. gr. Algebraicè, $\frac{a}{b}$ vel $a:b$. Numericè, $\frac{3}{4}$ vel $3:4$.

SCHOLION.

109. *Expressio prior fractionis per lineam interjectam usitatissima est.* Ex. gr. $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$ *etsi duo puncta interposita æque fractionem indicent.*

D E-

DEFINITIO XIX.

110. Literæ, vel numeri supra lineam scripti, vocantur *Numeratores*, infra lineolam positi, *Denominatores* appellantur, sic *in his* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{3}{4}$, Numeratores *sunt a, vel numerus* 3, Denominatores *verò* b, *vel* 4.

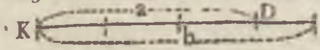
SCHOLION.

111. *Ratio, cur notæ infra lineolam scriptæ vocentur* denominatores, *supra lineolam positi* numeratores, *hæc est: quod nota inferior repræsentans totum per modum unius, denotet, aut exprimat, seu* denominet, *in quot partes illud unum totum sit sectum, seu divisum. Superior verò seu* numerator, *numerat, quot hujusmodi partes (quales denominator exprimit) ex* illo uno *sint accipiendæ ad hoc, ut valor fractionis cognoscatur.* Sic Ex. gr. *in hac fractione* $\frac{3}{4}$ *numerus* 4 *denominat illud unum esse sectum, seu divisum in quatuor partes, numerator verò* 3, *numerat seu dicit, tres partes ex illis quatuor accipiendas esse, ad constituendum valorem hujus fractionis* $\frac{3}{4}$ *Rem hanc ad oculum in gratiam Tyronum declarare juvat. Sit linea* AB *repræsentans unitatem* Ex. gr.

unam ulnam, sitque secta hæc linea AB *in quatuor partes æquales:* 1, 2, 3, 4. *Sint itaque exprimendæ, seu indicandæ tres partes* AC, *de hac linea, seu de una ulna* AB, *rectè igitur per fractionis expressionem sic indicabitur,* $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, *in qua expressione, clarum est, denominatorem* 4 *indicare totam unitatem seu ulnam* AB *in quatuor partes sectam, numeratorem verò* 3, *numerare tres hujusmodi partes (quæ sunt* AC), *de tota linea* AB *in quatuor partes secta.*

Idem

Idem algebraicè oftenditur in hac linea KM.



In qua tota linea KM *vocetur* Ex. gr. b, *partes* KD, *vocentur* a, *rectè algebraicè exprimetur linearis fractio* : $\frac{a}{b}$.

COROLLARIUM I.

112. Hinc liquet *Primò* : fractionem *veram* eſſe, cujus *numerator* minor eſt ſuo *denominatore*, quia exprimit quantitatem unitate *minorem* (§. 107.). *Secundò* : Fractio vulgo *ſpuria* erit, ſi numerator ſit *æqualis* ſuo denominatori, ut $\frac{b}{b}$ vel $\frac{4}{4}$, quia tali caſu valor fractionis eſt æqualis toti unitati, *ut patet ex linea* AB (§. 111.) Multo magis *ſpuria* vocabitur, ſi numerator *major* ſit ſuo denominatore, ut $\frac{5}{4}$, quia numerator plures partes numerat, quam ſint in *denominatore*, ſeu in unitate. *Ut ex contemplatione lineæ* AB *clarum eſt.*

COROLLARIUM II.

113. Inter duas, vel plures ejusdem unitatis fractiones, id eſt, (quæ habent eundem denominatorem) illas eſſe quoad valorem *majores*, quæ habent *majores numeratores*, *Ex. gr.* $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$ quia numerator 3, ex æqualibus ejusdem unitatis partibus, plures partes numerat, quam numerator 2. *Vide expreſſionem linearum* AB (§. 111.) Et hinc manifeſtum eſt, quod ſi manente eodem denominatore augeantur, vel minuantur numeratores, valores quoque fractionum augeantur, vel minuantur, id eſt, vel majores, vel minores quoad valorem efficiuntur, igitur univerſaliter, valores fractionum homogenearum à ſolis numeratoribus cognoſcuntur.

DE-

DEFINITIO XX.

114. Fractiones dicuntur *homogeneæ*, seu *ejusdem denominationis*, quæ habent eundem denominatorem, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, aut $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, item $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{4}$. *Heterogeneæ* appellantur, quæ sub diversis denominatoribus comparent, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, vel $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$.

DEFINITIO XXI.

115. Fractiones *ejusdem valoris*, seu æquales sunt, quarum numeratores æqualiter continentur in suis denominatoribus; *Ex.gr.* $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ &c. *in quibus, numeratores singuli in suis denominatoribus* bis *continentur*, sic pariter æquales sunt, $\frac{6}{18}$ & $\frac{8}{24}$, quia in utraque numerator ter continetur in suo denominatore, quod per divisionem innotescit.

SCHOLION.

116. *Observent Tyrones, æqualitatem* valoris *fractionum confundendam non esse, cum æqualitate* denominationis; *nam fractiones possunt esse æquales quoad valorem, quin habeant æquales denominatores, ut patet ex (§. 115.), & vicissim, possunt habere æqualem denominationem quin tamen sint æquales, quoad valorem, ut clarum est ex (§. 113)*

THEOREMA VII.

117. *Si ejusdem fractionis tam numerator, quam denominator multiplicetur,*

per

per eandem aliquam quantitatem tertiam, fractio nova ex productis orta, erit æqualis quoad valorem priori fractioni nondum multiplicatæ.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ cujus numerator a, & denominator b, multiplicetur per eandem quantitatem tertiam c, erit fractio nova ex productis orta $\frac{ac}{bc}$ sed $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ per (§. 35. & 102.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{1}{2}$ *cujus tam numerator, quam denominator multiplicetur per* 3, *& erit nova fractio* $\frac{3}{6}$ *sed* $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ *per* (§. 115.) *ergo.*

THEOREMA VIII.

118. *Si tam numerator, quam denominator ejusdem fractionis exacte dividatur per eandem aliquam tertiam quantitatem, fractio nova ex quotis orta quoad valorem erit eadem, quæ fuit ante divisionem.*

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{ac}{bc}$ cujus numerator ac, & denominator bc dividatur per eandem tertiam quantitatem c, erit fractio nova ex quotis orta $\frac{a}{b}$ sed $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ per (§. 117.) ergo. Q. E. D.

In

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{3}{6}$ cujus tam numerator, quam denominator dividatur per 3, erit nova fractio $\frac{1}{2}$ sed $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ per (§. 115. & 117.) ergo.

COROLLARIUM I.

119. Hinc si tam in numeratore, quam denominatore fractionis numericæ reperiantur zeri finales, deletis utrinque zeris numero æqualibus, fractionis valor non variatur *Ex. gr.* Loco $\frac{300}{6000}$ scribi potest $\frac{3}{60}$ item $\frac{20}{40} = \frac{2}{4}$, aut $\frac{600}{1200} = \frac{6}{12}$ &c. ratio patet, quia zeri finales oriuntur ex multiplicatione decadica, vel numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ergo per eosdem divisæ (quod fit delendo zeros) manent eædem.

COROLLARIUM II.

120. Ex hoc Theoremate patet ratio compendii (§. 76. Arith.) adducti, cum omnis divisio expressa per Hypothesim (§. 30.) repræsentet fractionem spuriam, in qua numerator est *dividendus*, denominator vero *divisor*.

COROLLARIUM III.

121. Idem Theorema suppeditat methodum, fractionem numericam in numeris majoribus exhibitam, redducendi ad numeros minores, valore fractionis invariato. Videlicet I. Dividendo exacte tam numeratorem, quam denominatorem per eundem aliquem numerum. *Ex. gr.* Sit fractio $\frac{12}{24}$, cujus numeratorem 12, & denominatorem 24 exactè dividat numerus 6, erit facta divisione per numerum 6, nova fractio

æqua-

$\frac{2}{4}$ æqualis $\frac{12}{24}$ per (§. 118.) Item $\frac{30}{60}=\frac{3}{6}$ per (§. 119.) & dividendo $\frac{3}{6}$ per 3, erit $\frac{1}{2}$, ergo $\frac{30}{60}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. *Secundo*: Eadem hac methodo, fractio ad *minimos*, ut dicitur, *terminos* reducetur in casu, si numerator exacte dividat denominatorem suum; *Ex. gr.* in fractione $\frac{12}{24}$, cum 12 exacte continebatur bis in 24, si tam numerator, quam denominator, per 12 dividatur, erit fractio $\frac{1}{2}$ in terminis *minimis*.

SCHOLION.

122. *Reductio hæc ad terminos minores sua utilitate non caret; nam* Primo: *valor fractionis, si sit in numeris minoribus, facilius innotescit, sic facilius intelligitur, quota pars sit $\frac{1}{2}$ de uno floreno, quam $\frac{36}{72}$ unius floreni, etsi quoad valorem idem sint $\frac{36}{72}$, quod $\frac{1}{2}$.* Secundo: *Reductio hæc compendium subministrat operationum arithmeticarum, cum compendiosior sit modus operandi per parvos, quam magnos numeros.*

PROBLEMA V.

123. PROP. *Ex numero quocunque dato* integro, *efficere fractionem* vulgo *spuriam datæ denominationis, manente valore numeri integri invariato.*

RESOLUTIO.

Datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, erit *productum* numerator, cui, interposita lineola, subscribatur datus denominator. Q. E. F.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit quantitas integra *Ex. gr.* a reducenda ad datum denominatorem b, erit per datam reſolutionem fractio ſpuria $\frac{ab}{b}$; ſed $\frac{ab}{b}=a$, per (§. 35. & 102.) ergo. Q. E. D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit ex numero 4, *facienda fractio ſpuria, quæ habeat denominatorem* 6, *igitur multiplicando* 4 *per* 6, *erit productum* 24 numerator, *cui ſubſcriptus datus* denominator 6, *exhibebit fractionem ſpuriam* $\frac{24}{6}$ *æqualem quoad valorem numero* 4 *integro.*

COROLLARIUM.

124. Hinc liquet methodus reducendi numerum integrum ad datæ fractionis alicujus denominatorem; ſi nempe datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, & producto addatur numerator fractionis datæ, ac ducta lineola ſubſcribatur prior datæ fractionis denominator. *Ex. gr.* Sit numerus 3 reducendus ad denominatorem fractionis $\frac{2}{5}$, erit multiplicando 3 per 5, productum 15, cui addendo numeratorem 2, efficitur ſumma 17, & huic ſubſcribendo denominatorem 5, erit fractio ſpuria $\frac{17}{5}$.

PROBLEMA VI.

125. PROP. *Datam fractionem* vulgo *ſpuriam ad integra reducere.*

RE-

RESOLUTIO.

Dividatur numerator per ſuum denominatorem, quotus erunt integra, vel cum, vel ſine fractione vera remanente. Q. E. F.

Demonſtratio algebraica patet; nam $\frac{ab}{b}=a$ per (§. 35. & 102.) Q. E. D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit data fractio ſpuria $\frac{24}{6}$, *igitur dividendo 24 per 6, erit quotus 4 numerus integer. Item ſit fractio ſpuria* $\frac{17}{5}$, *itaque dividendo 17 per 5, erit quotus 3, cum remanente fractione vera* $\frac{2}{5}$.

PROBLEMA VII.

126. PROP. *Invenire, quid data quæcunque fractio valeat in data quavis certa ſpecie.* Ex. gr. *Si quæratur* $\frac{7}{9}$ *unius flor. Germ. in ſpecie cruciferorum, vel nummorum, quot faciunt cruciferos, vel nummos?*

RESOLUTIO.

Data ſpecies, in qua valor fractionis quæritur, multiplicetur per numeratorem datæ fractionis, factum dividatur per denominatorem ejusdem fractionis, & quotus dabit valorem fractionis quæſitum in data ſpecie. Q. E. F. *Demonſtratio dabitur in parte ultima hujus.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Ex. gr. *Quæratur* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. quot faciunt cruciferos; igitur cum flor. Germ habeat* 60 *xr. multiplicentur* 60 *per numeratorem* 3, *erit factum* 180, *hoc factum dividatur per denominatorem* 9, & *quotus emergens* 20, *erunt cruciferi, seu valor fractionis* $\frac{3}{9}$, *unius flor. Germ. in specie cruciferorum. Item* $\frac{3}{9}$ *unius flor. Germ. in nummis, quid valent? igitur cum* 120 *nummi faciunt flor. Germ. multiplicentur* 120 *per* 3, & *factum* 360, *dividatur per* 9, *erit quotus* 40, *seu nummi, quos valet data fractio* $\frac{3}{9}$.

Item: Quæratur Ex. gr. $\frac{24}{32}$ *unius urnæ Transylvanicæ, quot faciunt mensuras? cum urna Transylv. habeat* 8 *mensur. multiplicentur* 8 *per* 24, & *factum* 192, *dividatur per* 32, *erit quotus* 6, *exhibens mensuras, quas valet data fractio* $\frac{24}{32}$ *unius urnæ Transf.*

SCHOLION I.

127. *Problema hoc utilissimum, & in praxi summe necessarium est, quotiescunque certum quantum in datas partes distribuendum occurrit, quæ distributio, cum ope divisionis indagari debeat, ut* (§. 60. *Arith.*) *dictum, plerumque autem quoto ex divisione orto adhærere soleat fractio, quæ indicat partem, vel partes aliquot unitatis, illius speciei, cujus erat dividendus, necessarium est ad æquam distributionem, ut sciatur, quid data fractio in specie illius unitatis valeat? res exemplo declaratur. Sint distribuendi* 26 *fl. Germ. in* 3 *pauperes, igitur ope divisionis Arithmet. invenietur quotus* $8\frac{2}{3}$ *unius flor. Germ. dandi cuilibet pauperi; sed* $\frac{2}{3}$ *unius flor. Germ. ignorantur, ergo per hoc problema operando, ut habeatur valor* $\frac{2}{3}$ *unius flor. Germ.* Ex. gr. *In nummis, multiplico* 120 *nummos (tot enim habet flor. Germ.) per numeratorem* 2,

&

& factum 240, *divido per denominatorem* 3, *erit quotus* 80 *nummi, igitur ex* 26 *florenis, cuilibet pauperi obveniunt* 8 *flor. &* 80 *nummi.*

SCHOLION II.

128. *Ad hoc Problema rite tractandum necessariæ sunt* Tabulæ Reductionum, in Parte III. Arithm. *adductæ, ut sciatur in data quavis specie, quot unitates speciei major contineat ex specie minore*, vide usum tabularum (§. 140. *Arithm.*)

CAPUT VII.

De quatuor Algorithmis fractionum.

PROBLEMA VIII.

129. PROP. *Duas, vel plures fractiones* heterogeneas (§. 114.) *reducere ad fractiones* homogeneas (§. 114.) *seu ad eundem denominatorem, valore fractionum invariato.*

RESOLUTIO.

CASUS I. *Si duæ fractiones reducendæ sint.* Multiplicetur tam numerator, quam denominator *primæ* fractionis, per denominatorem fractionis *secundæ*, & vicissim tam numerator, quam denominator fractionis *secundæ*, multiplicetur per denominatorem *primæ* fractionis, erunt reductæ ad eundem denominatorem valore fractionum invariato. Q. E. F.

Algebraicè, & Demonstrativè.

Sint reducendæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, erunt

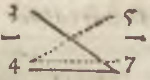
 per

per datam resolutionem reductæ $\frac{a.d}{b.d}$ & $\frac{c.b}{d.b}$, seu $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{db}$, habentes eundem denominatorem bd, sed habent etiam valorem priorem, nam $\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$ per (§.117.) & $\frac{cb}{db}=\frac{c}{d}$ per eundem (§.117.) ergo. Q. E. F.& D.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$, erunt reductæ per datam resolutionem, *prima* fractio $\frac{3.7}{4.7}$, & *secunda* $\frac{5.4}{7.4}$, seu *prima* $\frac{21}{28}$, *secunda* vero $\frac{20}{28}$, & hinc $\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$, & altera $\frac{5}{7}=\frac{20}{28}$ per (§.117.)

SCHOLION.



id est $\frac{21}{28}$ $\frac{20}{28}$

130. *In gratiam Tyronum ad firmandam memoriam, reductionem duarum fractionum sub hoc schemate exhibeo: in quo ductus linearum ostendit ad oculum, quod in prima fractione* $\frac{3}{4}$, *tam numerator* 3, *quam denominator* 4 *multiplicari debeat per denominatorem* 7 *fractionis secundæ; quodque in secunda fractione* $\frac{5}{7}$ *tam numerator* 5, *quam denominator* 7, *multiplicari debeat per denominatorem* 4 *fractionis primæ.*

CASUS II. *Si plures fractiones reducendæ sint.*

I. Numerator fractionis primæ, multiplicetur per denominatorem secundæ, hoc

fa-

factum multiplicetur per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum multiplicetur per denominatorem quartæ, & ſic porro; erit productum ultimum numerator fractionis primæ.

II. Numerator fractionis ſecundæ multiplicetur per denominatorem primæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, (nam per proprium denominatorem multiplicari non debet) productum hoc per denominatorem quartæ, &c.

III. Eodem modo reliquarum numeratores multiplicandi ſunt per omnes denominatores *aliarum* fractionum, (NB. *aliarum*) remanente videlicet proprio denominatore.

IV. Ut communis omnium denominator obtineatur, multiplicetur denominator fractionis primæ, per denominatorem ſecundæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum per denominatorem quartæ, & ita porro; erit productum omnium denominatorum, communis denominator omnium fractionum reductarum: hæ quatuor regulæ in ſequente quinta regula univerſaliter continentur.

Regula univerſalis: Numerator fractionis reducendæ multiplicetur per denominatores *aliarum* fractionum, communis autem denominator, erit factum omnium denominatorum in ſe invicem ductorum. Q. E. F.

Algebraicè, & Demonstrativè.

Sint fractiones reducendæ.

Prima; $\frac{a}{b}$, *secunda* $\frac{c}{d}$, *tertia* $\frac{f}{g}$, *quarta* $\frac{m}{n}$

Erunt reductæ per datam Resolutionem

Prima: $\frac{adgn}{bdgn}$, *secunda* $\frac{bcgn}{bdgn}$, *tertia* $\frac{bdfn}{bdgn}$, *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn}$.

Sed per (§. 117.) *Prima* $\frac{adgn}{bdgn} = \frac{a}{b}$ *secunda* $\frac{bcgn}{bdgn} = \frac{c}{d}$

tertia $\frac{bdfn}{bdgn} = \frac{f}{g}$ *quarta* $\frac{bdgm}{bdgn} = \frac{m}{n}$ *ergo*.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sint reducendæ; $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$,

Erit numerator primæ; 2 . 5 . 7, *seu* 10 . 7 = 70.
secundæ; 4 . 3 . 7, *seu* 12 . 7 = 84.
tertiæ; 6 . 5 . 3. *seu* 30 . 3 = 90.

Cōmunis denominator; 3 . 5 . 7. *seu* 15 . 7 = 105

Igitur reductæ erunt

Prima; $\frac{70}{105}$, *secunda* $\frac{84}{105}$, *tertia* $\frac{90}{105}$.

SCHOLION I.

131. *Vulgo, & usitatissimè plures fractiones ad eundem denominatorem reductæ, semel tantum subscribendo denominatorem communem exprimi solent, sic adductum prius exemplum algebraicum, ita exprimitur* $\frac{adgn,\ bcgn,\ bdfn,\ bdgm}{bdgn}$ *datum item exemplum numericum sic scribitur vulgo* $\frac{70,\ 84,\ 90.}{105}$ *quæ expressio, priore compendiosior, idem prorsus significat.*

SCHO-

SCHOLION II.

132. *Quandoque in Reductione ad eundem denominatorem datur locus compendio. Videlicet I. per (§. 117.) si unius fractionis denominator major, alterius fractionis denominatorem minorem exactè aliquoties contineat, tali casu, si minor denominator, simulque & illius numerator, multiplicetur per eum numerum, quoties minor in majore continetur, manente illæsa altera fractione, habebuntur fractiones reductæ;* Ex. gr. *Sit Prima* $\frac{4}{10}$, *secunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* secundæ 5, *in denominatore* primæ 10 *bis continetur, multiplicetur fractionis* secundæ $\frac{3}{5}$ *tam numerator* 3, *quam* denominator 5 *per* 2, *erit fractio* secunda $\frac{6}{10}$, *sub eodem denominatore, sub quo est* prima $\frac{4}{10}$

II. Locus est compendio per (§. 118.) quando per eum numerum, per quem denominator minor in majore continetur, dividi potest exactè tam numerator, quam denominator fractionis habentis majorem denominatorem; manente illæsa altera fractione. Ex. gr. *Sit prima* $\frac{4}{10}$, *secunda* $\frac{3}{5}$, *quoniam denominator* secundæ 5, *bis continetur in denominatore* 10, *numerus vero* 2 *exactè dividat tam numeratorem fractionis* primæ 4, *quam ejus denominatorem* 10, *igitur dividendo per* 2, *erit fractio prima* $\frac{2}{5}$, *sub eodem denominatore, sub quo est secunda* $\frac{3}{5}$; *Quoniam vero horum compendiorum rarior usus occurrit, hinc Tyrones problema reductionum, utpote universale, frequenti exercitio familiare sibi reddant oportet, cum fractiones heterogeneæ nec* addi, *nec* subtrahi *possint, nisi prius ope problematis antecedentis homogeneæ efficiantur.*

COROLLARIUM.

133. Quod si inter duas, vel plures fractiones heterogeneas quæratur, quænam illarum sit quoad valorem major, vel minor, ope hujus

problematis reductionum, quæstio resolvetur; nam si datæ fractiones reducantur ad eundem denominatorem, illa erit quoad valorem major, cujus numerator major erit. Ex. gr. Si quæratur inter datas fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{6}{7}$, quænam illarum sit majoris valoris, erunt reductæ per (§. 129.) Prima $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$, secunda $\frac{6}{7} = \frac{24}{28}$, & hinc $\frac{6}{7} > \frac{3}{4}$, quia $\frac{24}{28} > \frac{21}{28}$ per (§. 113.)

DEFINITIO XXII.

134. *Addere fractiones*, est colligere valores partiales datarum omnium fractionum homogenearum in unam fractionem homogeneam, tanquam in unum totum, continens valorem omnium.

PROBLEMA IX.

135. PROP. *Fractiones quasvis datas addere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones addendæ sint homogeneæ, id est, ejusdem denominationis*, addantur tantum numeratores. Summæ omnium numeratorum subscribatur denominator communis. *Vide exempl. I. & II.* Q. E. F.

II. Si *fractiones sint heterogeneæ*, reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reductæ addantur per Reg. I. hujus. *Vide exempl. III. & IV.* Q. E. F.

DEMONSTRATIO.

Valores partiales fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§. 113.) ergo fractio ejusdem denominationis, habens pro numeratore summam omnium numeratorum fractionum homogenearum, continet valores partiales omnium; jam verò *per Resolutionem hujus*, numerator fractionis ejusdem denominationis continet omnes numeratores datarum fractionum homogenearum, ergo continet valores partiales omnium, ergo *per datam resolutionem* habetur fractio homogenea tanquam totum, continens valorem omnium (§. 25. Arith.) ergo facta habetur additio fractionum. (§. 134.) Q. E. D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *erit summa* $\frac{a+c}{b}$

EXEMPLUM II. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{3}{8}$ *&* $\frac{2}{8}$, *erit summa* $\frac{5}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sint addendæ $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ* $\frac{ad}{bd}$ *&* $\frac{cb}{bd}$ (§. 129.) *& hinc additæ*, $\frac{ad+cb}{bd}$, *vel sine reductione simpliciter* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

EXEMPLUM IV. IN NUMERIS.

Sint addendæ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; *erunt reductæ per* (§. 129.) $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, *& hinc summa* $\frac{244}{105}$, *quæ per* (§. 125.) *dat integra* $2+\frac{34}{105}$.

SCHO-

SCHOLION.

136. *Quoniam ex additione fractionum plerumque emergit fractio vulgo spuria, hæc ad integra reducitur per* (§. 125.) *quemadmodum in exemplo IV. factum est. Examen verò additionis, fit per subtractionem.*

DEFINITIO XXIII.

137. *Subtrahere fractiones*, est invenire fractionem, quæ contineat differentiam valoris duarum fractionum homogenearum valore inæqualium.

PROBLEMA X.

138. PROP. *Fractionem valore minorem à fractione majoris valoris subtrahere.*

RESOLUTIO.

I. *Si fractiones sint homogeneæ;* numerator minor subtrahatur à numeratore majore, & residuo subscribatur denominator communis. *Vide exempl. I. & II.* Q. E. F.

II. *Si fractiones sint heterogeneæ;* reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reductæ subtrahantur per Reg. I. hujus. *Vide exempl. III. & IV.* Q. E. F.

DEMONSTRATIO.

Valores fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§. 113.) ergo fractio homogenea, habens pro numeratore differentiam, seu residuum duorum

rum numeratorum, continet differentiam valoris duarum fractionum homogenearum; sed *per datam Resolutionem*, fractio homogenea exhibens residuum, continet differentiam numeratorum, ergo continet differentiam valoris earundem fractionum, ergo facta habetur subtractio fractionum (§. 137.) Q. E. D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *subtrahenda fractio* $\frac{c}{b}$ *erit differentia* $\frac{a-c}{b}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{5}{8}$, *subtrahenda fractio* $\frac{3}{8}$ *erit differentia* $\frac{2}{8}$.

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, *subtrahenda* $\frac{c}{d}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, & *hinc differentia* $\frac{ad-bc}{bd}$, *vel etiam sine reductione* $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.

EXEMPLUM IV. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{6}{7}$, *subtrahenda* $\frac{2}{3}$, *erunt reductæ per* (§.129.) $\frac{18}{21}$ & $\frac{14}{21}$, & *hinc differentia, seu residuum* $\frac{4}{21}$

SCHOLION.

139. *Examen subtractionis fit, si numerator residuæ fractionis, addatur ad numeratorem fractionis subtrahendæ, prodire debet numerator fractionis, à qua subtractio facta est; sic si numerator differentiæ* $\frac{2}{8}$, *addatur ad numeratorem* $\frac{3}{8}$, *erit fractio* $\frac{5}{8}$ *ipsissima*,

ma, à qua subtractio facta est. Contra examen additionis fractionum fit per subtractionem, sic in dato Exemplo II. additionis fractionum (§.135.) si à summa $\frac{5}{8}$, *subtrahatur* $\frac{3}{8}$, *prodire debet* $\frac{2}{8}$ *& vicissim.*

PROBLEMA XI.

140. PROP. *Fractiones per fractiones multiplicare.*

RESOLUTIO.

I. Multiplicentur numeratores inter se, & factum numeratorum erit numerator novæ fractionis *Producti.*

II. Multiplicentur quoque denominatores inter se, & factum denominatorum erit denominator novæ fractionis *Producti. Vide exempl. I. & II.* Q. E. F.

SCHOLION.

141. *Demonstratio dabitur sequenti problemate, alia verò magis ordinata dabitur ad calcem* Partis ultimæ hujus.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint datæ fractiones $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *erit productum* $\frac{ac}{bd}$.

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint multiplicandæ inter se $\frac{4}{5}$ *&* $\frac{6}{7}$, *erit productum* $\frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7}$ *seu* $\frac{24}{35}$.

SCHOLION.

142. *Illud à Tyronibus observatu dignum, quod fractio nova, producta ex multiplicatione fractionum,* (ut videre est in exemplo II.) *quoad valorem longe minor sit, quam valores singularum fractionum, ex quibus per multiplicationem fractio nova orta est, cum tamen in multiplicatione integrorum factum longe majus*

majus producatur, quam ipsi factores sint. Ratio itaque hæc est; Quod si quantitas aliqua per 1 multiscetur, ipsa quantitas invariata semel ponitur, ut clarum est; igitur si quantitas multiplicanda sit per aliquid minus unitate, id est per fractionem, minus necessario poni debet, quam sit ipse multiplicandus, igitur pars tantum multiplicandi poni debet pro facto, & hinc productum minus evadit, quam factores singillatim accepti.

PROBLEMA XII.

143. PROP. *Fractionem per fractionem dividere.*

RESOLUTIO.

I. Fractionis *dividendæ* numerator multiplicetur, per denominatorem fractionis *divisoris*, erit factum numerator fractionis novæ.

II. Fractionis *dividendæ* denominator multiplicetur per numeratorem fractionis *divisoris*, erit factum denominator fractionis novæ exhibentis *quotum*. *Vide exemp. I. & II.* Q. E. F.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sit divisor $\frac{a}{b}$, *dividenda* $\frac{c}{d}$, *erit quotus* $\frac{bc}{ad}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit divisor $\frac{4}{5}$, *dividenda fractio sit* $\frac{24}{35}$, *erit quotus* $\frac{24 . 5}{35 . 4}$ *seu* $\frac{120}{140}$, *id est* $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ *per* (§. 121.)

DEMONSTRATIO.

Quotus multiplicatus per divisorem æqua-

æquatur dividendo per (§. 61. Arith.) igitur quotus $\frac{bc}{ad} \times \frac{a}{b}$ debet æquari dividendo $\frac{c}{d}$, ſed $\frac{bc}{ad} \times \frac{a}{b} = \frac{bac}{bad}$ per (§. 140.) & $\frac{bac}{bad} = \frac{c}{d}$ per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D.

Demonſtratur quoque reſolutio prioris Problem. XI. de multiplicatione fractionum. Si factum, ſive productum dividatur per unum factorem, pro quoto prodire debet alter factorum, per (§. 57. Arith.) igitur (*in exempl. I. problem. XI.*) productum $\frac{ac}{bd}$, ſi dividatur per unum ex ſuis factoribus $\frac{c}{d}$ prodire debet alter $\frac{a}{b}$, ſed $\frac{ac}{bd} : \frac{c}{d} = \frac{adc}{bdc}$ per (§. 143.), & $\frac{adc}{bdc} = \frac{a}{b}$, per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D.

SCHOLION I.

144. *Demonſtrationes hæ binæ, ſi in exemplis numericis adductis exhibeantur, veritatem ad oculum declarant, ſimulque examen ſeu probam multiplicationis per diviſionem, & diviſionis per multiplicationem edocent.*

SCHOLION II.

diviſ. *divid.*

$$\frac{a}{b} \quad \times \quad \frac{c}{d}$$

Quotus $\frac{bc}{ad}$

145. *In gratiam Tyronum reſolutionem problematis hujus de diviſione fractionum, ſub hoc ſchemate exhibeo: ubi ductus linearum, datas ſupra regulas manifeſte exhibent, nempe: quod* c *numerator dividendi multiplicari debeat per* b *denominatorem diviſoris, & denominator* d, *quod multiplicari debeat per* a *numeratorem* divi-

divisoris, ut prodeat quotus $\frac{bc}{ad}$. Aliter: *Invertatur divisor, id est, loco numeratoris scribatur denominator proprius, & loco denominatoris scribatur numerator, deinde fiat multiplicatio numeratorum inter se, itemque denominatorum inter se, ut* (§.140.) *dictum, erit nova fractio quotus*, Ex. gr. *sit dividendus* $\frac{c}{d}$, *divisor* $\frac{a}{b}$, *erit divisor inversus* $\frac{b}{a}$, *& hinc* $\frac{b \times c}{a \times d} = \frac{bc}{ad}$ *Quæ praxes in idem problema recidunt.*

SCHOLION III.

146. *Quotus, ex divisione fractionum ortus, major quoad valorem emergit ipso dividendo, imò sæpe ad fractionem vulgo spuriam assurgit, contra, ac in divisione integrorum fieri debere docuimus. Cujus ratio est, quod, quo minor sit divisor* (etiam in integris) *eo major emergat quotus, manente eodem dividendo; sic si* Ex. gr. 18 *dividatur per* 2, *quotus erit* 9, *è contra si dividatur per* 6 *quotus erit* $3 < 9$. *Igitur cum divisor in fractionibus, sit minor unitate, quotus prodire debet major, quam sit dividendus.*

SCHOLION IV.

147. *Quoniam in praxi arithmetica fractiones cum numeris integris frequenter tractandæ occurrant; plerique Arithmeticorum novas regulas integrorum cum fractis fuse proponere solent; nos labori Tyronum parcentes, simulque studentes compendio doctrinæ, artem numeros integros cum fractis tractandi non aliam proponimus, atque eam, quam de fractionibus hucusque exposuimus; hinc unico problemate universali algorithmos omnes numerorum fractorum cum integris complectemur, sit igitur.*

PROBLEMA XIII. ET UNIVERSALE.

148. PROP. *Algorithmos omnes fractorum cum integris tractare, id est,* Addere, Subtrahere, Multiplicare, & Dividere *integra cum fractis.*

RESOLUTIO.

I. Quantitas integra exprimatur per modum fractionis vulgo ſpuriæ, quod fit ſubſcribendo unitatem loco denominatoris.

II. Sub hac ficta imagine fractionis tractetur tanquam fractio vera ſecundum omnia problemata fractionum hucusque tradita. *Vide exempla ſubjecta.* Q. E. F.

DEMONSTRATIO

Regula I. oſtenditur. Data expreſſio fractionis, eſt expreſſio diviſionis (§.108.) dividendus autem diviſus per unitatem manet invariatus (§. 77. Arith) ergo expreſſio hæc quantitatis integræ per fractionem vulgo ſpuriam non immutat valorem integri. *Quoad erat primum.*

Regula II. Fractio vulgo ſpuria habet imaginem fractionis, ergo tractari poteſt, per modum fractionis, ut *conſtat ex tota doctrina fractionum.*

EXEMP. ADDITIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a *addenda in unam fractionem cum* $\frac{c}{b}$, *erit per datam Reſolut.* $\frac{a}{1}$ *addenda ad* $\frac{c}{b}$, *&* *hinc addendæ per* (§. 135.) *igitur reductæ erunt per* (§.129.) $\frac{ab}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *quarum ſuma eſt* $\frac{ab+c}{b}$ *per* (§.135.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 *addendus cum* $\frac{2}{3}$, *in unam fractionem, erit numerus* 4 *ſub ficta imagine fractionis* $\frac{4}{1}$ *igitur*

igitur addendæ sunt $\frac{4}{1}$ *ad* $\frac{2}{3}$ *per* (§. 135.) *quare reductæ erunt* $\frac{12}{3}$, *&* $\frac{2}{3}$ *per* (§. 129.) *& additæ in unam fractionem* $\frac{14}{3}$ *per* (§. 135.)

EXEMP. SUBTRACTIONIS ALGEBR.

Sit ex quantitate a subtrahenda fractio $\frac{c}{b}$, *ergo ex* $\frac{a}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{c}{b}$ *per* (§. 138.), *igitur reductæ erunt* $\frac{ab}{b}$ *&* $\frac{c}{b}$, *& hinc differentia* $\frac{ab-c}{b}$ *per* (§. 138.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit à numero 4 subtrahenda fractio $\frac{2}{3}$; *ergo ab* $\frac{4}{1}$ *subtrahi debet* $\frac{2}{3}$ *per* (§. 138.) *igitur reductæ erunt* $\frac{12}{3}$ *&* $\frac{2}{3}$, *& hinc differentia* $\frac{10}{3}$ *per* (§. 138.)

EXEMPLUM MULTIPLICAT. ALGEBR.

Sit quantitas a multiplicanda per $\frac{c}{b}$, *ergo* $\frac{a}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{c}{b}$ *juxta* (§. 140.) *erit igitur productum* $\frac{ac}{b}$ *per eundem* (§. 140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 multiplicandus per $\frac{2}{3}$, *ergo* $\frac{4}{1}$ *multiplicari debet per* $\frac{2}{3}$ *juxta* (§. 140.) *erit igitur productum* $\frac{8}{3}$ *per eundem* (§. 140.)

EXEMPLUM DIVISIONIS ALGEBRAICÆ.

Sit quantitas a dividenda per divisorem $\frac{c}{b}$, *erit dividendus* $\frac{a}{1}$, *& divisor* $\frac{c}{b}$ *igitur per* (§. 143.) *quotus* $\frac{ab}{c}$

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 dividendus per divisorem $\frac{2}{3}$, erit dividendus $\frac{4}{1}$ & divisor $\frac{2}{3}$ igitur per (§. 143.) quotus $\frac{12}{2}$

COROLLARIUM.

149. Eadem methodo procedendum est, si numerus complexus ex fracto & integro tractari debeat cum alio numero complexo itidem ex fracto & integro, aut numerus complexus ex fracto & integro, cum fracto tantum; nam subscribendo integris unitatem, tractentur ut fractiones. Idem est in literalibus.

SCHOLION.

150. *In adductis hucusque Theorematibus, ac problematibus fundamentalibus tota fractionum vulgarium, & simplicium doctrina continetur; ac cæteris fractionibus potentiarum, ut sunt fractiones quadraticæ, cubicæ, &c. agetur in* Parte II. hujus; *de earundem progressionibus, & cæteris affectionibus in* Parte IV. *tractabitur. Ne verò aliquid a nobis desideretur præstitum fuisse, quod ab aliis quoque pertractatur, bina problemata, non quia necessaria, sed quod sua utilitate in certis circumstantiis non careant, adferemus.*

DEFINITIO XXIV.

151. *Communis mensura*, simpliciter, dicitur quantitas, major unitate, quæ alias binas, vel plures quantitates exacte metitur, quod per divisionem exactam innotescit; sic communis mensura respectu numerorum 8, & 12, est numerus 2, item numerus 4, quia per hos tam 8, quam 12 exactè dividitur; Hæc communis mensura vocatur etiam *Pars aliquota communis.*

DE-

DEFINITIO XXV.

152. Communis mensura (cum addito) *maxima*, dicitur quantitas, quæ, metiendo plures quantitates inæquales, est mensura maxima respectu quantitatis inter datas minimæ, prout cum aliis conjunctæ. Ita numerorum 8 & 12 communis mensura maxima est numerus 4, quia 4 respectu numeri 8 prout conjuncti cum numero 12, est divisor *maximus*, qui numerum 8 & 12 simul exactè dividit.

COROLLARIUM.

153. Cum duorum, vel plurium numerorum communis mensura maxima, sit divisor, qui respectu numeri inter datos minimi, est maximus, sequitur, quod si numerus inter datos minimus sit divisor respectu reliquorum, erit ipse numerus inter datos minimus communis mensura omnium maxima quæ in dato casu haberi potest. *Ex. gr.* Sint numeri 8 & 16, cum 8 sit mensura communis, & respectu sui, & respectu numeri 16 cumque respectu sui sit maxima, erit etiam respectu numeri 16 prout conjuncti cum 8, mensura maxima, ita, ut ea major in dato casu haberi non possit cum divisor respectu dividendi major esse nequit, quam sit ipse dividendus, per (§. 62. Arith.) ergo eidem æqualis, omnium maximus est.

PROBLEMA XIV.

154. PROP. *Invenire communem mensuram maximam, seu divisorem communem maximum, per quem exactè dividendo tam numeratorem, quam denominatorem fractionis*

nis datæ, fractio reducitur ad terminos minimos possibiles.

RESOLUTIO.

I. *Denominator* dividatur per *Numeratorem*, quod si ex hac divisione nihil remaneat, erit ipse *numerator*, communis mensura maxima, per quam divisus tam numerator, quam denominator datæ fractionis, producit novam fractionem in terminis minimis. *Vide exempl. I.*

II. Si ex prima divisione denominatoris per numeratorem suum, relinquatur Residuum aliquod, sic procedendum erit; *Numerator* (qui fuit divisor) fiat *dividendus*, & Residuum fiat *divisor*, qui, si exacte dividat numeratorem sine residuo, erit hic communis mensura maxima. *Vide exempl. II.*

III. Quod si ex secunda divisione numeratoris per residuum, iterum emergat residuum, tum ex secundo *divisore* (qui fuit primum residuum) fiat iterum *dividendus*, & secundum residuum fiat *divisor*; atque hac alternativa methodo tamdiu procedendum est, donec inveniatur aliquis divisor major unitate, qui suum dividendum exacte sine aliquo residuo dividat, erit hic ultimus divisor communis mensura maxima respectu datæ fractionis, ut supra dictum.

IV.

IV. Quod ſi hac methodo procedendo ſemper aliquod reſiduum emergat, donec tandem ad diviſorem perveniatur, qui ſit *unitas*, cum unitas non dividat per (§.77. Arith.) ſignum eſt, datam fractionem ad minores terminos irreducibilem eſſe. *Vide exemplum III.*

EXEMPLUM I.

Sit fractio reducenda $\frac{36}{144}$ *erit*

Dividend.	144	*quotus.*
Diviſor	36	4
fact. ſubt.	144	
Reſiduum	000	

Igitur dividendo tam numeratorem 36, quam denominatorem 144 per 36, erit fractio $\frac{1}{4}$ *in terminis minimis valore* $= \frac{36}{144}$

EXEMPLUM II.

Sit reducenda fractio $\frac{108}{144}$ *erit*

Dividend.	144	*quot.*
Diviſor	108	1
Reſiduum	36	

Secundo.

Dividend.	108	*quot.*
Diviſor	36	3
	108	
Reſid.	000	

Igitur diviſor maximus tam reſpectu numeratoris 108, quam denominatoris 144 eſt 36, qui producit fractionē in terminis minimis $\frac{3}{4}$ *æqualem datæ* $\frac{108}{144}$

EXEMPLUM III.

Sit reducenda $\frac{88}{105}$ *erit*

			ſecundo			*tertio*			*quarto*		
Divid.	105	1	*divid.*	88	5	*divid.*	17	5	*divid.*	3	1
Diviſ.	88		*diviſ.*	17		*diviſ.*	3		*diviſ.*	2	
Reſid.	17		*fa. ſub.*	85		*fa. ſub.*	15		*Reſid.*	1	
			Reſid.	3		*Reſid.*	2				

Cum ultimus diviſor ſit unitas, fractio $\frac{88}{105}$ *eſt irreducibilis.*

Algebraicè.

In fractione algebraica cum omnes factores pateant, Ex. gr. $\frac{abcd}{acdf}$ *deletis per* (§. 35. & 36.) *utrinque terminis homogeneis* acd; *erit in terminis minimis prior fractio* $\frac{b}{f}$

DEMONSTRATIO.

Regula I. patet ex (§. 121.). Regula II. demonſtratur per gradationem retrogradam; nam diviſor ſecundus 36, ſeipſum ſeu 36 exacte dividit, ſed idem etiam exacte dividit diviſorem primum 108, ergo 36 exacte dividit quantitatem 36 + 108, ſed 36 + 108 = 144 per (§. 43. Arith.) ergo 36 eſt communis menſura, & quidem maxima reſpectu numerorum 108. & 144. Q. E. D. Eodem modo Reg. III. demonſtratur. Reg. IV. demonſtratione non eget, cum unitas, ad quam devenitur, non dividat, per (§. 77. Arith.).

SCHOLION.

155. *In hujusmodi divisione, quotorum nulla habetur ratio. Caeterum molesta haec initio Tyronibus praxis, suppleri potest per methodum aliam tentativam; videlicet: si tam numerator, quam denominator finales numeros habeant pares*, Ex. gr. 2, 4, 6, 8. *Divisio utriusque exacta tentanda per numeros pares. Si verò finalis unius sit par, alterius impar, tentanda erit divisio exacta per imparem, eodem modo si uterque sit impar.*

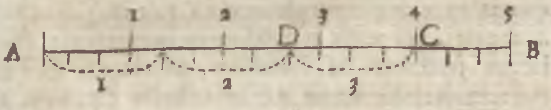
DE-

DEFINITIO XXVI.

156. *Fractio fractionis*, vocatur fractio, quæ est pars, vel partes, alterius alicujus fractionis, seu est pars, vel partes, alicujus partis per modum unius consideratæ. *Ex.gr.* $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

SCHOLION.

157. *Claritatis gratia; sit linea* AB *primum divisa in 5 partes*



Sitque fractio de tota linea $\frac{4}{5}$, *quæ est Pars* AC. *Porro intelligatur quælibet pars quinta de* AB *subdivisa in tres particulas, vide figuram. Sit jam de hac ipsa parte* AC *indicanda pars* AD, *erit hæc* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{4}{5}$ *id est fractio* $\frac{2}{3}$ *est fractio fractionis* $\frac{4}{5}$

PROBLEMA XV.

158. PROP. *Fractionem fractionis ad fractionem simplicem reducere.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur, per (§.140.) numerator per numeratorem, & denominator per denominatorem illius fractionis, cujus hæc est fractio. Q. E. F.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ *de fractione* $\frac{c}{d}$ *erit ad ſimplicem reducta* $\frac{ac}{bd}$ *per* (§. 140.)

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit fractio $\frac{2}{3}$ *de fractione* $\frac{4}{5}$ *erit reducta ad ſimplicem* $\frac{8}{15}$. *Reſolutio hæc jam demonſtrata eſt* (§. 143.)

COROLLARIUM.

159. Liquet itaque *primo*: toties fieri fractionem fractionis, quoties fractiones quæcunque inter ſe multiplicantur per (§. 140.) *Secundo*: patet, per hanc reductionem innoteſcere valorem fractionis de fractione, ut clarum fit ex contemplatione lineæ AB in Scholio (§. 157.) adductæ. Nam AD, de AC, ſeu $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ faciunt revera de tota linea AB $\frac{8}{15}$. *Tertio* colligitur, ſi fractio fractionis addenda, ſubtrahendave ſit ab aliis fractionibus, per hoc problema prius ad ſimplicem eſſe reducendam.

SCHOLION.

160. *De aliis fractionum proprietatibus agetur ſuis locis.*

FINIS PARTIS I.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

CAPUT I.

De quantitatum Potentiis, & Radicibus in genere.

DEFINITIO I.

161. PRoductum, seu *factum*, quod oritur, si quantitas quævis per seipsam semel, vel sæpius multiplicetur, vocatur *Potentia*, *Potestas*, vel *Dignitas*. *Ex.gr.* Si *a* per *a* multiplicetur, erit factum *aa*, *Potentia*, *Potestas*, vel *Dignitas*; idem est in numeris sic 3.3 seu 9, est *Potentia* &c.

DEFINITIO II.

162. Multiplicatio quantitatis per seipsam, vocatur *Elevatio*, vel *Evectio* quantitatis ad *Potentiam* &c. Quantitas verò illa, quæ elevatur, vel elevata est ad potentiam aliquam, vocatur *Radix*, vel *Latus* Potentiæ; aut etiam *prima Potentia*. Sic *a* est radix de *aa*, vel *aaa*, item 3 est radix de 3.3 seu de 9.

CO-

COROLLARIUM.

163. Omnis itaque quantitas secundum se considerata, & ex qua per elevationem, vel fieri potest, vel facta est potentia, vocari potest *Radix*.

SCHOLION I.

164. Ut Tyrones genesim dignitatum tam in quantitatibus integris, quam fractis recte intelligant, sequentem Tabulam contemplandam subjicio, quæ quantitatis monomiæ evectionem ad aliquot dignitatis gradus declarat. Sit igitur

IN INTEGRIS.

Algebraicè.	Gradus Potentiæ.	*Numericè.*
$a^0 = 1$	*Nulla Potentia.*	$1 = 1$
$a = a^1$	Radix, *vel prima Potent.*	$3 = 3$
$aa = a^2$	Quadratum, *vel secunda Pot.*	$3.3 = 9$
$aaa = a^3$	Cubus, *vel tertia Potent.*	$3.3.3 = 27$
$aaaa = a^4$	- - *quarta Potent.*	$3.3.3.3 = 81$

&c. &c. in infinitum.

Universaliter; a^m *significat omnem potentiam, quam denotat exponens m.*

IN FRACTIS.

Algebraicè.	Gradus Potentiæ.	*Numericè.*
$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$	Radix, *seu prima Potent.*	$\frac{3}{4}$
$\frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$	Quadratum, *seu secunda Pot.*	$\frac{3.3}{4.4} = \frac{9}{16}$
$\frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$	Cubus, *seu tertia Potent.*	$\frac{3.3.3}{4.4.4} = \frac{27}{64}$

& ita in infinitum.

Universaliter: $\frac{a^m}{b^m}$ *significat omnem Potentiam.*

SCHO-

SCHOLION II.

165. *Ex attenta hujus tabulæ contemplatione sequentia Corollaria deducuntur: I. Exponentes accuratè indicare gradum datæ potentiæ, sic* a^2 *significat* secundam Potentiam, *seu* Quadratum; a^3 *exprimit* Cubum, *seu tertiam* Potentiam; a^4, *quartam*, a^5 *quintam Potentiam, & ita porro. II. Quadratum* aa, *seu* a^2 *generari, si radix per seipsam semel multiplicetur,* Cubum *verò* aaa, *vel* a^3 *generari, si* Quadratum aa *iterum per* a, *seu per radicem suam multiplicetur; & ita porro: III. Ad hoc, ut fracti ad dignitatem evehantur, opus esse, ut tam numeratores, quam denominatores eleventur.*

SCHOLION III.

166. *Eodem modo per exponentes exprimuntur gradus dignitatis, seu potentiæ quantitatum,* binomiarum, *vel polynomiarum; sic* $(a+b)^2$ *vel* $\overline{a+b}^2$ *significat totam quantitatem* $a+b$ *esse elevatam ad secundam potentiam, seu ad* quadratum; *item* $(a+b)^3$, *vel* $\overline{a+b}^3$ *significat* cubum, *seu tertiam* potentiam, *& ita porro. Idem est in numeris; sic* $(3+4)^2$ *est* quadratum, $\overline{3+4}^3$ *significat cubum; ut ex doctrina exponentium* (§. 50.) *data clarum est.*

SCHOLION IV.

167. *Nomina, & signa peculiaria graduum* dignitatis, *quibus Arabes, & antiquiores mathematici usi sunt:* Ex. gr. Zensus, *vel* zensi-zensus, *aut* surdesolidus, quadrato-cubus, *& cætera heteroclyta, ommittenda potius duxi, quam Tyronum memoriam, obsoletis, & inter Recentiores abolitis nominibus, inutiliter onerare, quorum catalogi, quibus legendi animus est, in commentariis antiquiorum non sine tœdio passim videri possunt.*

HYPOTHESIS I.

168. *Quoniam signum* Radicale *est* √ *per* (§. 38.). *Numeri, vel literæ huic signo supra scripti, sunt* Exponentes, *quibus indicatur gradus potentiæ, cujus hæc est radix.*

Ex.

Ex. gr. $\sqrt[2]{}$, vel simpliciter sine exponente $\sqrt{}$, *indicat radicem* quadratam, *seu secundæ potentiæ. Sic* $\sqrt[3]{}$ *indicat radicem* cubicam *seu tertiæ potentiæ*, & $\sqrt[5]{}$ *radicem quintæ potentiæ, aut universaliter:* $\sqrt[n]{}$ *radicem cujuscunque potentiæ.*

SCHOLION I.

169. *Itaque* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa}$, *aut* $\sqrt{a^2}$ *significat radicem* quadratam *ex* aa, *quæ cum sit* a *per* (§. 164.) *erit* $\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt{aa} = a$, *ita* $\sqrt{xx} = x$, & $\sqrt{aabb} = ab$ &c. *item* $\sqrt[3]{aaa}$, *vel* $\sqrt[3]{a^3} = a$, & *universaliter* $\sqrt[n]{a^n} = a$, *eodem modo in fractis* $\sqrt{\frac{aa}{bb}} = \frac{a}{b}$, & $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{a}{b}$, *aut* $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b}$ &c.

SCHOLION II.

170. *Eodem modo in* polynomiis. $\sqrt[2]{(a+b)^2}$ *vel* $\sqrt{\overline{a+b}^2}$, *significat radicem* quadratam *de* $(a+b)^2$, *quæ est* $a+b$, *item* $\sqrt[3]{\overline{a+b}^3}$, *denotat radicem* cubicam &c. *Notent Tyrones quod signum radicale* $\sqrt{}$, *afficiat tantum quantitatem sibi ad dextram scriptam; sic in hac,* $ab\sqrt[2]{aa}$, *vel* $2\sqrt{ac}$, *signum* $\sqrt[2]{}$ *non afficit* ab, *vel* 2, *sed tantum* aa, *vel* ac, *est tamen quantitas anteposita signo* $\sqrt{}$ *coëfficiens, sic* $2\sqrt{aa}$ *significat* $\sqrt{aa} + \sqrt{aa}$.

SCHOLION III.

171. *Sunt qui Hypothesim expressionis radicalis per exponentes, non signo* $\sqrt{}$ *superscribendo exponentem, sed ad latus dextrum, interpositis inter exponentem, & dignitatem duobus punctis exprimunt; sic* Ex. gr. *loco hujus* $\sqrt[3]{ab^4}$, *scribunt,* $\sqrt{3:ab^4}$, *vel*

vel loco hujus $\sqrt[4]{\overline{a+b}^3}$, *ponunt* $\sqrt{4:\overline{a+b}^3}$, *verũ etsi hujusmodi expressio versatis jam in Algebra nihil obturbet, Tyronibus tamen molesta, & perturbata accidit, atque hinc nos ea non utemur.*

DEFINITIO III.

172. *Radix rationalis*, aut *vera*, dicitur illa, quæ numeris exactè exprimi potest; sic numerus 3 (qui est $\sqrt[2]{9}$) est *rationalis*, quia $3.3=9$, ita quoque $\sqrt[3]{8}$, quæ est 2, est *rationalis*, quia $2.2.2=8$.

SCHOLION.

173. *Hinc* Radix irrationalis, *vel* surda *appellatur, quæ numero exactè exprimi non potest, licet in lineis geometricis dari queat; sic* surda, *vel* irrationalis *est* $\sqrt[2]{28}$; *quia nullus numerus per seipsum semel multiplicatus producere potest* 28, *nam* $5.5=25<28$, *&* $6.6=36>28$. *Sic surda est* $\sqrt[3]{34}$ *nam* $3.3.3=27<34$ *&* $4.4.4=64>34$.

DEFINITIO IV.

174. Radix *Imaginaria*, vel *Impossibilis* illa dicitur, quæ datur in potentia *negativa*, habente *exponentem* numerum parem 2, 4, 6, 8 &c. sic $\sqrt{-a^2}$, vel $\sqrt[2]{-4}$ imaginaria est, & impossibilis.

SCHOLION I.

175. *Radices hujusmodi dicuntur* impossibiles, *quod nec lineis, nec numeris exprimi possint, propterea, quia nulla quantitas per seipsam, adeoque sub eodem etiam* signo *multiplicata producere potest quantitatem negativam affectam exponente, qui sit numerus par. Sic* impossibilis *est* $\sqrt{-a^2}$, *quia* $a.a$ *dat* $+a^2$ *&* $-a\times-a$, *dat etiam* $+a^2$, *per* (§. 86.) *ergo* $-a^2$

pro

produci non potest ex quantitate multiplicata per seipsam sub eodem signo; item impossibilis *est* $\sqrt[4]{-4}$, *quia tam* $+2$ *quam* -2 *per seipsum multiplicatum dat* $++$, *per* (§ 86.) *dicitur autem* Imaginaria *propterea, quia saltem imaginatione nostra concipi potest, comparative nempe ad positivam, cui negativa opponitur, eo prorsus modo, quo impossibilia concipere solemus. Neque tamen sua utilitate carent hæ radices imaginariæ, nam præterquam quod in Analysi numerorum indicent impossibilitatem Problematis, in Geometria flexus, & curvaturas linearum demonstrant.*

SCHOLION II.

176. *In potentia itaque* negativa *habente exponentem numerum imparem*, 3, 5, 7 *&c. radix non est* imaginaria, *aut* impossibilis, *sed vera, etsi* negativa. *Sic* $\sqrt[3]{-a^3}$, *est possibilis, & vera, est enim* $-a$, *nam* $(-a\times-a)\times-a$, *factum dat* $-aaa$ *seu* $-a^3$, *item* $\sqrt[3]{-64}$ *est* -4, *quia* $(-4\times-4)\times-4$ *producit* -64 *per* (§. 86.)

CAPUT II.

De ExtractioneRadicum quarumvis.

DEFINITIO V.

178. *Extractio Radicis*, est inventio quantitatis radicalis, quæ, aut elevata produxit datam potentiam, aut, si producere non potuit, saltem in illa proximè continetur.

SCHOLION.

179. *In specie* Extractio radicis quadratæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam semel multiplicata generavit* quadratum; *item*, Extractio radicis cubicæ, *est inventio quantitatis, quæ per seipsam bis multiplicata produxit* cubum, *& ita porro.*

AXIO-

AXIOMA.

180. Omnis quantitas radicalis considerari, & exprimi poteſt, tanquam quantitas *binomia*, *Ex. gr.* $a+b$, aut $a-b$, item $x-y$, vel $x+y$.

COROLLARIUM.

181. Itaque omnis numerus radicalis monomius, exprimi poteſt per expreſſionem *binomiam*, ſic numerus $7=2+5$, vel $3+4$, aut $1+6$ &c.

THEOREMA I.

182. PROP. *Omne Quadratum (generatum ex* √ binomia*) componitur ex tribus elementis*; Primo: *ex quadrato partis primæ radicalis*; Secundo: *ex duobus factis partium radicalium inter ſe*; Tertio: *ex quadrato partis ſecundæ radicalis.*

DEMONSTRATUR.

	Algebraicè.	*In Numeris.*	
Sit Radix binomia	$a+b$	$=2+5$	$=7$
Per ſeipſam multipl.	$a+b$	$=2+5$	$=7$
Erunt facta	$aa+ab$	$=4+10$	-
Partialia	$+ab+bb=$	$10+25$	-
Quadratum	$aa+2ab+bb$	$=4+20+25$	$=49$

Sed aa *eſt quadratum de parte prima radicis* a, *&* 2ab *eſt* a.b+a.b, *ſeu duo facta partium radicalium* a *&* b *inter ſe*, *& denique* bb *eſt quadratum partis ſecundæ radicalis* b, *ergo:* Vide Fig. 1. *In qua ſi linea* CD=DE *ſecta inæqualiter, vocetur* a+b, *hæ in ſe invicem* geometrice *multiplicatæ per* (§. 90. *Arit.*) *producunt* □ DCHE, *conſtans quadratis partium* aa *&* bb, *& duobus factis* ab. TAB. ALG. Fig. 1. & 2.

Idem in Exemplo numerico; Vide Fig. 2, *in qua* DC *æqualis* DE *sit* Ex. gr. $\overset{//}{7}$ *seu* $\overset{//}{2}+\overset{//}{5}$, *constabit totum* □ DCHE, *quadrato de* $\overset{//}{2}$, *seu* □ $\overset{//}{4}$, *& quadrato de* $\overset{//}{5}$, *seu* □ $\overset{//}{25}$, *& duobus factis* $\overset{//}{10}+\overset{//}{10}$, *seu* $\overset{//}{20}$, *quæ simul faciunt* $\overset{//}{49}=\overset{//}{7}.\overset{//}{7}=(\overset{//}{2}+\overset{//}{5}).(\overset{//}{2}+\overset{//}{5})$.

COROLLARIUM.

183. Cum omnis radix esse possit *binomia*, per (§. 180.) omne quadratum considerari potest generatum ex radice binomia. Itaque formula algebraica, $aa+2ab+bb$ universaliter repræsentat omne quadratum, sed hæc formula facta est per multiplicationem, ergo inquisiturus, seu extracturus radicem divisione opus est, utatur, cum quod multiplicatio ponit, tollat divisio per (§. 121. Arith.)

PROBLEMA I.

184. PROP. *Extrahere radicem quadratam ex quadrato Algebraico.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sit extrahenda radix

$$\begin{array}{rlll}
\textit{ex} & \Box\, aa+2ab+bb & \multirow{3}{*}{$\left.\begin{array}{l} a \\ \\ \\ +b \end{array}\right\}$} & \textit{Radix} \\
\textit{Subtrah.} & +aa \;\; --- \;\; -- & & a+b \\
 & -\;\; --- \;\; -- & & \\
\hline
\textit{Resid.} & +2ab+bb & & \\
\textit{Divis.}\ 2a) & +2ab+bb & & \\
\textit{Subtrah.} & -\quad - & & \\
\hline
 & 0\quad 0 & &
\end{array}$$

Itaque primo: *Quia primum membrum* aa *est quadratum de* a, *erit* $\sqrt{aa}=a$ *per* (§.169.) *quæ locetur post lunulam, erit* a *pars prima radicis binomiæ.*

Secundo; *Ex hac inventa radice* a *fiat quadratum* aa, *quod subscriptum quadrato formulæ* aa, *& sub-*

subtractum destruit ex formula primum membrum aa, *remanentibus duobus membris* $2ab + bb$.

Tertio: *Quia in secundo membro* $2ab$ *continetur pars altera radicis* b, *quæ est multiplicata per* $2a$, *&* *quia* $\frac{2ab}{2a} = b$ *per* (§. 35. & 98.) *itaque* $2ab$ *dividi debet per divisorem* $2a$, *& prodibit quotus* $+b$, *pars nempe altera radicis, quæ ponatur post lunulam.*

Quarto: *Divisor* $2a$ *multiplicetur per quotum radicalem* b, *& factum* $+2ab$ *membro formulæ homogeneo* $2ab$ *subscribatur. Fiat quoque quadratum ex* b, *quod est* $+bb$, *idque subscribatur membro formulæ homogeneo* $+bb$, *unde subtrahendo tam* $-2ab$ *ex* $+2ab$, *quam* $-bb$ *ex* $+bb$ *nihil relinquens; igitur* $a+b$ *est* $\sqrt[2]{aa+2ab+bb}$.

SCHOLION.

185. *Hac itaque methodo universali ad numeros applicata ex quocunque numero radicem quadratam extrahere licet, ut paulo post in exemplo declaraturus sum; ante tamen, quam ad numeros descendamus, ut Tyronibus calculum faciliorem reddam, Tabulam sequentem subjicio.*

TABULA
Radicum, Quadratorum, & Cuborum
in Numeris unitatum.

I.	$\sqrt[2]{aa}$, *vel* $\sqrt[2]{bb}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sqrt[3]{a^3}$ *vel* $\sqrt[3]{b^3}$
II.	$\square$ aa, *vel* bb	1	4	9	16	25	36	49	64	81	*Quadrata*
III.	*Cub.* aaa	1	8	27	64	125	216	343	512	729	*Cub.* bbb

Series I. *continet radices tam quadratas, quam cubicas;* Series II. *continet quadrata numerorum primæ seriei;* Series III. *exhibet cubos eorundem numerorum primæ seriei. Sic numerus* 2 *seriei primæ est* $\sqrt[2]{}$ *de* $\square 4$ *seriei* II. *& idem numerus* 2 *est* $\sqrt[3]{}$ *de cubo* 8 *seriei* III.

PROBLEMA II.

186. PROP. *Extrahere radicem quadratam numericam.*

PARADIGMA EXTRACTIONIS $\sqrt[2]{\ }$.

Sit extrahenda $\sqrt[2]{\ }$ *ex numero* 189225.

Erit formula resolutoria $aa + 2ab + bb$.

Itaque. $\quad 18.92,25 \left(\begin{matrix} a & b & \\ 4 & 3 & 5 \\ a & & b \end{matrix} \right.$

Operatio I. $\quad aa = -16 \; . \; . \; . \; .$

$2ab + bb = * \; 292 \; . \; .$

Divisor $\overline{2a} = 4.2 = 8 \; . \; . \; .$

Addend. $\begin{cases} \textit{duplū fact.}\ 2ab = 4.3.2 = 24 \; . \; . \; . \\ \textit{quadratum}\ bb = 3.3 = \; . \; . \; 9 \; . \; . \end{cases}$

Suma subtrahenda $2ab + bb = * \; 249 \; . \; .$

Oper. II. Resid. *auctum* $2ab + bb = * 4325$

Divisor novus $2a = 43.2 = 86$

Addend. $\begin{cases} \textit{duplum fact.}\ 2ab = 43.5.2 = 430 \\ \textit{quadratum}\ bb = 5.5. = \; . \; . \; 25 \end{cases}$

Summa subtrahenda $2ab + bb = * 4325$

Residuum 0000

novum pro operatione II. — *novum ex operatione II.*

Numerica extractio $\sqrt[2]{\ }$ *secundum formulam algebraicam sic procedit. Datus numerus distinguatur in classes à dextra sinistram versus, classibus singulis binas notas assignando (sinistima tamen etiam una constare potest) fit hæc classificatio per binas notas ideo, quia quadratum de 9, (qui inter unitates maximus est) non excedit duas notas, est enim* $9.9 = 81$, *ut patet ex Tabula; hæc classificatio ante operationem ostendit, tot notas numericas habituram radicem extrahendam, quot classes reperiuntur. Itaque operatio prima extractionis* $\sqrt[2]{\ }$ *(intuendo semper formulam algebraicam præfixam) eadem methodo, ut (§.184.) dictum, procedit.*

II. Cum

I. Cum in numero classis sinistimæ 18 (*quem ex formula repræsentat* aa) *contineatur* □ *partis primæ radicalis* a, *quæratur in Tabula radicum in serie II. numerus quadratus æqualis, vel proxime respondens numero* 18, *qui reperitur esse* 16, *cujus superscripta radix numerica* 4 *ponatur post lunulam, voceturque* a ut in Paradigmate factum vides.

II. Fiat ex invento numero 4 *quadratum* aa = 4 . 4 = 16, *idque subtrahatur ex* 18, *erit residuum* 2, *ad quod ex secunda classe deponantur numeri* 92, & *habebitur numerus* ✳ 292, *quem ex formula repræsentant membra formulæ*, 2ab + bb.

III. Ut reperiatur pars altera radicis b *dividatur* 29 *per* 2a = 4 . 2 = 8, & *quotus* 3 *post lunulam positus vocetur* b, *quo reperto.*

IV. Resolvantur termini formulæ algebraicæ 2ab + bb, *in numeros jam inventos radicis per* a & b *designatos. Erit itaque* 2ab = 4 . 3 . 2 = 24, *quod factum directe scribatur infra* 29 (vide Paradigma) *fiat quoque* □ bb = 3 . 3 = 9 *hoc una nota remotius versus dextram ita scribatur, ut respondeat ultimæ notæ* 2 *ex numero* 292. (vide Paradig.)

V. Sic collocati numeri 2ab & bb, *addantur*, & *habebitur summa* = ✳249, *quæ summa* ✳249 *subtracta à superiore numero* ✳292, *relinquit residuum* 43, *ad quod residuum deponantur numeri tertiæ classis* 25, *erit summa* ✳4325 *pro secunda operatione, quem iterum ex formula algebraica repræsentant* 2ab + bb.

Notandum: Quod si summa numerica ex 2*ab* + *bb* subtrahi non posset à superiore numero, signum est inventum quotum *b* deberi minui, & cum minuto *b* operationes Reg. IV. & V. repetendas esse.

187. *Inchoetur II. operatio, pro qua inventi jam numeri radicis* 43 *simul vocentur* a *novum.* (vide Parad.) *Ad inveniendum itaque* b *novum.*

I. Fiat novus iterum divisor ex novo a, *qui erit* 2a = 43 . 2 = 86, *per quem dividendo* 432 *reperitur quotus* 5, *qui post lunulam positus vocetur* b novum.

II. Resolvantur iterum termini formulæ algebr. 2ab + bb *in numeros per* a *&* b novum *indicator, erit* 2ab = 43 . 5 . 2 = 430, *qui directè infra numeros* ❄432 *scribatur*, *&* □bb = 5 . 5 = 25, *una nota remotius juxta Reg. IV. scribatur.* Vide Parad.

III. Hi numeri sic collocati, & additi dant summam subtrahendam ❄4325, *quæ à superiore* ❄4325 *subtracta nihil relinquendo, indicant inventam radicem* 435 *veram, & rationalem esse numeri* 189225, *hujus rectæ inventæ radicis examen est, si* (435 . 435) *producat* 189225. *per* (§. 179.)

SCHOLION.

188. *Hac itaque methodo operationis II. semper procedendum erit cum numeris reliquarum classium, si plures fuerint, observata cautè regula: quod pro subsequente quavis operatione, omnes numeri radicis per antecedentes operationes inventi, valere debeant* a novum, *solaque altera pars radicis* b, *per Reg. I. II. & III.* (§. 187.) *deinceps investigando eruatur.*

PROBLEMA III.

189. PROP. *Construere formulam universalem pro extrahenda radice quavis, id est, radicem binomiam* a + b *ad datam quamvis potentiam elevare.*

RESOLUTIO.

Multiplicetur $a + b$, per $a + b$, dabit productum hoc secundam potentiam, seu *quadratum*; secunda hæc potentia iterum multiplicata per $a + b$, dat *Tertiam*, seu *Cubum*; tertia iterum multiplicata per $a + b$, dat *Quartam*, & ita porro procedendum, donec *exponens* membri primi de a, & membri ultimi de b exprimat ipſam potentiam petitam, erit hæc formula univerſalis pro extrahenda radice petita. Q. E. F.

Reſolutio hæc per ipſam geneſim potentiarum demonſtratur.

SCHOLION.

190. *Hac methodo conſtructa eſt ſequens tabula quatuor potentiarum ex radice binomia* $a+b$ *productarum, quas in infinitum eadem methodo continuare licet.*

$\surd$, *ſeu* I. Potentia $= a + b$

$\square$, *ſeu* II. Potent. $= a^2 + 2ab + b^2$

Cub. *ſeu* III. Potẽt. $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

IV. Potentia $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Et ita in infinitum.

In his formulis pulcherrima, ac utiliſſima Theoremata, corollaria, ac praxes continentur, quas (quia referre libelli mole inhibemur) docentium explicationi, ac Tyronum attentioni, relinquimus.

PROBLEMA IV. UNIVERSALE.

191. PROP. *Datam cujusvis potentiæ radicem numericam extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Ut habeatur formula operationum, elevetur radix binomia $a+b$ ad datam potentiam, cujus radix quæritur per (§. 189.)

II. Ut propoſitus numerus ritè in claſſes diſtinguatur, tot notæ à dextris ſiniſtram verſus cuivis claſſi aſſignandæ ſunt, quot unitates denotat exponens primi membri formulæ de *a*.

III. Ex claſſe ſiniſtima ſemper ſubtrahatur illa potentia, quam ex formula oſtendit primum membrum de *a*, ejus vero radix numerica ſcribatur poſt lunulam, quæ vocetur *a*, ad reſiduum ſiniſtimæ claſſis, ſi quod fuit, deponantur numeri claſſis ſecundæ.

IV. Juxta ſecundum membrum formulæ algebraicæ formetur ex inventa radice numerica *a* diviſor ad quærendum quotum, qui erit radix numerica *b*, qua reperta, reliqua omnia formulæ membra per *a* & *b* expreſſa reſolvantur in numeros inventæ radicis per *a* & *b* denominatæ, ut (§. 186.) dictum. *Vide Parad. ſubjectum.*

V. Reſoluta hæc facta numerica, ita ſub ſe invicem ſcribenda ſunt, ut notæ dextimæ ſingulorum factorum una nota remotius verſus dextram promoveantur. *Vide Paradigma ſubjectum*; hoc modo ſcripta hæc facta partialia addantur, addita à ſupraſcripto numero claſſis ſecundæ, auctæ per reſiduum ſi quod fuit, ſubtrahantur.

VI. Sic abſoluta claſſe ſecunda, eadem methodo cum claſſe tertia, & cæteris claſſibus procedendum erit, *aſſumendo ſemper pro formando novo diviſore* a *omnes jam* re-

repertas (per antecedentes operationes) radices numericas, eæque per novum a denominatæ, & juxta membrum ſecundum formulæ in numeros reſolutæ, erunt *novus* diviſor pro inquirendo *novo* b, quo invento juxta *Reg. IV. & V. hujus* procedatur.

Quæ regulæ univerſales, ut clariores evadant, eas ad extrahendam radicem cubicam applicabimus, ſit itaque extrahenda $\sqrt[3]{}$ *ex numero* 14886936, *erit per* (§. 189.). *Formula algebraica*,

$aaa + 3aab + 3abb + bbb$ *Radix*

$$14{,}886{,}936\left(\begin{matrix} a & b & \\ 2 & 4 & 6 \\ a & b & \end{matrix}\right.$$

Operatio I.	aaa	$= 2.2.2 =$	8	
	$3aab + 3abb + bbb$	$=$	✱ 6886 . . .	
Diviſor	$3aa$	$= 2.2.3 =$	12 . . .	
Addend.	$3aab$	$= 4.2.2.3 =$	48 . . .	
	$3abb$	$= 4.4.2.3 =$	- 96 . . .	
	bbb	$= 4.4.4 =$	- - 64 . . .	
	Subtrahend.	$=$	✱ 5824 . . .	
Operatio II.	$3aab + 3abb + bbb$	$=$	✱ 1062936	
Diviſ. nov.	$3aa$	$= 24.24.3 =$	1728	
Addend.	$3aab$	$= 6.24.24.3 =$	10368	
	$3abb$	$= 6.6.24.3 =$	- - 2592	
	bbb	$= 6.6.6 =$	- - - - 216	
	Subtrahendus	$=$	✱ 1062936	
	Reſiduum nullum	$=$	0000000	

novum a operationis II.

novum b ex operatione II.

SCHOLION.

192. *Quod ſi poſt ſubtractionem claſſis ultimæ reſiduum aliquod emergat, conſtat ex* (§. 174.) *radicem inventam non eſſe exactam, adeoque in propoſito numero dari radicem irrationalem, & ſurdam, quæ licet a vera, deficere non poſſit una unitate radicali, quia tamen hic defectus radicalis (ob multiplicationem iteratam, per quam potentiæ generantur) defectum*

ſæpe inſignem in potentia producit; idcirco neceſſe eſt noſſe methodum per decimales, appropinquandi ad illam unitatem radicalem ita, ut, ſi placet, ne una millioneſima parte unitatis illius aberrare contingat; itaque.

PROBLEMA V. UNIVERSALE.

193. PROP. *Extracta radice proximè vera ex quavis potentia irrationali, approximare ad radicem veram per fractiones decimales.*

RESOLUTIO.

I. Extracta radice proximè vera per (§.191.) ad reſiduum ultimum addantur tot zeri, quot unitates denotat præfixæ formulæ algebraicæ exponens primi membri de *a*; *Ex.gr.* In approximatione ad radicem quadratam, addantur zeri duo, in cubica, zeri tres, &c.

II. Cum hoc reſiduo zeris aucto procedatur ſecundum regulas IV. & V. (§.191.) aſſumendo ſcilicet pro novo *a* totam radicem inventam, & per hanc inquirendo, juxta Reg. IV. & V. (§.191.) in novum *b*, reperietur prima nota numeratoris, (quæ vocetur *b* novum) pro denominatore vero ſcribatur 10, & habebuntur partes decimæ, unitatis radicalis.

III. Ex hoc numeratore *b*, & cæteris notis per *a* novum denominatis formentur in numeris omnia membra formulæ præfixæ, *ut regula* IV. & V. (§.191.) *dictum*, quibus additis, & ſubtractis, ad reſiduum iterum addantur tot zeri, quot exponens in formula præfixa ſignat, & aſſumendo

pro

pro novo a omnes notas radicis, una cum nota numeratoris, procedatur iterum ad inquirendum novum b, per easdem Reg. IV. & V. (§. 191.) quo reperto, & priori numeratori adjuncto, denominator augeatur uno zero, & habebuntur partes centesimæ, atque hac methodo reliquas numeratoris notas eruendo, & post singulas operationes denominatorem uno zero augendo, pervenietur tandem absoluta operatione sexta ad partes millionesimas.

In gratiam Tyronum subjungo approximationem ad radicem quadratam. In part. centesimis. Sit itaque extrahenda $\sqrt[3]{}$ *ex numero irrationali* 1286.

Formula algebraica $a^2 + 2ab + b^2$ $\quad b,b$

$$12,86 \,/\, 35 \tfrac{86}{100} \quad (a\,b)$$

$$aa = 9$$

$$\underline{}$$

$$2ab + bb = * \; 386 \quad a$$

$$\textit{Divis.}\; 2a = 3.2 = 6$$

$$2ab = 5.3.2 = 30$$

$$bb = 5.5 = \text{-}\,25$$

$$\textit{Subtrahend.} = * \, 325$$

Adproxim. I. *Resid. auct. zeris* $* \; 6100$

$$\textit{Divisor}\;\; 2a = 35.2 = 70$$

$$2ab = 8.35.2 = 560$$

$$bb = 8.8 = 64$$

$$\textit{Subtrahend.} = * \; 5664$$

Adproxim. II. *Resid. auct. zeris* $* \, 43600$

$$\textit{Divisor nov.}\;\; 2a = 358.2 = 716$$

$$2ab = 6.358.2 = 4296$$

$$bb = 6.6 = \text{---}36$$

$$\textit{Subtrahend.} = * \, 42996$$

Residuum pro approximatione III. 604

& ita porro progrediendum.

SCHO-

SCHOLION.

194. *Extractio radicum, & approximatio eadem methodo peragitur in potentiis fractionum, extrahendo videlicet radicem datam tam ex numeratore, quam denominatore sic* $\sqrt{\frac{25}{64}}$ *erit* $\frac{5}{8}$. *Examen verò rectè inventæ radicis tam in integris, quam fractis est, si inventa radix elevata ad datam potentiam, una cum adjuncto residuo (si quod fuit) adæquet numerum, ex quo radix extracta est, ut tentanti in adductis supra exemplis patebit.*

PROBLEMA VI.

195. PROP. *Potentiam quamvis per exponentes expressam elevare ad aliam potentiam per exponentes indicandam.*

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentiæ elevandæ multiplicetur per exponentem potentiæ ad quam elevari debet. Q. E. F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sit a^3 *elevandum ad 2 potentiam, erit* $a^{3.2} = a^6$ *secunda potentia de* a^3, *sic* x^m *elevatum ad potentiam* n, *erit* x^{mn} *&* $(a+b)^3$ *elevatum ad 3 potentiam* $(a+b)^9$

Idem est in potentiis numericis per exponentes indicatis.

Demonstratio liquet; hæc enim multiplicatio exponentium tantum supplet vicem additionis iteratæ exponentium, quam fieri debere docuimus in multiplicatione quantitatum exponentibus affectarum in casu III. (§. 89.) nam a^3 elevatum ad se-

ſecundam potentiam eſt $a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6$ ergo. Q. E. D.

PROBLEMA VII.

196. Prop. *Ex data potentia per exponentes expreſſa, indicare per exponentes, extractam eſſe radicem datam quamvis.*

Resolutio.

Exponens datæ potentiæ dividatur per exponentem datæ radicis. Q. E. F.

Exempla Algebraica.

Sit indicandum extractam eſſe $\sqrt[2]{\ }$ *de potentia* a^6 *erit* $\sqrt[2]{a^6} = a^{6:2} = a^3$, *item* $\sqrt[n]{x^{mn}} = x^{mn:n} = x^m$ *item* $\sqrt[3]{(a+b)^{9:3}} = (a+b)^3$ *&c.*

Demonſtratio clara eſt: Extractio radicis fit per diviſionem (§. 191.), diviſionem autem quantitatum exponentibus affectarum fieri docuimus Caſ. IV. (§. 198.) per ſubtractionem, unde ſequitur diviſionem hanc ſupplere iteratam ſubtractionem, ſic $a^6 : a^3$ ſeu per ſuam radicem, eſt $a^{6-3} = a^3$, &c. Q. E. D.

SCHOLION I.

197. *Poſtrema duo Problemata uſum ampliſſimum habent in calculo radicum irrationalium de quo, in compendio ſequenti capite; nam ope horum problematum quantitates irrationales reduci poſſunt ad expreſſionem rationalium, ſub qua, ut rationales tractari poſſunt;*

possunt; sic $\sqrt[2]{a}=a^{1:2}$ *item* $\sqrt[3]{x}=x^{1:3}$ *aut* $\sqrt[n]{x^m}=x^{m:n}$ *&c.*

SCHOLION II.

198. *De quatuor algorithmis potentiarum jam actum est* Parte I. *sunt enim potentiæ nihil aliud, quam quantitates affectæ exponentibus, & vicissim. Hinc* Additio *potentiarum fit per Cas. I. & II.* (§.74.) Subtractio *per* (§.78.) Multiplicatio *per Cas. III.* (§.89.) Divisio *per Cas. IV.* (§.98.) *Illud hic in divisione potentiarum notandum: quod si pro quoto prodeat potentia cum exponente negativo (ut fit in casu, quo* divisoris *exponens major est exponente* dividendi) *hujusmodi potentia fit fractio, cujus numerator est* 1, *denominator verò eadem potentia, sed cum exponente positivo; sic* Ex. gr. $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$, *nam* Ex. gr. $a^3:a^5=\frac{aaa}{aaaaa}=\frac{1}{aa}$, *sed* $a^3:a^5=a^{-2}$ *per Cas. IV.* (§. 98.) *ergo* $a^{-2}=\frac{1}{aa}=\frac{1}{a^2}$ *Sic* $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$ *&* $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ *&c.*

SCHOLION III.

199. *Locus hic esset agendi de potentiis affectis, & deficientibus, ac de earundem extractione radicis, item de inventione radicum verarum, & falsarum in formulis potentiarum reductis ad nihilum, qualis est,* $x^3-3x^2-10x+24=0$ *quarum singulares observationes ex earundem natura, & genesi referunt cum Carthesio, Hariotus, & cæteri Recentiores, quas, quia ij, qui ad sublimiorem Algebram perdiscendam animum adjecerint, facile ex Recentiorum Analyticorum libris petere possunt, nos (prima duntaxat principia Tyronibus tradentes) prætermittere cogimur, earumque loco calculum quantitatum irrationalium capite sequenti strictim pertractabimus, propterea, quod sine hujus notitia tam Recentiorum Mathematicorum, quam Philosophorum obvii calculi intelligi nequeant. Itaque.*

CA-

CAPUT III.

De calculo quantitatum, & radicum irrationalium, seu surdarum tam simplicium, quam compositarum.

DEFINITIO VI.

200. Radices *heterogeneæ* dicuntur, quarum exponentes radicales sunt heterogeneæ, ut (§. 54.) dictum, sic heterogeneæ sunt $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[s]{a^r}$, item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[3]{18}$. Homogeneæ sunt, quæ eosdem habent exponentes radicales, sic $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{b^s}$ item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[2]{8}$.

PROBLEMA VIII.

201. PROP. *Quantitates irrationales heterogeneas reducere ad homogeneas.*

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sint reducendæ $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[s]{a^r}$ *erunt per* (§. 196.) $\sqrt[n]{b^m} = b^{m:n}$ & $\sqrt[s]{a^r} = a^{r:s}$ *cum itaque exponentes de* $b^{m:n}$ & $a^{r:s}$ *sint expressio fractionum habentium diversos denominatores, hos reducendo ad eundem denominatorem per* (§. 129.) *erunt* $b^{ms:ns}$ & $a^{rn:ns}$, *ergo restituendo signa radicalia erunt* $b^{ms:ns} = \sqrt[ns]{b^{ms}}$ & $a^{rn:ns} = \sqrt[ns]{a^{rn}}$, *sed* $\sqrt[ns]{}$ & $\sqrt[ns]{}$ *sunt homogeneæ per* (§. 200.) *ergo.* Q. E. F. & D.

Eadem resolutio applicata ad radices surdas numericas veritatem problematis declarat.

PRO-

PROBLEMA IX.

202. PROP. *Quantitates irrationales ad expressionem simplicissimam, seu ad terminos minimos reducere.*

RESOLUTIO.

Videatur, an quantitates irrationales in factores suos resolutæ contineant factorem unum, qui sit potentia rationalis, ejusdem potentiæ, cujus est exponens radicis præfixæ, ex hoc factore actualiter extracta radix rationalis ponatur ante signum $\sqrt{}$, altero factore manente post signum $\sqrt{}$. Q. E. F.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit reducenda $\sqrt[2]{aab}$, *quoniam* $\sqrt[2]{aab} = \sqrt[2]{b.aa}$, *erit per datam resolutionem* $\sqrt[2]{aab} = a\sqrt[2]{b}$, *item* $\sqrt[3]{abbb} = b\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt{48aabc} = \sqrt{3.16.aa.bc} = 4a\sqrt{3bc}$. *idem est in compositis, & fractis.*

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit reducenda $\sqrt{12} = \sqrt{3.4}$, *erit reducta* $2\sqrt{3}$, *item* $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2.8}$ *erit* $2\sqrt{2}$.

SCHOLION.

203. *Quod si quantitas irrationalis, aut in factores resolvi non possit, aut nullus factorum sit potentia exponentis datæ radicis, quantitates hæ erunt irreducibiles, sic irreducibiles sunt* $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$, *item* $\sqrt{10} = \sqrt{2.5}$, *aut* $\sqrt{ab}$, *vel* $\sqrt[3]{aab}$.

DE-

DEFINITIO VII.

204. Si duæ, vel plures quantitates, ad expressionem simplicissimam reductæ, habentes eosdem exponentes radicales, habeant præterea eandem quantitatem post signum $\sqrt{}$ positam, quantitates hæ dicuntur *communicantes*, *Ex. gr.* $3\sqrt{2}$, & $5\sqrt{2}$, item $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[3]{b}$ &c. in aliis expressionibus dicuntur *incommensurabiles*.

PROBLEMA X.

205. *Addere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

Ante operationem reducantur per (§.202.) ad expressionem simplicissimam.

CASUS I. Si quantitates reductæ fuerint *communicantes* (§. 204) quantitates ante signum $\sqrt{}$ positæ addantur, ut (§.74.) dictum, harum summa uni quantitati radicali præfixa, erit summa quæsita. Q. E. F. *Vide exempl. I. & II. cas. I.*

CASUS II. Si quantitates irrationales sint irreducibiles, aut *incommensurabiles*, addendæ sunt, ut quantitates heterogeneæ per cas. II. (§ 74.) *Vide exempl. I. & II. cas. II.*

CASUS I. EXEMP. I. ALGEBRAICUM.

Sint $\sqrt{4aab} - \sqrt{9aabc}$ *erunt* $2a\sqrt{b} - 3a\sqrt{bc}$ *per*
Add. $\sqrt{16aab} - \sqrt{aabc}$ *reduct.* $4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc}$ (§.202.)

Summa $6a\sqrt{b} - 4a\sqrt{bc}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint $\sqrt{48} - \sqrt{50}$ *seu* $\sqrt{3.16} - \sqrt{2.25}$ *erunt* $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$
Add. $\sqrt{12} + \sqrt{162}$ *seu* $\sqrt{3.4} + \sqrt{2.81}$ *reduct.* $2\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$

Summa $6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$

CASUS II. EXEMPLUM I. ALGEBR.

$$\sqrt{ab} + a\sqrt{b}$$
$$\sqrt{cd} - a\sqrt{c}$$

Summa $\sqrt{ab} + a\sqrt{b} + \sqrt{cd} - a\sqrt{c}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{5} - 2\sqrt{6}$$

Summa $\sqrt{7} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{6}$.

PROBLEMA XI.

206. PROP. *Subtrahere quantitates irrationales.*

RESOLUTIO.

CASUS I. Si quantitates irrationales per (§.202.) reductæ fuerint *communicantes*, quantitates ante √ positæ subtrahantur, ut homogeneæ per (§.78.) *Vide exempl. I. & II. cas. I.*

CASUS II. Si fuerint *incommensurabiles*, tractentur ut heterogeneæ. *Vide exempl. I. & II. cas. II.*

EX-

CASUS I.

Exemp. I Algebr.		Exemp. II. Numer.	
	$6a\sqrt{b} - 4a\sqrt{bc}$		$6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$
Subtr.	$4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc}$	*Subtr.*	$2\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$
	$- \quad +$		$- \quad -$
Resid.	$2a\sqrt{b} - 3a\sqrt{bc}$	*Resid.*	$4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

CASUS II.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{ab} + a\sqrt{b} \\ \textit{Subtrah.} & \sqrt{a} - a\sqrt{cb} \\ & - \quad + \\ \hline \textit{Resid.} & \sqrt{ab} + a\sqrt{b} - \sqrt{a} + a\sqrt{cb}. \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{7} - 2\sqrt{6} \\ \textit{Subtrah.} & 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \\ & - \quad + \\ \hline \textit{Resid.} & \sqrt{7} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}. \end{array}$$

PROBLEMA XII.

207. PROP. *Multiplicare quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

I. Videatur, an quantitates radicales ſint homogeneæ per (§. 200.) ſi homogeneæ ſint, multiplicentur quantitates ante ſignum poſitæ, per quantitates ſigno $\sqrt{}$ antepoſitas, & quantitates poſt ſignum poſitæ, per quantitates ſigno $\sqrt{}$ poſtpoſitas, ut (§. 89.) dictum. *Vide exempl. I. II. III. & IV.*

 II. Si

II. Si sint heterogeneæ (§. 200.) reducantur prius ad eandem denominationem per (§.201.) reductæ multiplicentur per Reg. I. *Vide exempl. V.*

EXEMPL. I. ALGEBR.

$$\begin{array}{lll} \textit{Facto-} & \sqrt{a} + \sqrt{b} & \\ \textit{res.} & \sqrt{a} - \sqrt{b} & \\ \hline \textit{fact.} & \sqrt{aa} + \sqrt{ab} & \\ \textit{part.} & \quad\quad - \sqrt{ab} - \sqrt{bb} & \\ \hline \textit{fact.} & \sqrt{aa} - \sqrt{bb} = a - b & \end{array}$$

EXEMPL. II. NUMER.

$$\begin{array}{l} \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline \sqrt{9} + \sqrt{6} \\ \quad\quad - \sqrt{6} - \sqrt{4} \\ \hline \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2. \end{array}$$

EXEMP. III. ALGEBR.

$$\begin{array}{r} a\sqrt{b} - c\sqrt{d} \\ c\sqrt{m} \\ \hline ac\sqrt{bm} - cc\sqrt{dm}. \end{array}$$

EXEMP. IV. NUMER.

$$\begin{array}{r} 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} \\ -4\sqrt[3]{5} \\ \hline -8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10} \end{array}$$

EXEMPLUM V. ALGEBRAICUM.

Sint multiplicandi $\sqrt[n]{b^m}$ *per* $\sqrt[s]{a^r}$, *erunt reductæ per* (§. 201.) $\sqrt[ns]{b^{ms}}$ *&* $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, *& hinc factum* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$.

Eodem modo tractandæ sunt radices numericæ heterogeneæ.

PROBLEMA XIII.

208. PROP. *Dividere quantitates irrationales per irrationales.*

RESOLUTIO.

I. Si sint homogeneæ radicales (§. 200.) dividantur quantitates ante $\surd$ positæ

ſitæ per antepoſitas, poſt poſitæ per poſtpoſitas, ut (§.98.) dictum. *Vide exempl. I. & II.*

II. Si ſint heterogeneæ, reducantur prius ad homogeneas per (§. 201.) reductæ dividantur per Reg. I. *Vide exemp. III.*

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

$$\begin{array}{lll} \textit{Divisor} & \textit{Dividendus} & \textit{Quotus} \\ c\sqrt{m} & \left\{\begin{array}{l} ac\sqrt{bm} - cc\sqrt{dm} \\ ac\sqrt{bm} - cc\sqrt{dm} \\ - \qquad\quad + \end{array}\right\} & a\sqrt{b} - c\sqrt{d} \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$-4\sqrt[3]{5}\left\{\begin{array}{l} -8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10} \\ -8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10} \\ + \qquad\quad - \end{array}\right\} 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2}$$

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sit dividendus reductus per (§. 201.) $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}}$ *divisor* $\sqrt[ns]{a^{rn}}$, *erit* $\sqrt[ns]{b^{ms}a^{rn}} : \sqrt[ns]{a^{rn}} = \sqrt[ns]{b^{ms}} = b^{ms:ns} = \sqrt[n]{b^{m}}$.

SCHOLION I.

209. *Eodem modo tractantur radices radicum, ſeu quantitates ſub duplici ſigno radicali*, Ex. gr. $3\sqrt{\sqrt{2}}$, *aut* $(3+\sqrt{5})\sqrt{6}$, *modo obſervetur, quod quantitates aut duplici ſigno radicali antepoſitæ, aut parentheſi incluſæ, tractari debeant ut rationales; quarum calculus videri poterit apud authores infra referendos.*

SCHO-

SCHOLION II.

210. *Calculus radicum imaginariarum eodem modo peragitur, quo realium, modo notetur in multiplicatione, & divisione signa negativa post radicale signum posita non mutari in positiva, alias ex quantitate imaginaria, & impossibili fieri posset realis, & possibilis, quod est absurdum; hinc regulæ de signis (§. 86. & 96.) traditæ tantum respectu signorum ante* $\surd$ *positarum locum habent. Sic*

Si $\surd-50$ *addenda sit ad* $\surd-8$, *erit* $\surd-50 = \surd-2.25 = 5\surd-2$, *&* $\surd-8 = \surd-2.4 = 2\surd-2$ *per* (§. 202.) *& hinc summa* $5\surd-2 + 2\surd-2 = 7\surd-2$ *id est* $\surd-2.49 = \surd-98$.

Item

Ex $\surd-98$ *subtrahendo* $\surd-8$, *erunt reductæ*, $\surd-98 = 7\surd-2$, *&* $\surd-8 = 2\surd-2$, *& hinc differentia* $7\surd-2 - 2\surd-2 = 5\surd-2$.

Pariter multiplicando $\surd-6$ *per* $\surd-3$ *dat factum* $\surd-18$, *& dividendo* $\surd-18$ *per* $\surd-3$ *dat quotum* $\surd-6$. *Sed & de his, cum nobis prolixioribus esse non liceat, plura ex infra citandis authoribus petenda erunt.*

SCHOLION III.

211. *Non ignoro celeberrimos Italiæ Analystas docere multiplicando, vel dividendo radices imaginarias per imaginarias, signa* − *mutari debere in* +, *quod ipsum* Cl. D. Mattine *pluribus ostendere conatur. Sed enim adverto, radicem imaginariam non esse negativam, uti nec est positiva, nam propterea impossibilis asseritur, quod nec sit positiva, nec negativa; nunquam itaque intelligere poteram, ut ex quantitatibus, quæ nec positivæ, nec negativæ forent, quantitas produci queat positiva, uti assequi non possum, quo modo ex duobus entibus involventibus contradictionem, componi possit ens unum possibile.*

FINIS PARTIS II.

ELE-

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS III.

De Analysi speciosa, seu arte resolvendi problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

CAPUT I.

Axiomata, Præcepta, & Praxes universales totius artis Analyticæ.

DEFINITIO I.

212. ÆQuatio, dicitur formula algebraica exprimens per interpositionem signi $=$ certas quantitates quomodocunque affectas esse sibi invicem æquales, vel etiam æquales nihilo: *Ex. gr.* $ax + c = ab - d$, vel $3 + 5 - 2 = 6$, aut $ax - ab = 0$.

SCHOLION I.

213. Æquationis *itaque formula exprimit quantitates omnes simul acceptas, & ante signum* $=$ *positas, æquales esse quoad valorem omnibus quantitatibus simul sumptis, & post signum* $=$ *positis, seu quod idem est, quantitates ad latus sinistrum signi* $=$ *positas æquivalere quantitatibus ad latus dextrum signi* $=$ *collocatis, ut ex hactenus dictis constat.*

SCHOLION II.

214 *Cum unicum medium, quo utitur Algebra ad resolvendas quæstiones etiam abstrusissimas, sit* Æquatio, *seu* Æqualitatis *expressio, totum artis Analyseos artificium fundatur in inventione Æquationis, & arte reducendi (per axiomata de Æqualitate quantitatum,) datam Æquationem ad unum terminum incognitum, ita, ut ex una Æquationis parte obtineatur unus solus terminus incognitus liber ab omnibus aliis tam cognitis, quam incognitis terminis, ex alia vero Æquationis parte meri termini noti habeantur; quod, qua ratione rite fieri debeat, in quinque operationes artem universam resolvendi quæstiones distinguo, in quibus, si Tyro Analysta recte exercitatus fuerit, nihil tam reconditum proponi eidem poterit, cujus solutionem, harum operationum ope, daturus non esset. Prima itaque operatio Analystæ erit:* I. Quæstionis propositæ accurata omnium circumstantiarum discussio, & perfecta, perspectaque propositi status quæstionis intelligentia. II. Apta & debita quantitatum, tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio. III. Inventio, & expressio Æqualitatis, IV. Reductio Æquationis, & V. Æquationis reductæ in numeros resolutio, *vel* figuræ constructio *de quibus in compendio jam specialius.*

OPERATIO I. ANALYSEOS.

215. Quæstionis resolvendæ accurata omnium conditionum, & circumstantiarum discussio.

I. Analysta resoluturus problema aliquod, considerabit primum accurate, quis sit status quæstionis, seu quid petatur inveniendum? quo cognito.

II. Conditiones, & circumstantias in quæstione resolvenda appositas sedulo evolvet.

III. Inquiret in quantitates notas; & ignotas, quænam dentur cognitæ; quæ incognitæ lateant.

IV. Intelligere adlaboret, quænam sit illa quantitas incognita, a cujus notitia dependet solutio problematis, & quamnam relationem quantitates cæteræ ad hanc habeant.

V. Qua-

V. Quænam quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) ex ipsis conditionibus in problemate appositis, dicantur vel inter se, vel cum tertia aliqua quantitate æquales, aut saltem proportionales. His rite intellectis procedat Analysta ad operationem II.

OPERATIO II.

216. Apta, & debita quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio.

I. Quantitates notas per primas, ignotas per ultimas Alphabeti literas denominet, ut (§. 4. & 5. item 41. 42. & 43.) dictum.

II. Quando occurrunt plures quantitates (seu eæ sint cognitæ, seu incognitæ) quæ ob certam relationem ex discussione quæstionis notam, paucioribus literis exprimi possunt, id præstat faciendum, ad facilitandam operationem Reductionis, ut si dentur duæ incognitæ Ex. gr. x *&* y, *constat autem* y *esse duplum de* x, *loco* y, *scribo* 2x, *item si esset* y *subduplum seu una dimidia pars de* x, *eam per* $\frac{x}{2}$ *melius denominabit Analysta, quam per* y, *& ita de aliis.*

III. Denominationem factam ad latus folii aliquod seorsim & distincte, (adscriptis etiam eorum nominibus in quæstione adductis, interposito signo $=$ *) sibi adnotet Analysta, tum ne e memoria elabantur quantitates, pro quibus substitutio literarum facta est, tum ut Resolutio Æquationis reductæ ordinatè peragatur.*

OPERATIO III.

217. Quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum in formulam Æquationis collocatio, seu inventæ æqualitatis expressio.

I. Discussis rite conditionibus quæstionis propositæ, denominatisque terminis, videatur, quæ quantitates (vel simul, vel seorsim acceptæ) dicantur æquales, *aut saltem proportionales, nihil respiciendo notæne sint, an ignotæ, sed ignotas tanquam notas juxta conditiones quæstionis promiscuè in æquationem ordinabit; seu quod idem est; quæstionem ex idiomate latino, vel alio quocunque, in algebraicum per signa, & hypotheses exprimendum transferet, & eloquetur Analysta; erit hæc elocutio desiderata Æquatio prima ad solutionem ope Reductionis aptanda.*

II. Tot Æquationes *formabit, ex conditionibus quæstionis, quot termini inveniuntur incogniti diversi, excepto casu quæstionum indeterminatarum, de quibus infra.*

SCHOLION.

218. *Quemadmodum primæ Æquationis inventio, & expressio acre, ac subtile ingenium Analystæ desiderat, quæ (utpote maximi laboris) lapis est Lydius, in quo sincerum periculum Analysta facere poterit suimet ingenii, ita habita prima Æquatione (quam tamen perspicax ingenium Analystæ ex conditionibus quæstionis propositæ haud difficile formabit) nihil facilius, quam (ope* Reductionis) *quæstionis solutionem reperire, repertamque exhibere.*

OPERATIO IV.

219. Æquationum primarum ad unum terminum incognitum, & solitarium Reductio.

Animadvertant Tyrones Analystæ, scopum, & finem unicum hujus operationis esse, ut servato semper utriusque partis Æquationis, valore æquali, Æquatio ita transformetur per operationes contrarias, ut ex una parte terminus ignotus separatus ab omnibus aliis tam notis, quam incognitis compareat, ex altera vero parte meri termini noti, nullis ignotis permixti habeantur; quod ut recte tractent Analystæ per axiomata, & regulas paulo post referendas, sequentem regulam universalem cautè velim observent, & menti imprimant, videlicet.

Quæcunque operatio cum una Æquationis parte suscipitur, eadem, & in alia Æquationis parte peragatur, *excepta* Metathesi, *ut infra declarabitur. Itaque sequentia Axiomata, in quibus Reductionis regulæ fundantur, memoriæ cumprimis mandet Analysta.*

AXIO-

AXIOMATA QUANTITATUM, *tam Æqualium, quam inæqualium.*

220. I. Idem ſibimetipſi, & ſimile, & æquale eſt ut $a = a$, & $3 + 2 = 5$.

221. II. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt etiam æqualia inter ſe, ut ſi $a = x$, & $b = x$, erit quoque $a = b$, item ſi $3 + 2 = 5$, & $7 - 2 = 5$, erit etiam $3 + 2 = 7 - 2$. Et hinc

222. III. Æquale pro æquali, aut æqualia pro æqualibus ſubſtitui, & ſurrogari poſſunt, ut ſi $x = y$, & $y = a$, erit quoque $x = a$.

223. IV. Si Æqualibus addatur æquale, vel æqualia, manent æqualia, ut ſi $a = x$, & parti utrique addatur b, erit $a + b = x + b$, item ſi $a = x$, & $c = d$, erit etiam $a + c = x + d$.

224. V. Si ab æqualibus auferantur, aut ſubtrahantur æqualia, vel æquale, manent æqualia, ut ſi $a = x$, & ab utraque parte auferatur c, erit $a - c = x - c$, item ſi $a = x$, & $c = d$, erit quoque $a - c = x - d$.

225. VI. Si æqualia per æquale multiplicentur facta manent æqualia, ut ſi $a = x$, & utraque pars multiplicetur per b, erit $ab = xb$.

226. VII. Si æqualia dividantur per æquale, quoti erunt æquales, ut ſi $a = x$, & utraque pars dividatur per c, erit $\frac{a}{c} = \frac{x}{c}$

227. VIII. Si æqualia per alia æqualia multiplicentur, facta erunt æqualia, ut si $a = x$, & $c = d$, erit $ac = xd$, nam $ac = cx$, & $cx = xd$ per (§. 225.) ergo $ac = xd$ per (§. 222.). Eodem modo, si æqualia per æqualia dividantur quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & $c = d$, erit quoque $\frac{a}{c} = \frac{x}{d}$

228. IX. Quantitates æquales elevatæ ad eundem gradum potentiæ, manent æquales, ut si $a = x$, erit $a^2 = x^2$, aut $a^3 = x^3$.

229. X. Ex quantitatibus æqualibus elevatis ad eundem gradum potentiæ extractæ radices ejusdem gradus, manent æquales, ut si $aa = xx$, erit $\sqrt{aa} = \sqrt{xx}$, id est, $a = x$.

230. XI. Si inæqualibus addantur æqualia, aut ab inæqualibus subtrahantur æqualia, item si inæqualia multiplicentur, dividanturve per æqualia *Summæ*, *Residua*, *Facta*, & *Quoti* manebunt inæqualia.

THEOREMATA ÆQUATIONUM.

231. I. Si duarum quantitatum inæqualium differentia, seu residuum addatur ad earundem summam, erit aggregatum æquale duplo quantitatis majoris, ut si

$a > b$,	*In Numeris sit* $12 > 4$
Erit summa $= a + b$	*Erit summa* $12 + 4 = 16$
Differentia $= a - b$	*Differentia* $12 - 4 = 8$
Aggregatum $= 2a$	*Aggregatum* $12 + 12 = 24$

232. II. Si verò à ſumma duarum quantitatum inæqualium, ſubtrahatur differentia, erit reſiduum æquale duplo minoris, ut ſi $a > b$

In Numeris ſit $12 > 4$

Erit ſumma $= a + b$	*Erit ſuma* $= 12 + 4 = 16$
Differentia $= a - b$	*Different.* $= 12 - 4$
Subtrahendo $- +$	*Subtrah.* $- + = - 8$
Reſiduum $= 2b$	*Reſiduum* $= 4 + 4 = 8$

233. III. Si ad ſemiſummam duarum quantitatum inæqualium addatur ſemidifferentia, erit aggregatum æquale quantitati majori, ut ſi $a > b$ erit

Addend. $\begin{cases} \textit{ſemiſumma} = \dfrac{a+b}{2} \\ \textit{ſemidifferent.} = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$ *& hinc aggregatũ*

per (§. 136.) $\dfrac{a+b+a-b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$ *per* (§. 36.)

In Numeris ſit $12 > 4$

erit ſemiſumma $= \dfrac{12+4}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

ſemidifferentia $= \dfrac{12-4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ *ſed* $8 + 4 = 12$

ſeu $\dfrac{12+4+12-4}{2} = \dfrac{24}{2} - 12$ *per* (§. 125.)

234. IV. Si à ſemiſumma duarum quantitatum inæqualium ſubtrahatur earundem ſemidifferentia, erit reſiduum æquale quantitati minori, ut ſi $a > b$

erit

erit semisumma $= \frac{a+b}{2}$

semidifferentia $= \frac{a-b}{2}$

seu subtrahendo $= -\frac{a+b}{2}$ *sed* $\frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$

Idem patet in numeris, si pro literis numeri substituantur, ut in priori Exemplo $12 > 4$.

Ultima quatuor axiomata magnum habent usum in formanda prima Æquatione, de qua (§.217.) dictum.

SCHOLION.

235. *Axiomatibus his rite intellectis, & memoria retentis, sequentes Reductionum regulas fundatas in axiomatibus, familiares sibi reddat Tyro Analysta, id universaliter notando: quod quemadmodum Medici calida frigidis, frigida calidis, id est contrariis tollere in more habent, ita Analystæ, ut terminum in æquatione incognitum, seu quæsitum reddant notum ope Reductionis, quidquid eidem, & ex illius parte in Æquatione adhæreat, per contrarias operationes in utraque parte Æquationis instituendas, tollunt. Sunt autem operationes contrariæ,* Additio & Subtractio *per* (§. 19.) *aut eorum loco* Metathesis, *item contrariæ sunt* Multiplicatio & Divisio *per* (§. 34.) *item inter contrarias sunt, elevatio radicis ad potestatem, & ex potestate radicis extractio; atque per ejusmodi contrarias operationes (quæ in regulis reductionum continentur) Æquationem tamdiu reducit Analysta, donec ex una Æquationis parte solus terminus ignotus, ex altera vero meri cogniti quomodocunque affecti habeantur.*

REGULÆ
REDUCTIONUM ANALYTICARUM
Æquationis solitariæ.

236. *Æquationem solitariam voco, in qua incognitus unus est, vel si plures, ii sint homogenei, ut si sit* $8x + a = ad - c$.

Reg. I.

Reg. I. Si ex parte termini ignoti compareant termini noti per *additionem* ſeu ſignum $+$ conjuncti, ii tollendi ſunt per *Subtractionem*, & quidem in utraque parte æquationis faciendam per (§. 224.) ut ſi ſit $4x + b = a$, ſubtrahendo ab utraque parte b erit $x + b - b = a - b$, hoc eſt $4x = a - b$ per (§. 20.)

Reg. II. Si ex parte termini ignoti inveniatur terminus notus per *Subtractionem*, ſeu ſignum $-$ connexus, is tollendus eſt per *Additionem* ejusdem termini in utraque parte æquationis inſtituendam, ut ſi ſit $3x - c = ab$, addendo utrique parte $+c$, erit $3x - c + c = ab + c$, hoc eſt $3x = ab + c$.

Reg. III. Loco reductionis per binas nunc traditas regulas inſtituendæ, ab exercitatis Analyſtis adhibetur figura *Metatheſis*, quæ eſt translatio terminorum quorumvis ex una Æquationis parte in alteram mutatis ſignis in contraria; eſt hic Modus per Metatheſim operandi admodum compendioſus, utpote vicem binarum antecedentium regularum ſæpius repetendarum unica terminorum translatione ſupplens. Sic ſi detur $4x + b = a$, erit per Metatheſim $4x = a - b$, item $3x - c = ab$, per Metatheſim $3x = ab + c$, aut $5x - c + b + d = ac$ per *Metatheſim* erit $5x = ac + c - b - d$.

Hac

Hac figura Metatheseos nos semper utemur, quotiescunque terminos per additionis, aut subtractionis signa affectos ex una parte Æquationis sublatos voluerimus.

Reg. IV. Si termino ignoto adhæreat aliquis terminus notus per hypothesim *multiplicationis* expressus, is tollendus est per *divisionem*, dividendo scilicet per terminum notum, adhærentem ignoto, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per hunc divisi non sunt, ut si sit, $ax = bc$ erit $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$ hoc est $x = \frac{bc}{a}$ per (§. 36.) item si sit $ax + bx = ad + c$, erit $\frac{ax + bx}{a + b} = \frac{ad + c}{a + b}$ hoc est $x = \frac{ad + c}{a + b}$ per (§. 103.)

Reg. V. Si termino ignoto adhæreat terminus notus per hypothesim *divisionis* expressus, is tollendus est per *multiplicationem*, multiplicando videlicet per terminum notum adhærentem, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per illum terminum divisi non sunt, ut si sit $\frac{x}{a} + b = c$ erit $\frac{ax}{a} + ab = ac$, hoc est $x + ab = ac$ per (§. 36.) & per Metathesim $x = ac - ab$.

Reg. VI. Quod si occurrat Æquatio, in qua *omnes termini* per eandem aliquam quantitatem multiplicati, vel divisi sunt, ea quantitas simpliciter deleri potest; ut si sit $ax + ac = ad$, erit $x + c = d$,

item

item ſi ſit $\frac{x+c}{a}=\frac{d+b}{a}$, erit $x+c=d+b$ per Axioma. (§. 226.)

Notent Tyrones: Analyſtis in more eſſe, in caſu, quo per multiplicationem, aut diviſionem notum ab ignoto tollunt, compendii gratia, delendo ſimpliciter per (§. 104.) terminum notum ignoto adhærentem, reliquos verò per illum multiplicatos, aut diviſos indicare, ut ſi Æquatio ſit $ax-bx=dc$ *ſtatim eam ita exprimunt* $x=\frac{dc}{a-b}$, *item hanc* $\frac{x}{a}=c$, *ita* $x=ac$.

Reg. VII. Si terminus ignotus ſit elevatus ad potentiam, ex illo, & cæteris terminis in utraque parte Æquationis repertis, extrahenda eſt radix ejusdem gradus, cujus eſt potentia. ut ſi ſit $xx=ab$, erit $\sqrt{xx}=\sqrt{ab}$, hoc eſt, $x=\sqrt{ab}$, verum de hujusmodi reductione alibi fuſius.

Reg. VIII. Si terminus ignotus ſit affectus ſigno $\sqrt{}$, is, & cæteri utriusque partis in Æquatione termini elevandi ſunt ad gradum ejus potentiæ, quem indicat exponens radicis, & tum ſignum $\sqrt{}$ termino ignoto præfixum ommittitur, ut ſi ſit $\sqrt[2]{x}=ab$, erit $x=a^2b^2$. ſed, & de his ſuo loco prolixius.

Reg. IX. Si in utraque parte Æquationis compareat idem terminus ignotus quomodocunque, affectus, tum, minor ignotus ad partem majoris (ſi major ſit poſitivus) per Metatheſim transferendus eſt, ut ſi ſit

$5x = ab + 2x$, erit per Metathesim $5x - 2x = ab$, seu $3x = ab$. è contra, si major ignotus sit negativus, ad partem minoris per Metathesim transferatur, ut si sit $2x = ad - 4x$, erit $2x + 4x = ad$, seu $6x = ad$.

Reg. X. Tyrones Analystas sæpe multum juvat reductio Æquationis ad *nihilum*. Fit hæc reductio (ope Metathesis) transferendo omnes terminos tam notos, quam ignotos ad partem illam Æquationis, in qua habetur major terminus ignotus positivus, & aut contra, ad partem minoris, si major sit negativus, ut si sit

$$10x - c - b = a + 4x - cx,$$

erit $10x - c - b - a - 4x + cx = 0$, hoc est $6x - c - b - a + cx = 0$, dein iterum (per Metathesim) omnes notos transferendo, erit $6x + cx = a + b + c$, & dividendo per $6 + c$, erit $x = \frac{a + b + c}{6 + c}$ per Reg. IV.

Reg. XI. Si qui termini sint, qui se invicem destruere, vel per additionem, aut subtractionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt, ut si sit $x + x + b + x + c = a$, erit $3x + b + c = a$, & per Metathesim $3x = a - b - c$, & dividendo per 3, erit $x = \frac{a - b - c}{3}$ per Reg. IV.

Item

Item si sit $5a + 3x = 5b - 3a + 2x$, erit reduçendo ad nihilum (per Regul. X.)

$$5a + 3x - 2x + 3a - 5b = 0,$$

seu $x + 8a - 5b = 0$,

& per Metathesim $x = 5b - 8a$.

Reg. XII. Si occurrant termini (seu noti sint, seu ignoti) expressi per fractiones diversæ denominationis, reducendi sunt illico ad eandem denominationem, ut si sit $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - c = x$, erunt reductæ per (§. 129.) $\frac{12x + 8x + 6x}{24} - c = x$ seu $\frac{26x}{24} - c = x$, & multiplicando per 24 erit $26x - 24c = 24x$, & per Metathesim $26x - 24x = 24c$, seu $2x = 24b$, & dividendo per 2, erit $x = \frac{24c}{2} = 12c$

Cætera suis locis, & oretenus plura.

OPERATIO V.

237. Æquationis ad unum incognitum, & ab omnibus notis liberum reductæ, in numeros *Resolutio*, vel figuræ *Constructio*.

1. Cum solutio quæstionis per ipsam Æquationem obtineatur, in qua terminus ignotus ex una Æquationis parte omnino solus, & liber ab omnibus aliis comparet, ex alia verò parte meri termini noti habeantur, nihil amplius laboris Analystæ super est, quam (si quæstio per numeros solvi debet) ut literæ in valores suos numericos; pro quibus in Operatione II. substitutæ sunt, juxta expressionem Æquationis reductæ solvan-

vantur, ut si foret Æquatio reducta, $x=\frac{a-b-c}{3}$ *& literæ substitutæ fuissent (per Operationem II) loco numerorum,* Ex. gr. *si fuisset* $a=485$, $b=10$, *&* $c=25$, *erit Resolutio* $x=\frac{485-10-25}{3}$, *hoc est* $x=\frac{450}{3}$ *seu* $x=150$.

Si vero Æquatio resolvenda sit in lineas, facienda est figuræ constructio, *ut in Geometria docebitur.*

II. Invento valore termini ignoti, videat Analysta, an substituto loco termini ignoti valore invento, conditionibus propositæ quæstionis satisfiat, si ita, quod semper rite operantibus evenit, non sine voluptate animi virtutem Analyseos admirabitur; secus (si quæstio non fuit impossibilis) errorem se admisisse, deprehendet.

SCHOLION.

238. *His Regulis universalibus, & in abstracto declaratis, cum Tyro Analysta aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæstionibus primum quidem simplicioribus, dein magis reconditis, & subtilioribus ad Æquationem redigendis, reducendisque tentet, quibus rite applicandis (in sequentibus capitibus) qua licet brevitate, exemplis prælucebo, ac præmissis adhuc quibusdam scitu necessariis, veluti manuducam, identidem commonendo, si cætera mathemata frequentem exercitationem desiderant, eam certe in quæstionum, & problematum resolutionibus cumprimis sedulam esse oportere, propterea, quod Ars Analytica non tam verbis, quam ipsamet praxi quotidiana, & formularum contemplatione seria, mentisque ad operationes acri adversione condiscatur, nec laboris unquam pœnitebit, cum novis inventis (veluti totidem ingenii partulus felix) eruditum orbem, non sine sincera animi voluptate, ad DEI Gloriam, locupletabit.*

CA-

CAPUT II.

Analysis Problematum simplicium, & determinatorum, uno incognito affectorum.

DEFINITIO II.

239. Omne Problema, aut Quæstio est vel *possibilis*, vel *impossibilis*; *Possibilis* dicitur, cujus conditiones inter se non pugnant, adeoque solutionem admittunt, ut, si quæratur dimidium de numero 6; est enim numerus 3. *Impossibilis* est, cujus conditiones aut sibi opponuntur contradictoriè, aut unam impossibilem involvunt, ut, si quæratur dimidium de numero 6, hac adjecta conditione, ut id dimidium sit numerus par; cum enim dimidium de numero 6, tantum sit numerus 3, qui par esse nequit, conditio adjecta quæstionem reddit impossibilem.

SCHOLION.

240. *Quæstionis impossibilitas, si ea ex conditionibus in quæstione appositis non illico reluceat, per Reductionis regulas manifesta redditur, si enim terminus incognitus in Æquatione reducta evadat negativus, hoc est, si sit æqualis meris cognitis negativis, aut, si sit æqualis radici imaginariæ, problema propositum Analysta pronunciabit esse practicè impossibile, ut si foret* $x = -4$, *aut* $x = \sqrt{-aa}$.

DEFINITIO III.

241. Problema possibile aliud est *determinatum*, aliud *indeterminatum*; *De-*

terminatum dicitur, in quo tot habentur conditiones, quot quantitates ignotæ, ſeu quando (diſcuſſis conditionibus) tot formari poſſunt Æquationes primariæ, quot ſunt incogniti diverſi. *Indeterminatum* appellatur, cujus pauciores reperiuntur conditiones, quam quantitates diverſæ incognitæ. His accedit problema *plusquam determinatum*, quando plures conditiones apponuntur, quam ſint incognitæ, quod ultimum plerumque evadit impoſſibile, ſi adjectæ conditiones ſuperfluæ ſint inter ſe pugnantes.

COROLLARIUM I.

242. Determinata problemata, determinatum etiam numerum ſolutionum admittunt; Indeterminata, quam plurimos ſolvendi modos habent, ut patebit inferius.

COROLLARIUM II.

243. Quando problema eſt determinatum, plures incognitæ ad unum reduci poſſunt, in Indeterminatis plures ignotas remanere eſt neceſſe, quarum una, aut altera (arbitrio Analyſtæ) determinanda eſt, per quam cæteræ determinentur, ut ſuo loco dicetur.

DEFINITIO IV.

244. Problemata tam determinata, quam indeterminata, alia ſunt *ſimplicia*, *compoſita* alia. Simplicia ſunt, cujus incognitus eſt *unius dimenſionis*, id eſt, ad nullam potentiam elevatus, ut ſi ſit $x = ab$.

Com-

Compoſita dicuntur, quorum incognitus eſt duarum, vel trium, aut plurium dimenſionum, id eſt, ad potentiam ſecundam, tertiam, &c. elevatus, ut ſi ſit $xx = ab$, aut $x^3 = ac$.

SCHOLION.

245. Problemata tam ſimplicia, quam compoſita quandoque affecta ſunt incognitis homogeneis tantum, quandoque vero pluribus ignotis heterogenei permiſcentur, de quibus ſuo loco ſpecialius; hoc capite problematibus ſimplicibus determinatis, & uno, vel pluribus incognitis homogeneis affectis, ad praxim Analyſeos Tyrones manuducam. Sit igitur Reſolvendum.

PROBLEMA I.

Sempronius Parens condito teſtamento legavit ternis filiis ſuis *Mathiæ*, *Stephano*, & *Alexio* ſummam aureorum 485, his conditionibus partiendam, ut *Stephano* natu medio, tot aurei obvenirent, quot *Mathiæ* natu maximo, & præter hos, 10 aureos plures cenſeret *Stephanus*, quam *Mathias*. *Alexius* quoque totidem, quot *Mathias*, & inſuper adhuc 25 aureos obtineret. Quæritur Legatum ſingulorum?

OPERATIO I.

Juxta regulas (215.) diſcutiendo ſtatum quæſtionis, & conditiones appoſitæ intelligo. Primo: *Quæſitum hujus eſſe, ut ſingulorum filiorum legata ſumma reperiatur.* Secundo: *Clarum fit, ſi ſummam particularem* Mathiæ *legatam, notam haberem, jam quoque reliquorum legata in aperto eſſent, cum tam* Alexius, *quam* Stephanus (*demptis 10, & 25 aureis ſupererogatoriis*) *eundem cum* Mathia *aureorum numerum percipere debeant.* Tertio: *Video, præter 485 aureos, dari notos terminos 10, & 25 aureos.*

His rite intellectis procedatur ad denominationem:

OPERATIO II. DENOMINATIO.

Sit summa Legata $485 = a$, *aurei* $10 = b$, *aurei* $25 = c$, *erit juxta conditiones problematis.*

Legatum natu maximi, seu Mathiæ $= x$
- - - *natu medii, seu* Stephani $= x + b$
- - - *natu minimi, seu* Alexii $= x + c$

Facta rite hac denominatione progrediendum est ad elocutionem quæstionis Algebraicam, seu ad formandam Æquationem, quam conditiones ipsiusmet quæstionis suppeditant. Intelligo enim singulorum filiorum legata particularia, in unam summam collecta, adæquare debere totam summam legatam, id est, legatum x Mathiæ, *plus legato* $(x + b)$ Stephani, *plus legato* $(x + c)$ Alexii, *adæquat summam totalem* a. *Quam Æquationem inventam eloquendo algebraicè, Sic exprimo:*

OPERATIO III. ÆQUATIONIS EXPRESSIO.

$$x + x + b + x + c = a$$

Hanc Æquationem juxta regulas Operat. IV. (§. 236.) de Reductione datas, tractando, reducere tamdiu debeo, donec obtineatur Æquatio, seu formula, in qua ex una parte Æquationis terminus ignotus x *omnino solus, ex altera vero parte meri cogniti habeantur. Itaque.*

OPERATIO IV. REDUCTIO.

Per Reg. XI. (§. 236.) reducitur ad hanc; $3x + b + c = a$

& per Metathesim juxta Reg. III. erit $3x = a - b - c$

dein per Reg. IV. dividenda utramque partem per 3 *erit* $\frac{3x}{3} = \frac{a - b - c}{3}$

hoc est per (§. 104.) - - $x = \frac{a - b - c}{3}$

Cum habeatur x *reductum, & solitarium ex una, ex altera vero parte meri cogniti, solutio quæstionis in aperto est; si termini noti Æquationis ultimæ juxta expressionem datam in numeros (pro quibus literæ substitutæ sunt) resolvantur. Erit itaque*

OPERATIO V. ÆQUATIONIS REDUCTÆ RESOLUTIO.

$x = \frac{485 - 10 - 25}{3}$ *hoc est* $x = \frac{450}{3}$, *seu* $x = 150$.

Sunt

Sunt ergo Legata Particularia,

Legatū natu maximi, seu Mathiæ	$x = 150$	*hoc est*	$= 150$
- - *natu medii, seu* Steph.	$x + b = 150 + 10$		$= 160$
- - *natu min. seu* Alexii	$x + c = 150 + 25$		$= 175$
Summa omnium	$3x + b + c = 450 + 35$		$= 485$

Quæ summa cum adæquet totam à Sempronio *Parente legatam summam* 485 *aureorum, quæstionem rectè solutam esse demonstrant.*

SCHOLION.

246. *Prælusi Tyronibus exemplo facillimo fusè deducto, quo viam commonstrarem, qua deinceps intellectum circa artem Analyticam, in quæstionibus difficilioribus ratiocinando exercere valeant; reliqua enim exempla (supponendo ratiocinium Analyticum) via brevissima resolvemus; Id interea velim notent Tyrones, me iisdem fidelem suasorem esse, ut, tametsi hujusmodi quæstiones resolutionum numericarum, per Algebram numerosam (id est, non substituendo literas pro numeris) tractari possint, & à plerisque tractentur Analystis; Praxim eorum minime sequantur, verum semper literas pro numeris substituendas suadeo propterea, quod ultimæ resolutionum formulæ literis expressæ, utpote universales, medium, & instrumentum sint Theorematum, & regularum reperiundarum, ut patebit alibi; dein, id commodi præterea habent literæ, quod harum ope molestissimæ cæteroquin numerorum reductiones evitentur, viaque brevissima scopum obtineamus; accedit quod aptos reddant Tyrones Geometriam ope Algebræ tractandi, veramque scientiam, quæ ideis universalibus comparatur, adipiscendi.*

PROBLEMA II.

Cum aliquando in Macedonum colloquio mentio de singulorum ætate incidisset; Ego, inquit *Alexander*, *Ephestionem* meum antecedo annis 4; at *Clytus*, ego vero amborum vestrorum ætatem vivo;

Tum *Calisthenes*: jucunda eſt mihi, ô Rex! iſthæc ætatum commemoratio, Patris enim memoriam renovavit, qui cum annos vixiſſet 72, trium veſtrum ætates compleverat.

Quæſtio hæc priori ſimillima, & eodem modo reſolvenda, proponit quærendas ſingulorum ætates. Fiat itaque diſcuſſis conditionibus apta denominatio.

Sint anni $4 = b$, *anni* $72 = a$
ſitque ætas Epheſtionis $= x$
erit ætas Alexandri $= x + b$
ætas Clyti $= 2x + b$

Itaque quæſtionem algebraice eloquendo, ex conditionibus appoſitu habebitur Æquatio:

$$x + x + b + 2x + b = a$$

hoc eſt per Reg. XI. $4x + 2b = a$
& per Metatheſim $4x = a - 2b$
& *per Reg. IV. divid. per* 4. *erit* $x = \frac{a - 2b}{4}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x = \frac{72 - 8}{4}$, *hoc eſt* $x = \frac{64}{4}$, *ſeu* $x = 16$

Eſt igitur ætas	Epheſtionis	$x = 16$	*hoc eſt*	$= 16$
ætas	Alexandri	$x + b = 16 + 4$		$= 20$
ætas	Clyti	$2x + b = 32 + 4$		$= 36$
Summa ætatum		$4x + 2b = 64 + 8$		$= 72$

Recte igitur ſoluta quæſtio.

PROBLEMA III.

Pythagoras Philoſophus interogatus, quotnam haberet diſcipulos? Reſpondit: Dimidia pars meorum diſcipulorum Philoſophiæ operam navat, pars quarta Matheſim audit, ſeptima ſilentium tenet, adſunt præter hos 3 novitii ſacris noſtris mox initiandi.

Quæ-

Quæritur numerus omnium Discipulorum, quo reperto innotescit quoque numerus Philosophorum, Mathematicorum, & silentium tenentium. Itaque

Sint novitii $3 = a$, *summa omnium discipulorum* $= x$ *habebuntur ex conditionibus quæstionis.*

Philosophi $= \frac{x}{2}$, *Mathematici* $= \frac{x}{4}$, *Silentes* $= \frac{x}{7}$

Hos terminos juxta conditionem quæstionis in Æquationem ordinando.

Erit Æquatio prima: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + a = x$

Et reducendo fractiones ad eundem denominatorem.

Erit per Reg. XII. (§. 236.) $\frac{28x + 14x + 8x + a}{56} = x$

hoc est per Reg. XI. $\frac{50x + a}{56} = x$

Multipl. per 56 erit per Reg. V. $50x + 56a = 56x$

& per Metathesim $56a = 56x - 50x$

hoc est $56a = 6x$

& divid. per 6, erit per Reg. IV. $\frac{56a}{6} = x$

RESOLUTIO.

$\frac{56a}{6} = \frac{56 \cdot 3}{6} = \frac{168}{6} = 28$ *hoc est* $28 = x$

Fuere itaque Discipuli Pythagoræ universim 28

Et hinc Philosophi $\frac{x}{2} = \frac{28}{2} = 14.$

Mathematici $\frac{x}{4} = \frac{28}{4} = 7.$

Silentes $\frac{x}{7} = \frac{28}{7} = 4.$

Novitii $= a = 3.$

Summa omnium $= 28.$

Eodem modo tractantur quæcunque quæstiones, in quibus fracti habentur; notent Tyrones, primam omnium operationum esse debere reductionem ad eundem denominatorem.

CA-

CAPUT III.

Resolutio Problematum in quibus plures accurrunt incogniti heterogenei.

Præter cætera hucusque dicta, noverint Tyrones artem totam hujusmodi Problemata solvendi (si determinata sint) in eo versari, ut incogniti, præter unum, eliminentur, & exterminentur omnes, in Indeterminatis vero tot, quot possunt eliminari.

Obtinetur autem hæc eliminatio duobus modis:

247. I. Eliminatio obtinetur per substitutionem Æqualis pro Æquali, juxta Axioma III. (§. 222.), ut si dentur Æquationes: Prima, $y+1=2x-2$, & altera $y-1=x+1$, velimus autem eliminatum y, reducantur ambæ Æquationes ad y solitarium juxta regulas reductionum

Erit prima per Metathes. $y=2x-3$
secunda per Metathes. $y=x+2$, *& hinc per Axioma III.* (222.) *substituendo loco* y *alterutram, erit* $x+2=2x-3$, *in qua eliminatus habetur terminus* y.

248. II. Eliminari potest per Additionem, aut Subtractionem totius Æquationis unius à tota Æquatione altera, sed prius per Reductionem ad destructionem unius termini ignoti rite præparata, ut sit Prima, $x+y=a$, secunda $8x+4y=b$, cupimus autem eliminatum y, quod cum in *secunda* multiplicatum per 4 compareat, *primam* per numerum 4 multiplicando aptare necesse erit.

ritE-

Eritque Prima $4x + 4y = 4a$,
quæ jam sic aptata si subtrahatur
nempe a secunda $8x + 4y = b$
Primam subtrahendo $4x + 4y = 4a$
$\quad - \quad - \quad -$

erit Residuum $4x = b - 4a$
in qua y eliminatum habetur.

SCHOLION.

Utra Methodus alteri præferenda sit, desinire non licet, sed exercitato Analystæ jam hanc, jam alteram circumstantiæ quæstionis usurpandam suadebunt. Itaque

PROBLEMA I.

Euclidis Geometrarum Principis Ænigma, quod Geometris olim proposuisse fertur, sic habet: Ibant, inquit *Mulus*, & *Asina* vinum portantes, *Asina* ex dolore ponderis ingemiscebat, quo audito, *Mulus*: chara mater, inquit, quid ita lamentaris? mensuram mihi unam si dederis, duplo tunc plus, quam tu sustulero; sin tu à me unam acceperis, idem, quod ego, pondus feres. *Onus igitur utriusque peritissime Geometra edicas volo.* Itaque

Discussis rite conditionibus, ac probe intellectis verbis Muli, fiat denominatio, sitque numerus mensurarum vini, quas gestat Mulus $= y$
Numerus mensurarum Asinæ $= x$
jam ex conditione prima Muli; si Asina det Mulo unam mensuram, habebit Mulus $y + 1$, *& Asina habebit* $x - 1$, *cumque* $y + 1$ *dicatur esse duplum de* $x - 1$, *ut Æquatio habeatur, multiplicetur* $x - 1$ *per* 2, *erit* $2x - 2$ *duplum de* $x - 1$; *adeoque* $2x - 2$ *æquale* $y + 1$
hoc est $y + 1 = 2x - 2$
seu per Metathes. $y = 2x - 3$ A

Item

Item ex secunda conditione; si Mulus det Asinæ unam mensuram, habebit Mulus $y-1$, *& Asina* $x+1$, *sed tunc dicuntur habere uterque Æquales numero mensuras, ergo* $y-1=x+1$
per Metathesim $y=x+2$ B
sed etiã in Æquat. A *erat* $y=2x-3$ A
Ergo per Axioma III. (§.222.) $x+2=2x-3$,
in qua eliminatum est y
itaque per Metathesim $3+2=2x-x$ *hoc est* $5=x$

RESOLUTIO.

Inventus est valor $x=5$, *sed in Æquatione* B *est* $y=x+2$, *ergo* $y=5+2$. *Igitur* Mulus *habuit mensuras* $y=7$, Asina $x=5$.

Nam Primo: *si* Asina *portans* 5 *mensuras det unam* Mulo *portanti* 7, *habebit Mulus* $7+1$, *hoc est* 8, *& Asina habebit* $5-1$, *hoc est* 4, *sed* 8 *est duplum de* 4, *ergo prima conditio impleta habetur.*

Secundo: *Si Mulus habens* 7 *mensuras det Asinæ* 5 *portanti, unam, habebit Mulus* $7-1$, *hoc est* 6, *& Asina* $5+1$, *hoc est etiam* 6, *seu numero Æquales, quæ erat secunda conditio.*

PROBLEMA II.

Cauponæ Præfectus, vini partim generosi, partim debilioris urnas complures cellario suo intulit, lucrum justum facturus, si urnas singulas vini generosi pretio 42 grossorum, urnam vero debilioris 27 gross. venumdaret; at enim vinum generosius, quia pretii majoris; debilius, quia gustui minus gratum, suis pretiis distrahere nequit, cupit itaque vina hæc commiscendo vas 100 urnarum implere, hac conditione, ut urnam vini mixti grossis 30 (pretio nempe inter 42 & 27 gross. medio) venumdando, idem lucrum reportaret, quod ob-

obtineret, si purum distrahere potuisset; *Idcirco, ne vel se, vel emptores falleret, scire desiderat, quot urnæ vini generosi, quotque debilioris accipiendæ sint, ut vini misti emergant urnæ* 100, *quarum singulæ* 30 *grossis distrahantur.*

Discussis rite conditionibus, fiat Denominatio.

Sit pretium urnæ vini generosi	42 *groß.*	$= a$
pretium debilioris	27 *groß.*	$= b$
Pretium medium vini misti	30 *groß.*	$= c$
Vas vini mixti urnarum	100	$= d$
Urnæ accipiendæ ex vino generoso		$= x$
- - *ex vino debiliore*		$= y$

Ergo ratione numeri urnarum juxta conditionem Problematis primam.

Erit Æquatio prima hæc $x + y = d$

& per Metathesim $x = d - y$ A

Jam vero ratione pretii per conditionem secundam.

Erit Æquatio secunda $ax + by = dc$

& per Metathesim $ax = dc - by$

& dividendo per a erit $x = \frac{dc - by}{a}$ B

sed etiam in Æquat. Primæ A *est* $x = d - y$

Ergo in Æquat. B *substituendo loco x valorem æqualem* $d - y$

Erit per Axioma III. (§. 222.) $d - y = \frac{dc - by}{a}$

& multiplicando per a, erit $ad - ay = dc - by$

per Metathesim $ad - dc = ay - by$

denique dividendo per $a - b$, *erit* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$

RE-

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$y = \frac{(42.100)-(100.30)}{42-27}$, *hoc est* $y = \frac{4200-3000}{15} = 80$

Itaque $y = 80$ *urnæ*, (*Nã in Æquat.* A *est* $x = d - y$
& $x = 20$ *seu* $x = 100 - 80 = 20$.

Summa $x + y = 100$ *urnæ*

Jam 100 *urnæ vini mixti* (*urnam per* 30 *groſſ. vendendo*) *faciunt* 3000 *groſſos*.

Sed etiam 80 *urnæ per* 27, *faciunt* 2160 *groſſ.*
& 20 *urnæ per* 42, *faciunt* 840 *groſſ.*

ſeu ſimul addend. 3000 *groſſ.*

Ergo habetur adimpleta ſecunda conditio.

SCHOLION I.

253. *Hujusmodi Problema, vocatur* Mixtionis, *vel* Alligationis, *habetque uſum, & utilitatem ampliſſimam in Oeconomicis, Phyſicis, Pharmaceuticis, Chymicis &c. & univerſim in caſu omni, quo duo miſcibilia diverſi valoris, aut ponderis commiſcenda ſunt, ita, ut emergat mixtum deſiderati valoris, pretii, virtutis, probitatis, aut ponderis medii; ut* Ex gr. *Si miſceri debeat frumentum, vina, medicinæ, merces, diverſa liquida chymica, item metalla &c. ad obtinendum mixtum valoris medii. Hinc Tyro Analyſta ultimam Æquationem* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$ *memoria retinens, omnem hujusmodi quæſtionem* (duorum nempe miſcibilium) *facile ſolvet, ſi in propoſita quavis quæſtione, eandem noſtram denominationem retineat, id eſt, ſi rem datam majoris pretii vocet* a, *viliorem* $= b$, *medium* $= c$, *quantitatem datam mixti componendi* $= d$, *quantitatem denique ex viliore accipiendam* $= y$, *quibus denominatis, hanc formulam* $\frac{ad - dc}{a - b} = y$, *in numeros propoſitæ quæſtionis reſolvendo, ſolutionem cujusvis quæſtionis illico reperiet, ut tentanti patebit.*

SCHOLION II.

251. *Hæc formula* $\frac{ad-dc}{a-b} = y$ *est celebris illa Regula Arithmeticorum, quam* Mixtionis, *sive* Alligationis *nomine compellantes, licet fuse declarare conentur, nunquam satis ad captum demonstrant. Cæterum notent Tyrones, hoc, & pleraque problemata, quæ vulgo per duos incognitos diversos (causa exercitii) resolvuntur, unico incognito ab exercitatis Analystis plerumque solvi. Sic in priori Problemate, si numerus urnarum vini debilioris vocetur* y, *loco* x (*numeri nempe urnarum generosioris*) *poni potest* $d-y$, *quod ipsum Æquatio prima* A, *attentum Analystam edocet. Reliqua mixtionum problemata, ad quæ plura, quam duo miscibilia ingrediuntur, ad problemata indeterminata pertinent, de quibus jam breviter.*

CAPUT IV.

Resolutio Problematum Indeterminatorum.

252. *Cognoscitur Problema aliquod propositum, esse ex genere indeterminatorum per* (§. 241.)

In his Problematibus, ultima Æquatio duos plerumque, aut etiam plures complectitur incognitos, etsi ab exercitato Analysta, quotcunque dentur incogniti, semper ad duos saltem incognitos per substitutionem (æqualis pro æquali) juxta Axioma III. (§. 222.) *reduci possint.*

PROBLEMA I.

Sint distribuendi 240 fl. in Studiosos pauperes 50, hac conditione, ut singuli Theologi percipiant fl. 8, Philosophi singuli fl. 6, singuli Humanistæ fl. 2.

Quæritur quotnam esse debeant Theologi, quot Philosophi, & Humanistæ?

Problema hoc indeterminatum, claritatis gratia solvemus per algebram numerosam.

Fiat itaque denominatio.

Sint Theologi $= x$, *Philosophi* $= y$, *Humanistæ* $= z$.

Erit per conditionem primã, Æquatio Prima A *hæc:*

$$x + y + z = 50$$

& *per Metathesim* $\quad x = 50 - y - z \quad$ A.

Deinde per conditionem secund. Æquatio Secunda B *erit* $\quad 8x + 6y + 2z = 240$

Per Metathesim $\quad 8x = 240 - 6y - 2z \quad$ B

& multipl. Æquat. A *per* 8, *erit* $8x = 400 - 8y - 8z \quad$ A

ergo per Axi.III.(222.) $240 - 6y - 2z = 400 - 8y - 8z$

& per Metathesim $\quad 8z - 2z = 400 - 240 + 6y - 8y$

hoc est $\quad 6z = 160 - 2y$

dividendo per 6 erit $\quad z = \frac{160 - 2y}{6}$

Cum sit Indeterminatum, assumatur arbitrarie pro litera y numerus 32, *hoc est, sint Philosophi* $y = 32$, *erunt (vi ult. formulæ) Humanistæ* $z = \frac{160 - 64}{6} = 16$, *& consequenter Theologi* $x = 2$; *nam* $32 + 16 + 2 = 50$, *quæ est conditio prima.*

Et præterea per conditionem secundam,

$$2 . 8 + 32 . 6 + 16 . 2 = 240 \text{ fl. ergo.}$$

SCHOLION I.

Dixi (§. 242.) *omne indeterminatum Problema plures solutiones admittere, hinc in nostro Problemate, substituendo pro y diversos numeros (quos sequens Tabula exhibet) solutio invenietur, quæ iisdem conditionibus satisfacit.*

TABULA

Decem variarum solutionum Problematis antecedentis.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
$x =$	2	4	6	8	10	14	16	18	20	22
$y =$	32	29	26	23	20	14	11	8	5	2
$z =$	16	17	18	19	20	22	23	24	25	26
	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Eu

Ex singulis classibus hujus Tabulæ patet, quod omne indeterminatum Problema reduci possit ad determinata Problemata complura; Sic si in nostro Problemate præter conditiones jam positas, adjiciatur Ex. gr. *etiam hæc, ut Philosophi sint duplo plures, quam Theologi, & itidem Humanistæ tot, quot Philosophi, patet ex contemplatione hujus Tab. nullam classem satisfacere his conditionibus, præter classem V. Unde colligitur, Docentibus Analysim magno subsidio esse Resolutionem Probl. indeterminatorum, cum ope horum, unica solutione campus formandi varia Problemata determinata aperiatur, quæ exercendis Tyronibus suis deserviant, Tyronibus vero via ostenditur facillima sibimetipsis fabricandi Problemata determinata, quibus se se exerceant in Analysi. Sed hæc de indeterminatis sufficiant.*

SCHOLION II.

253. *Huc revocantur omnia Problemata miscibilium, quando plura dantur miscibilia, quam duo.*

CAPUT V.

De Resolutione Æquationum Quadraticarum.

DEFINITIO V.

254. Æquatio Quadratica, seu duarum dimensionum, aut secundi ordinis, dicitur, si incognitus terminus sit Quadratus, ut si sit, $xx = ab$, vel $xx + ax = ac$.

SCHOLION.

255. *Si exponens incogniti est 3, dicitur Æquatio* Cubica, *aut trinæ dimensionis; si exponens incogniti est* 4, *quarti ordinis &c. Prætermissis Æquationibus altiorum ordinum, quarum Resolutionem Analysis sublimior pluribus pertractat, nos præfixi temporis angustiis limitibus conclusi, Regulas solvendi Æquationes duntaxat* Quadraticas *strictim exponemus. Analystæ itaque Æquationes* □ *in binas distinguendo classes, quasdam dicunt* Completas, Incompletas *alias, aut* Deficientes. Comple-

pletæ *dicuntur, in quibus nullus deficit terminus ad expressionem Quadraticam requisitus, ut si sit* $xx = ab$, *aut* $xx + 2ax + aa = bc$. Incompletæ *vocantur, si terminus tertius, (id est, quadratum partis unius radicalis) deficiat, ut si sit* $xx + 2ax = ab$, *in qua deficit terminus* aa, *ut constat ex* (§. 182.) *De utraque classe nunc brevibus.*

REGULÆ

Discernendi an data quævis Æquatio quadratica sit completa, an incompleta.

256. Reg. I. Si in Æquatione incognitus quadratus solus habeatur (seu is affectus sit cognito, seu non sit) neque præterea idem incognitus simplex in Æquatione reperiatur, hujusmodi Æquatio completa est; ut si sit $xx + ac = bd$, quia quadratum hujusmodi est monomium.

Reg. II. Si in data Æquatione præter quadratum incogniti termini, inveniatur idem incognitus simplex, affectus cognito, & præterea quadratum illius dimidii cogniti, quo incognitus simplex affectus est, Æquatio quoque *completa* erit; ut si sit $xx + 2ax + aa = bd$, in qua habetur quadratum aa factum, de $\frac{2a}{2}$ seu de a, quo affectus est secundus terminus $2ax$. Ratio hujus est, quia tale quadratum est factum ex $\sqrt{}$ binomia, $x + a$, vel $x - a$, ut constat ex (§. 182.)

Reg. III. Si verò in Æquatione deficiat hoc quadratum, de dimidio factore secundi

cundi termini, ſeu ſi deficiat tertius terminus quadrati binomii, Æquatio incompleta, erit, & deficiens, ut ſi ſit $xx + 2ax = db$, aut $xx + ax = cd$, item $xx - 6x = ac$, vel $xx + x = ab$, aut $xx + \frac{x}{3} = bc$, vel denique $xx + \frac{x}{c} = bb$. In Prima enim deficit $\square aa$, in Secunda deeſt $\square$ ex $\frac{a}{2}$ hoc eſt $\frac{aa}{4}$, in Tertia non habetur $\square$ ex $\frac{6}{2}$ ſeu de 3, quod eſt 9, in Quarta deficit $\square$ ex $\frac{1}{2}$, hoc eſt $\square \frac{1}{4}$, in Quinta deeſt $\square$ de dimidia $\frac{1}{3}$ ſeu de $\frac{1}{6}$, quod eſt $\square \frac{1}{36}$ in Sexta deficit $\square$ de dimidio $\frac{1}{c}$, ſeu de $\frac{1}{2c}$, id eſt $\square \frac{1}{4cc}$.

SCHOLION I.

257. *Ut verò Tyro Analyſta indicium certum habeat, an deficiat terminus tertius; Reducat ſibi datam Æquationem (prius tamen per Regulas Reductionis ad expreſſionem ſimpliciorem transformatam) ad Æquationem* Nihili *per Reg. X. (§. 236.) id eſt, omnes terminos tam cognitos, quam incognitos per Metatheſim, ita ad unam partem Æquationis transferat, ut incognitus quadratus evadat poſitivus, quo facto contemplando terminos, videat, an ex dimidio factore cogniti, quo incognitus ſimplex afficitur, adſit* $\square$, *vel abſit? ut ſi foret* $2ax = bc - xx - aa$, *erit reducta ad nihilum* $xx + 2ax + aa - bc = 0$, *quæ completa comparet; item ſi ſit* $xx = aa + cx$, *erit ad nihilum reducta* $xx - cx - aa = 0$, *in qua deficit* $\square$ *ex* $\frac{-c}{2}$ *ſeu* $\frac{cc}{4}$ *& ita de aliis.*

SCHOLION II.

258. *Notent Tyrones, quod si reducta ad* Nihilum *Æquatio sit hujusmodi;* $xx - 2ax - aa + bd = 0$, *hæc Æquatio non sit completa, cum* $\square - aa$, *utpote Imaginarium, produci non possit ex* $\frac{-2a}{2}$ *seu ex* $-a$, *ut constat ex* (§. 175.) *adeoque univèrsaliter, si tertium membrum adsit, sed affectum signo* $-$, *id non pertinere cognoscitur ad expressionem quadraticam; adeoque illam deficientem esse; Nam si pertineret, tum quidem effici poterit positivum per translationem Metatheseos, sed tum iterum incognitus quadratus evadet imaginarius, quotiescunque autem incognitus evadit imaginarius, aut ejus Radix negativa, indicat, aut quæstionem, ex qua emersit hujusmodi Æquatio, esse impossibilem, aut ab Analysta non recte conceptam, & denominatam, aut etiam errorem in Reductione admissum, intelligendo, si quæstio in numeros resolvenda sit.*

REGULÆ

Reducendi Æquationem Quadraticam incompletam, item affectam signo $\surd$.

259. Reg. I. Reducta Æquatione ad nihilum, transferantur iterum termini per Metathesim ad alteram partem Æquationis, remanentibus duobus terminis affectis incognito; ut si sit $xx + ax - b = 0$, erit $xx + ax = b$, quo facto, addatur utrique parti $\square$ de dimidio factore termini ax, qui est $\frac{a}{2}$, seu $\square \frac{aa}{4}$, erit Æquatio completa $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$, deinde extrahatur $\sqrt[2]{}$ ex parte utraque, erit $x + \frac{a}{2} = (\surd b + \frac{aa}{4})$ & per Metathesim transferendo $+ \frac{a}{2}$, erit

$x =$

$x = (\sqrt{b} + \frac{aa}{4}) - \frac{a}{2}$, quæ eſt Æquatio Reſolutoria. Idem eſt de aliis in Reg. III. (§. 256.) adductis.

SCHOLION I.

260. *Meminiſſe velim Tyrones, dum ex* $\square$ *incognito jam per ſupra datas Regulas completo,* $\sqrt[2]{}$ *extrahitur, toties partem radicis cognitæ eſſe negativam, quoties ſecundus terminus negativus eſt, ut ſi extrahatur* $\sqrt[2]{}$ *ex hac Æquatione jam completa* $xx - ax + \frac{aa}{4} = bd + \frac{aa}{4}$, *erit* $x - \frac{a}{2} = (\sqrt{bd} + \frac{aa}{4})$ *&* *non* $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{bd} + \frac{aa}{4})$

SCHOLION II.

261. *Si ſit Æquatio completa, Reductio immediate per extractionem radicis obtinetur, ut ſi ſit* $xx = ab$, *erit Reducta* $x = \sqrt{ab}$, *item ſit* $xx - 2ax + aa = bc$, *erit extracta radice* $x - a = \sqrt{bc}$, *& per Metatheſim* $x = (\sqrt{bc}) + a$. *Notent Tyrones, quantitates notas ex altera parte Æquationis comparentes, quibus ſignum* $\sqrt{}$ *præfigitur, includendas eſſe parentheſi prius, antequam tranſlatio termini cogniti ex parte termini incogniti fiat ad alteram partem, ne terminus cognitus hoc modo, poſt extractionem radicis tranſlatus, afficiatur ſigno* $\sqrt{}$.

262. Reg. II. Quemadmodum ad reſolvenda Problemata $\square$, utimur extractione $\sqrt{}$, ita ſi occurrat Æquatio, cujus incognitus affectus eſt $\sqrt[2]{}$ tota Æquatio elevari debet, ad potentiam ſecundam, ſeu ad $\square$. ut ſi foret $\sqrt{x} = a + b$, elevando utramque partem ad $\square$. erit $x = aa + 2ab + bb$. Item ſi ſit $\sqrt{ax} = b$, erit $ax = bb$, & dividendo per a, erit $x = \frac{bb}{a}$.

Sed

Sed enim hasce praxes jugis Resolutionum exercitatio faciliores reddet. Itaque

PROBLEMA I.

Manlius miles cum ſociis quibusdam è pugna redux, interrogatus à *Marco Piſone*, quotnam hoſtium ſua ſtraviſſet manu? mea inquit, meorumque ſociorum manu fortiſſima, cæſa hoſtium capita jacent 1296, id vero memoria digniſſimum, quod ſinguli noſtrum tot ſtraverimus hoſtes, quot nunc ſocii ſumus. *Quæritur quot fuerint una cum Manlio milites? & quotnam hoſtes ſinguli ſtraverint?*

Diſcuſſis ritè conditionibus fiat denominatio.

Sit ſumma cæſorum hoſtium $1296 = a$

Socii milites una cum Manlio $= x$

Igitur cum ſinguli tot ſtraverint hoſtes, quot fuerint ſocii, erit quoque numerus hoſtium à ſingulis ſeorſim cæſorum $= x$

Ergo ſimul omnes ſtraverunt ex hoſtibus ſummam xx *itaque Æquatio* $xx = a$

& extrahendo $\sqrt[2]{\ }$ *erit* $x = \sqrt{a} = \sqrt{1296} = 36$ *fuerunt ergo cum Manlio ſocii* 36, *& ſinguli ſtraverunt ex hoſtibus etiam* 36.

PROBLEMA II.

Iſidorus Colonus Medienſis à deſignatis fundorum conſcribendorum Quæſtoribus interrogatus, quotnam tritici metretas annis ſingulis ſuo in agro ſeminaret? reſpondit:

dit: Ego ſex metretas plures ad conſerendum agellum meum in ſementem annis ſingulis ſpargo, quam *Andreas* germanus meus Colonus Marburgenſis, quæ meæ metretæ, ſi ita DEO largiente multiplicarentur, ut ſingulæ tot producerent metretas, quot *Andreas* ſingulis annis inſementem ſpargit, inferrem annis ſingulis horreo meo metretas tritici 720.

Quæritur quot Andreas, quotque Iſidorus metretas annis ſingulis in ſementem ſpargant.

Diſcuſſis rite conditionibus, fiat denominatio;

Sint itaque metretæ $6 = a$, *metretæ* $720 = b$
ſint metretæ quas ſeminat Andreas $= x$
ergo Iſidorus *ſeminat annis ſingul.* $= x + a$

Jam per conditionem Problematis
erit $(x + a) \cdot x = b$
hoc eſt $xx + ax = b$.

Igitur complendo quadratum per Reg. I. (§. 259.)
hoc eſt

Add. utrique parti $\square \frac{aa}{4}$, *erit* $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$

Et extrahendo $\sqrt[2]{}$ *erit* $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{b + \frac{aa}{4}})$

& per Metathesim $x = (\sqrt{b + \frac{aa}{4}}) - \frac{a}{2}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$x = (\sqrt{720 + \frac{36}{4}}) - \frac{6}{2}$,

hoc eſt $x = (\sqrt{729}) - 3 = 27 - 3 = 24$

CAPUT I.

De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica.

DEFINITIO I.

264. *Ratio*, dicitur duarum quantitatum homogenearum comparatio, vel relatio, aut respectus ad invicem. Hujusmodi comparatio, sive *Ratio* duplex est, *Ratio* nempe *Arithmetica*, & *Ratio Geometrica*.

DEFINITIO II.

265. *Ratio Arithmetica*, dicitur comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad *excessum*, vel *defectum*; ut si comparentur inter se numeri; 4 & 12, quot nempe unitatibus minor sit numerus 4, quam 12, aut numerus 12 major, quam 4. *Excessus* hic, vel *defectus*, vocatur *Differentia*; sic excessus numeri 12 supra 4, qui est 8, vocatur *Differentia*; innotescit hæc differentia per subtractionem.

HYPOTHESIS I.

266. Ratio Arithmetica *designatur*, *vel exprimitur ita:* $a \overset{d}{,} b$, *vel* $4 \overset{8}{,} 12$, *id est inter quantitates comparatas ponendo* (,) *&* differentiam *locando supra comma*, *vel etiam* $a \overset{d}{—} b$.

DEFINITIO III.

267. *Ratio Geometrica*, est comparatio duarum quantitatum homogenearum,

quoad

quoad quotitatem; ut ſi conſideremus duos numeros, *Ex.gr.* 12 & 4, quoties nempe 12 contineat numerum 4; vel quoties numerus 4 contineatur in 12, quæ quotitas per diviſionem innoteſcit; Quotus vero, qui indicat quoties una quantitas alteram continet, vel in ea continetur, appellatur *Exponens*, vel *Nomen Rationis*, ut in dato Exemplo foret numerus 3.

HYPOTHESIS II.

268. *Ratio Geometrica rectè exprimitur per Hypotheſim* Diviſionis (§.30.) *traditam, ut* $a \overset{m}{:} b$, *aut* $12 \overset{3}{:} 4$, *in qua* exponens *Rationis, ſeu quotus* m *locatur ſuper duo puncta.*

SCHOLION.

269. *Rationem Geometricam recte exprimi per hanc Hypotheſim, patet ex definitione Rationis Geometricæ (§.267.) unde liquet eam etiam recte ſic exprimi* $\frac{a}{b}$ *vel* $\frac{12}{4}$. *Sed modo priore uſitatius.*

DEFINITIO IV.

270. Quantitates, quæ comparantur, (tam in Ratione Arithm. quam Geometr.) vocantur *Termini*; & quidem terminus primus, qui comparatur, ſeu ſiniſtram tenens, vocatur *Antecedens*; ſecundus, vocatur *Conſequens*: ſic in hac Ratione $a:b$, *Antecedens* eſt a, *Conſequens* vero b.

DE-

DEFINITIO V.

271. *Ratio* Geometrica *Majoritatis*, vel *Multipla*, dicitur, quando Antecedens eſt major ſuo conſequente, ut ſi ſit $12\overset{3}{:}4$ & in ſpecie: *Dupla*, ſi exponens eſt 2, *Tripla*, ſi exponens 3 &c. *Ratio* verò *Minoritatis*, vel *Submultipla* appellatur, dum Antecedens eſt minor ſuo conſequente, ut ſi ſit 4 : 12, in hac exponens ſemper eſt fractus. *Ratio* denique *Æqualitatis* eſt, quando Antecedens eſt æqualis ſuo conſequenti, ut 4 : 4, *hæc poſtrema peculiarem conſiderationem non habet in doctrina proportionum.*

COROLLARIUM.

272. Quoniam Ratio Geometrica eſt comparatio quoad quotitatem, (§. 267.) ſequitur in omni Ratione Geometrica Antecedens eſſe *dividendum*, conſequens *diviſorem*, & exponentem Rationis, *Quotum*; unde conſequitur (cum expreſſio fractionum ſit expreſſio diviſionis, & hæc ſit expreſſio Rationis Geometricæ) quod omnis fractio vera ſit Ratio Geometrica *Minoritatis*, in qua *Numerator* eſt Antecedens, & *Denominator* conſequens, Nam $\frac{4}{12}$, idem eſt ac 4 : 12. Præterea quod omnis fractio ſpuria ſit Ratio Geometrica *Majoritatis*, aut ſaltem *Æqualitatis*, ut ſi ſit $\frac{12}{4}$, quod idem eſt ac 12 : 4.

SCHOLION.

273. *Pro diverſitate* Exponentium *Rationes Geometricæ variæ ſortiuntur denominationes, & quidem in*

Ra-

Ratione Majoritatis, *I. si exponens est* $1\frac{1}{2}$ *dicitur*; Sesqui altera, *ut* 3 : 2. *Si exponens est* $1\frac{1}{3}$, *dicitur* sesqui tertia, *ut* 4 : 3 *&c. quæ denominationes naturam denominatorum sequuntur, cum addito* sesqui. *Ut* sesqui quarta, *si* $1\frac{1}{4}$, sesqui quinta *si* $1\frac{1}{5}$ *&c. II Si exponens sit unitas, cum fractione habente* numeratorem maiorem unitate; *dicitur* superpartiens; *ut si sit exponens* $1\frac{2}{3}$, *erit* superbipartiens tertias, *ut in hac* 5 : 3. *Si exponens sit* $1\frac{3}{4}$ supertripartiens quartas *&c. Eædem denominationes manent in Ratione* Minoritatis *respectu exponentium, præfigendo particulam* Sub, *ut* 4 : 8, *cujus exponens est* $\frac{4}{8}$, *seu* $\frac{1}{2}$ *dicitur* Subsesqui altera. *Sed hæc, ut ad doctrinam proportionum nihil faciunt, ita solius notitiæ causa adnotâsse sufficiat.*

DEFINITIO VI.

274. Rationes Geometricæ *Æquales* dicuntur, si eosdem habeant exponentes, & vicissim. Sic $\overset{m}{a : b}$, & $\overset{m}{c : d}$, item $\overset{4}{8 : 2}$, & $\overset{4}{12 : 3}$ Æquales sunt; è contra *Major* dicitur *Ratio*, quæ exponentem habet majorem, ut $\overset{3}{6 : 2} > \overset{2}{8 : 4}$, *Minor* verò cujus exponens minor est; ut $\overset{2}{8 : 4} < \overset{3}{6 : 2}$.

SCHOLION.

275. *Eodem modo Rationes Arithmeticæ Æquales, vel Majores, aut Minores dicuntur relate ad differentiam rationum, sic* $\overset{4}{3 , 7} = \overset{4}{2 , 6}$, *item* $\overset{5}{3 , 8} > \overset{3}{4 , 7}$ *&* $\overset{3}{4 , 7} < \overset{5}{3 , 8}$.

THE-

THEOREMA I. FUNDAMENTALE.

276. PROP. *In omni Ratione Geometrica Productum ex termino* consequente *in* exponentem, *æquale est termino* antecedenti, *ut si sit* $\overset{m}{a:b}$, *dico*; $mb = a$.

DEMONSTRATIO.

In omni Ratione Geometrica Antecedens est *dividendus*, consequens *divisor*, & exponens est *Quotus*, per (§. 272.) sed factum ex *divisore* in *Quotum* æquatur *dividendo* per (§.61. Arith.) ergo. Q.E.D.

COROLLARIUM.

277. Hinc per Axioma III. (§. 222.) loco *Antecedentis*, semper substitui potest *Consequens* multiplicatus per *Exponentem*. Sic loco $\overset{m}{a:b}$, scribi potest $mb:b$. Nam $\frac{mb}{b}$ dat quotum m, quod ipsum numeri pro literis substituti declarant, sic $6:3$, idem est ac $3 . 2 : 3$, nam $3 . 2 = 6$.

THEOREMA II. FUNDAMENTALE.

278. PROP. *In Ratione Arithmetica Summa ex termino* Minore, *&* Differentia *est æqualis termino* Majori, ut si sit $\overset{d}{a,b}$ *vel* $\overset{3}{4,7}$, *erit* $b + d = a$, *aut* $4 + 3 = 7$.

Demonstratio petitur ex (§ 43. Arith.)

THEOREMA III.

179. PROP. *Duæ Quantitates, habentes eandem Rationem ad unam tertiam, æquales sunt, & vicissim.* DE-

DEMONSTRATIO.

Sint quantitates a, & d, quæ ad eandem b dicant eandem Rationem, erunt itaque $a \overset{m}{:} b$, & $d \overset{m}{:} b$, dico esse, $a = d$. Nam $a = mb$, & $d = mb$ per (§. 276.) ergo per (§. 222.) $a = d$. Q. E. D.

CAPUT II.

De Proportione Geometrica.

DEFINITIO VII.

280. *Proportio* est duarum Rationum *Æqualitas*; & in specie, *Proportio Geometrica* est duarum Rationum *eosdem* exponentes habentium *Æqualitas*, ut si sit $a \overset{m}{:} b$, & $c \overset{m}{:} d$, item $8 \overset{2}{:} 4$, & $6 \overset{2}{:} 3$. *Proportio Arithmetica* est duarum Rationum eandem *differentiam* habentium *Æqualitas*, ut si sit $a \overset{d}{,} b$, & $c \overset{d}{,} f$, aut $5 \overset{2}{,} 3$, & $7 \overset{2}{,} 9$.

COROLLARIUM.

Omnis itaque Proportio quatuor terminis constat. *Et hinc rectè exprimitur per sequentem hypothesim.*

HYPOTHESIS III.

281. Proportio Geometrica *sic exprimitur*, $a:b = c:d$, *vel* $8:4::6:3$, *&* *enunciatur*; a *est ad* b, *sicut* c *est ad* d, aut *sicut* a *se habet ad* b, *ita* c *se habet ad* d; Arithmetica *sic exprimitur*; $a, b = c, f$, aut $3, 5 = 7, 9$.

SCHOLION.

283. *Dilata tantiſper doctrina* Proportionis Arithmeticæ, *quæ habita ſcientia Proportionis Geometricæ facilius intelligitur, hoc capite ſolius Proportionis Geometricæ doctrinam proponemus.*

DEFINITIO VII.

284. *Proportio continua* dicitur, dum terminus *Conſequens* Rationis primæ eſt terminus *Antecedens* ſecundæ; ut $a:b = b:c$, vel $8:4 = 4:2$. *Diſcreta* appellatur, dum Rationum Antecedentes diverſi ſunt, ut $a:b = c:d$, vel $8:4 = 6:3$.

HYPOTHESIS IV.

285. Proportio continua *exprimitur ita;* a.b.c, *vel etiam præfixo ſigno* $\div$ (§. 38.) *ut* $\div$a.b.c.d. *&c. enunciatur;* a *eſt ad* b, *ſicut* b *eſt ad* c, *&* b *eſt ad* c, *ſicut* c *eſt ad* d &c.

THEOREMA IV. FUNDAMENTALE.

286. PROP. *In omni Proportione Geometrica, factum Extremorum* (id eſt termini primi cum ultimo) *eſt æquale facto Mediorum* (*ſeu* ſecundi cum tertio.) *Nempe ſi ſit*, $a:b = c:d$, *erit* $ad = bc$.

DEMONSTRATIO.

Exprimatur cum exponentibus, ut ſit $\overset{m}{a}:b = \overset{m}{c}:d$, & per (§. 277.) ſubſtituendo *mb* loco *a*, & *md* loco *c*, erit eadem pro-

por-

portio, $mb:b = md:d$, sed in hac factum extremorum est $mb.d$, & factum mediorum est $b.md$, hoc est $mbd = mbd$. Ergo etiam $ad = bc$ per (§.221.) Q. E. D. *Aliter*: cum sit $a = mb$, & $c = md$ per (§. 276.) substituantur hi valores in Æquatione $ad = bc$, & habebitur $mbd = mdb$. Q. E. D. *Declaratur*: sit $8:4 = 6:3$, erit $8.3 = 4.6$, id est $24 = 24$.

SCHOLION.

287. *Hoc Theorema esse basim reliquorum fere omnium Theorematum, ac Problematum Proportionis, præcipiumque fundamentum inveniendarum primarum Æquationum Analyticarum Tyrones nosse volo. Ex hoc enim præter cætera (ope Analysis) sequentia Tria utilissima, Problemata reperta sunt. Primum est celeberrima illa Regula* Trium, *quæ etiam ob summam utilitatem, maximumque in scientiis, vitæque humanæ commercio usum, merito nomen obtinuit* Regulæ Aureæ; *de qua Cap. V.* Secundum Problema *non minus utile est;* datis duobus terminis invenire Tertium, *Et denique* III. Problema *est*, datis duobus invenire medium. *Itaque*

PROBLEMA I.

288. PROP. *Datis tribus terminis invenire quartum proportionalem; seu invenire Regulam auream.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Secundus* $= b$, *Tertius* $= c$, *Quartus quæsitus* $= x$, *erit proportio*: $a:b = c:x$, & *per Theor. Antecedens* $ax = bc$, & *per Reg. IV.* (§. 236.) *dividendo utramque partem per* a, *habebitur* $x = \frac{bc}{a}$, *quæ ultima Æquatio, utpote Resolutoria, hoc Problema eloquitur.* Quartus x, est æqualis facto ex termino se-

 cundo

cundo *b*, in Tertium *c*, & diviso per Primum *a*; *id est*: Si vis invenire quartum Proportionalem, multiplica secundum cum tertio, & factum divide per Primum, Quotus erit quartus Proportionalis; *quæ verba sunt ipsissima, quibus Arithmetici regulam auream edocent, à quibus, si quæras, cur non Primus cum Tertio multiplicari debeat, & dividi per Secundum; hanc rationem rogando actum ages, nî Analysim edocti sint, cui regulas suas* Arithmetica *repertas, demonstrataque debet.*

Notandum: *Cum sit quartus* $x = \frac{bc}{a}$ *semper loco termini* quarti *substitui potest per* (§.222.) tertius *multiplicatus per* secundum, *& divisus per* primum, *eritque proportio* $a : b = c : \frac{bc}{a}$

PROBLEMA II.

289. PROP. *Datis duobus terminis invenire Tertium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Secundus* $= b$, *& Tertius quæsitus* $= x$, *erit proportio*; $a : b = b : x$, *& per Theor* (§.286.) $ax = bb$, *& per Reg. IV.* (§. 236.) $x = \frac{bb}{a}$, *hoc est*: Quadratum *termini* Secundi *dividatur per* Primum, *quotus erit* Tertius *quæsitus*, *ut si sit* $2 : 4 = 4 : x$, *erit* $2x = 16$, *&* $x = \frac{16}{2} = 8$: *id est* $2 : 4 = 4 : 8$.

PROBLEMA III.

290. PROP. *Datis terminis duobus invenire medium continue proportionalem.*

RESOLUTIO.

Sit Primus $= a$, *Tertius* $= b$, *Medius* $= x$, *erit proportio*, $a : x = x : b$, *& per Theor.* (§.286.) $xx = ab$, *& extrahendo* $\sqrt{}$ *per Reg. VII.* (§.236.) *erit* $x = \sqrt[2]{ab}$, *hoc est*: ex facto termini Primi in Tertium extrahatur radix quadrata, erit hæc medius proportionalis, *ut si sit, quærendus inter numerum 2 & 8, medius, erit* $2 : x = x : 8$, *hoc est* $xx = 16$, *&* $x = \sqrt{16} = 4$, *est ergo* $2 : 4 = 4 : 8$.

THE-

THEOREMA V. FUNDAMENTALE.

291. PROP. *Si factum extremorum est æquale facto mediorum, factores erunt reciprocè proportionales; ut si sit* ad = bc, *erit* a : b = c : d, *hoc est, si in producto* ad, *assumatur factor* a, *(arbitrariè) pro* primo *termino proportionis, tunc ejusdem producti* ad, *alter factor* d *poni debet pro* quarto; *factores verò alterius producti* bc, *nempe* b *&* c *poni debent loco medio.*

Hæc Propositio (utpote conversa Theorematis IV.) nova Demonstratione non eget.

COROLLARIUM I.

292. Duorum itaque productorum æqualium factores solvi possunt in proportionem reciprocam, eamque variam, ut si detur $abc = dgf$, erit proportio reciproca, $a : f = dg : bc$, vel $a : gf = d : bc$, aut $a : df = g : bc$ &c. quæ resolutio insignem usum habet in Analysi ad inveniendа Theoremata.

COROLLARIUM II.

293. Quoniam factores in proportionem reciprocam varie disponi possunt, sequitur varias inde enasci terminorum transpositiones manente proportione; manent autem termini proportionales, si eorum factum extremorum sit æquale facto mediorum per (§. 256.) hinc, ut in subjecta Tabula (exhibente variam terminorum transpositionem proportionalem) demonstretur factum extremorum esse æquale facto mediorum, nullo alio medio opus est, quam, ut (per Theorema I. §. 276.) loco literæ a, ponatur mb, & loco literæ c substituatur md. Sit itaque

	Algebraicè.		*Numericè.*
	$ad = bc$		$8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$
erit	$a : b = c : d$		$8 : 4 = 6 : 3$
Alternando	$a : c = b : d$	*seu permu-*	$8 : 6 = 4 : 3$
Invertendo	$c : a = d : b$	*tando*	$6 : 8 = 3 : 4$
Iterum Altern.	$c : d = a : b$		$6 : 3 = 8 : 4$

Item Algebraicè.

Sit	$a : b = c : d$
Dividendo	$a - b : b = c - d : d$
Componendo	$a + b : b = c + d : d$
Convertendo	$a : a - b = c : c - d$
Mixtim	$a + b : a - b = c + d : c - d$
Item	$a + c : b + d = a : b$
Aut	$a - c : b - d = a : b$

Item Numericè.

Sit	$8 : 4 = 6 : 3$
Dividendo	$8 - 4 : 4 = 6 - 3 : 3$
Componendo	$8 + 4 : 4 = 6 + 3 : 3$
Convertendo	$8 : 8 - 4 = 6 : 6 - 3$
Mixtim	$8 + 4 : 8 - 4 = 6 + 3 : 6 - 3$
Item	$8 + 6 : 4 + 3 = 8 : 4$
Aut	$8 - 6 : 4 - 3 = 8 : 4$

Quæ omnes proportiones iterum *Alternando*, & *Invertendo* &c. varie permutari possunt, adeo, ut hæc exigua Tabella octo insignia Theoremata complectatur.

SCHOLION.

294. *Quemadmodum Theorema IV. unicum fere est fundamentum omnium proportionum, harumque ope reperiendarum primarum Æquationum per Synthesim, ita Theorema V.* locus communis *habetur inveniendorum Theorematum, ac Problematum per Analysim, ut ostensum, & suo loco plura dicentur.*

THE-

THEOREMA VI.

295. PROP. *Quæ ſunt proportionalia uni Tertio, ſunt etiam proportionalia inter ſe, ut ſi ſit* a:b = c:d,

& e:f = c:d, *erit etiam* a:b = e:f.

Demonſtratio patet ex (§. 286.) & numeris ſubſtitutis declaratur.

THEOREMA VII.

296. PROP. *Si quatuor termini proportionales, multiplicentur per alios quatuor ipſis correſpondentes proportionales, facta erunt proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Sit $\overset{m}{a : b} = \overset{m}{c : d}$

& $\overset{n}{e : f} = \overset{n}{e : b}$, dico fore $ae : bf = cg : db$, nam ſubſtituendo per (§.277.) loco antecedentium, conſequentes per exponentes multiplicatos, erit: $mbnf : bf = mdnb : db$, in qua factum extremorum æquale facto mediorum per (§. 286.) ergo. Idem in numeris patet.

COROLLARIUM.

297. Hinc ſi *Radices* ſunt proportionales, erunt etiam proportionales, earundem *Quadrata*, *Cubi*, &c. ſeu univerſaliter, earundem poteſtates quæcunque ſimiles.

THEOREMA VIII.

298. PROP. *Si quatuor Termini proportionales dividantur per alios ipſis cor-*

respondentes proportionales, quoti erunt proportionales.

DEMONSTRATIO.

Sit $ae:bf = cg:dh$

& divis. $\overline{e}:\overline{f} = \overline{g}:\overline{h}$, erit $a:b = c:d$, ut patet.

COROLLARIUM.

299. Quadratorum, Cuborum, & universim potestatum similium radices similes, sunt proportionales.

THEOREMA IX.

300. PROP. Rationes *Æquemultiplæ*, (*hoc est* per eandem quantitatem multiplicatæ) *item* Rationes *Submultiplæ* (*seu* per eandem quantitatem divisæ) *sunt*, *ut* simplæ, *hoc est*, *simplis proportionales.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit $a:b$, cujus tam antecedens, quam consequens multiplicetur per d, dico fore $ad:bd = a:b$. Nam per (§.286.) $abd = abd$. Quod erat primum.

II. Sit $ad:bd$, & dividatur uterque terminus per d, erit $\frac{ad}{d}:\frac{bd}{d} = a:b$, ut patet ex (§. 35.) idem est in numeris.

Nam sit $6:3$, & multiplicentur per 4, erit $24:12 = 6:3$, item dividantur $24:12$, per 3, erit $8:4 = 6:3$.

THE-

THEOREMA X.

301. PROP. *Si ſint duæ proportiones, in quibus (ſibi invicem ſubſcriptis) lineæ ad inæquales quantitates ductæ, ſunt* Æquediſtantes *ſeu parallelæ, erunt hæ quantitates proportionales ex* Æquo.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b = c:d$

Secunda $b:f = d:g$, dico fore $a:f = c:g$
nam alternando utramque.
erit Prima $a:c = b:d$
Secunda $b:d = f:g$, ergo per (§.295.)
$a:c = f:g$, ſeu altern. $a:f = c:g$. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6 = 8:4$

$6:3 = 4:2$, erit $12:3 = 8:2$, ut patet ex (§.286.)

THEOREMA XI.

302. PROP. *Si in duabus proportionibus ſibi invicem ſubſcriptis, lineæ ad inæquales quantitates ductæ, ſint* Convergentes, *erunt hæ quantitates proportionales* ex Æquo perturbato.

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $a:b = c:d$

& *Secunda* $b:f = g:c$, dico fore, $a:f = g:d$, nam in Prima $ad = bc$, & in Secunda $bc = fg$, per (§. 286.) ergo per (§.221.) $ad = fg$, ſed hæc reſolvitur in hanc $a:f = g:d$ per (§. 291.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit 12:6 = 8:4

& 6:3 = 16:8, erit 12:3 = 16:4, ut patet ex (§ 286.)

THEOREMA XII.

303. PROP. *Si in duabus proportionibus* Primi Antecedentes, *&* Ultimi Conſequentes, *vel viciſſim, æquales ſunt, erunt reliqui termini* reciproce *proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b = c:d$

$a:f = g:d$, dico fore $b:f = g:c$. Demonſtratio eadem, quæ Theorematis prioris.

IN NUMERIS.

Sit 12:6 = 8:4

12:3 = 16:4, erit 6:3 = 16:8, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XIII.

304. PROP. *Si in duabus proportionibus* bini antecedentes, *vel* bini conſequentes, *æquales ſunt, erunt reliqui termini proportionales.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sit $\left.\begin{array}{l} a:b = c:d \\ a:f = c:g \end{array}\right\}$ erunt altern. $\left\{\begin{array}{l} a:c = b:d \\ a:c = f:g \end{array}\right.$

ergo per (§. 295.) $b:d = f:g$. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6 = 16:8$

$12:3 = 16:4$, erit $6:8 = 3:4$, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XIV.

305. PROP. *Si ſint quotcunque termini proportionales, erit ſumma* omnium Antecedentium, *ad ſummam* omnium conſequentium, *ut quivis* antecedens *ad ſuum* conſequentem.

DEMONSTRATIO.

Sit $\overset{m}{a:b}$ & $\overset{m}{c:d}$ & $\overset{m}{f:g}$ erit $a+c+f : b+d+g = a:b$, ſubſtituendo loco $a+c+f$, eorundem valores per (§. 277) erit $mb+md+mg : b+d+g = mb:b$, ſed in hac per (§. 286.) eſt
$$mbb+mdb+mgb = mbb+mbd+mbg.$$
ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit $\left.\begin{array}{l} 12:6 \\ 16:8 \\ 4:2 \end{array}\right\}$ erit $12+16+4 : 6+8+2 = 12:6$ hoc eſt, $32:16 = 12:6$, ut patet ex (§. 286.)

SCHO-

SCHOLION.

306. *Quæ hucusque dicta sunt, pertinent ad proportiones ortas ex rationibus simplicibus, supersunt quædam in compendio referenda de Rationibus compositis, & harum proportionibus, ac progressionibus, de quibus tamen pluribus in Geometria tractabitur. Itaque,*

CAPUT III.

De Ratione Composita, & Progressione, Geometrica continua.

DEFINITIO VIII.

307. *Ratio Composita* dicitur comparatio *Producti* ex antecedentibus duarum, vel plurium Rationum simplicium orti, cum *Producto* ex consequentibus earundem Rationum facto; ut si sint duæ Rationes simplices $a:b$ & $f:g$, erit productum ex antecedentibus af, productum ex consequentibus bg, & hinc *Ratio Composita* $af:bg$. Idem est in numeris.

THEOREMA XV.

308. PROP. *Exponens Rationis Compositæ est* Productum *omnium exponentium, quæ datam rationem compositam constituunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit *Prima* $\overset{m}{a}:b$ $\Big\{$ erit ratio composita $\overset{mn}{af}:bg$
& *Secunda* $\overset{n}{f}:g$ cujus exponens mn.

Nam substituendo per (§.277.) mb loco a & ng loco f, erit Ratio composita eadem

$mnbg$:

mnbg:bg, ſed hujus exponens eſt *mn*, utpote quotus per (§.267.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit $\left.\begin{array}{l} 8 \overset{4}{:} 2 \\ 10 \overset{2}{:} 5 \end{array}\right\{$ erit Compoſita 8.10 : 5.2, hoc eſt 80:10, cujus exponens eſt 8 = 4.2.

COROLLARIUM I.

309. Hinc I. In Ratione compoſita, orta ex duabus Rationibus ſimplicibus *æqualibus* (hoc eſt, habentibus eundem exponentem) Exponens ſemper eſt quadratum exponentis ſimplicis, ut ſi ſit compoſita $\overset{mm}{ac:bd}$ orta ex duabus Rationibus $\overset{m}{a:b}$ & $\overset{m}{c:d}$, habentibus eundem exponentem *m*, erit *mm*, vel m^2, exponens compoſitæ *ac:bd*; qui exponens *mm*, eſt *Quadratus* de *m* rationis ſimplicis $\overset{m}{a:b}$; & hinc hujusmodi Ratio compoſita, vocatur *Ratio Quadratica*, aut *Duplicata* (*NB*. non dupla) diciturque Antecedens Rationis hujusmodi. *Ex. gr.* Antecedens *ac*, dicere ad conſequentem ſuum *bd* rationem *duplicatam*, aut *quadraticam*, Antecedentis ſimplicis *a*, ad conſequentem ſuum *b*, hoc eſt, ut *aa:bb*. II. Eodem modo Exponens rationis compoſitæ, ortæ ex tribus Rationibus ſimplicibus æqualibus, eſt *Cubus* exponentis ſimplicis, diciturque *Ratio Triplicata*, (non *Tripla*) & Antecedens rationis hujus compoſitæ ad ſuum conſequentem dicitur eſſe in *Ratione Triplicata* Antecedentis ſimplicis ad ſuum Conſequentem. Eodem modo intelligenda eſt *Ratio quadruplicata* &c.

CO-

COROLLARIUM II.

310. Quoniam in proportione Geometrica continua idem omnium Rationum exponens est, per (§.284.) sequitur, quod *primus sit ad tertium in Ratione duplicata seu quadratica primi ad secundum*, seu, ut *quadratum Primi, ad quadrat. Secundi.* Sic si sit $\div a \overset{m}{.} b \overset{m}{.} c$ &c. erit $a : c = aa : bb$, nam $a : c = ab : bc$ per (§. 300.), sed in hac substituendo per (§.277.) mb loco a, & mc loco b, erit $mmc : c = mmcb : bc$, in qua exponens est mm, sed etiam $aa : bb$ habet exponentem mm, nam substituendo mb loco a, erit $mmbb : bb$. ergo. II. Ex eodem ratiocinio clarum est, quod *primus sit ad quartum in ratione triplicata primi ad secundum*, sit $a . b . c . d$. &c. erit $a : d = aaa : bbb$. seu, ut *cubus primi ad cubum secundi*. Idem clarum fit in Numeris, sit enim $\div 2 \overset{2}{.} 4 \overset{2}{.} 8 \overset{2}{.} 16$. &c. erit terminus primus 2 ad tertium 8, hoc est $2 : 8$ in ratione *duplicata* primi 2 ad secundum 4, seu $2 : 4$, hoc est $2.2 : 4.4$, id est $4 : 16$ nam $2 : 8 = 4 : 16$, ut patet per (§. 286.) & hinc universaliter: *Potentiæ sunt in tantuplicata ratione radicis, seu laterum, quot unitates habet exponens data potentiæ.* Sed hæc viva voce docentis clariora reddentur.

SCHOLION.

311. *Tyrones Theorema hoc cum suis corollariis probe velim memoria retineant, utpote quæ per omnem Geometriam, & Philosophiam naturalem identidem usurpanda veniunt.*

DEFINITIO IX.

312. *Progressio* dicitur certa series quantitatum continue proportionalium, ut $\div 1 \overset{3}{.} 3 \overset{3}{.} 9 \overset{3}{.} 27 \overset{3}{.} 81 \overset{3}{.} 243$ &c.

SCHO-

SCHOLION I.

313. *In specie, si series continua sint termini arithmetice proportionales* (§.280.) *dicitur* Progressio Arithmetica, *ut*

  2 2 2 2 2

1, 3, 5, 7, 9, 11 *&c. ad hanc revocantur I. Progressio numerorum naturalium*, 1,2,3,4,5,6, *&c. Item Progressio figuratorum quorundam, ut*

 3 4 5 6

3, 6, 10, 15, 21, *quorum differentiæ sunt numeri naturales. II.* Progressio *dicitur* Geometrica, *si termini sint continue Geometrice proportionales, ut* ÷

 2 2 2 2 2

1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32. *&c. Progressiones cumprimis Arithmeticæ, & Geometricæ sunt vel* crescentes, *vel* decrescentes. Crescentes *dicuntur si termini crescant; ut* 1 . 2 . 4 . 8 . 16 *&c.* decrescentes, *si termini decrescant, ut* ÷ $32 . 16 . 8 . 4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$ *&c.*

SCHOLION II.

314. *Quoniam nobis hic de Progressione Geometrica agendum, multum juvabit, Tyronibus expressionem universalem per literas ob oculos ponere, quarum formularum contemplatione sola condiscimus, quæ fuse cæteroquin demonstranda forent. Sint itaque termini Progressionis Geometricæ crescentis sub exponente* m,

 m m m m m

Ex. gr. ÷ a . b . c . d . e . f *&c. patet eam per substitutionem exponentium juxta* (§. 277.) *recte sic exprimi* ÷ $a . m^1a . m^2a . m^3a . m^4a . m^5a$ *&c. nam cum sit crescens erit* $b = ma$, *&* $c = mb = mma$, *seu* m^2a, *&* $d = mc = mmma$, *seu* m^3a, *&* $e = md = m^4a$, *&* $f = me = m^5a$ *&c. idem patet in decrescente. Hinc omnes Progressiones Geometricæ per sequentes binas classes recte designantur.*

TABULA PROGRESSIONUM GEOMETRICARUM.

Num. termin.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Crescens	÷ a .	m^1a .	m^2a .	m^3a .	m^4a .	m^5a .	m^6a.	*&c.*
Decrescens	÷ a .	$\frac{a}{m^1}$.	$\frac{a}{m^2}$.	$\frac{a}{m^3}$.	$\frac{a}{m^4}$.	$\frac{a}{m^5}$.	$\frac{a}{m^6}$.	*&c.*

In

IN NUMERIS.

		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
Crescens	∺	1 .	2 .	4 .	8 .	16 .	32 .	64	&c.
per Expon.	∺	1 .	2^1 .	2^2 .	2^3 .	2^4 .	2^5 .	2^6	&c.
Decrescens	∺	$\frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2^1}$.	$\frac{64}{2^2}$.	$\frac{64}{2^3}$.	$\frac{64}{2^4}$.	$\frac{64}{2^5}$.	$\frac{64}{2^6}$	&c.
Hoc est	∺	$\frac{64}{1}$.	$\frac{64}{2}$.	$\frac{64}{4}$.	$\frac{64}{8}$.	$\frac{64}{16}$.	$\frac{64}{32}$.	$\frac{64}{64}$	&c.
id est	∺	64 .	32 .	16 .	8 .	4 .	2 .	1	&c.

NB. *Puncta inter terminos posita non indicant multiplicationem, sed tantum separationem terminorum.*

Jam contemplando imprimis seriem crescentem $a \,.\, ma \,.\, m^2a$ *&c. sequentia Theoremata, & Problemata deducuntur.*

315. THEOREMA. Factum extremorum est æquale facto terminorum quorumvis ab extremis æquedistantium, aut si termini sint impares, quadrato medii. *Sic factum ex termino primo* a, *& termino septimo* m^6a *est* m^6a^2, *quod est æquale facto ex termino secundo* ma, *& sexto* m^5a, *quod etiam est* m^6a^2, *sic factum tertii* m^2a, *& quinti* m^4a *est* m^6a^2, *& quadratum quarti est* m^6a^2. *Idem patet in numeris, nam factum primi* 1, *& septimi* 64, *est* $64 . 1 = 64$, *sed etiam factum secundi, & sexti est* $2 . 32 = 64$, *factum tertii, & quinti est* $4 . 16 = 64$; *quadratum medii* 8 *est* $8 . 8 = 64$.

316. THEOREMA. Omnis terminus, est productum ex termino primo, & ex exponente elevato ad potestatem uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini. *Sic terminus* Ex. gr. *septimus* m^6a; *est factum ex exponente* m, *elevato ad sextam potentiam, hoc est* m^6, *& multiplicato per primum* a, $= m^6a$. *Idem est in numeris; sic quartus* 8, *est factum ex exponente* 2, *elevato ad tertiam potentiam nempe* $2 . 2 . 2 = 2^3$, *multiplicato per primum* 1. *Hinc eruuntur sequentia Problemata.*

PRO-

317. PROBLEMA. Dato termino primo, & exponente rationis, invenire terminum quemvis. Resolutio; *datus Exponens elevetur ad potentiam uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini, factum multiplicetur per Primum; sic si detur exponens* 2, *& primus* 1, *& quæratur sextus terminus, erit* $2.2.2.2.2.1 = 32.1 = 32$, *qui est terminus sextus, ut patet ex Tabula*

318. COROLLARIUM. *Hinc si quæratur terminus* maximus, *invenitur is eodem modo, ut quivis alter. Terminus verò* minimus *habebitur, si terminus* maximus *(per prius dicta inventus) dividatur per exponentem elevatum uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini maximi. Sic detur terminus maximus* 32, *qui sexto loco consistit, & exponens detur* 2, *erit* $2.2.2.2.2 = 32$, *per quem dividendo* 32, *erit quotus* $= 1$, *hoc est minimus. Et universaliter formula termini* Maximi *est* $m^{n-1}a$, *& termini* Minimi $m^{n-1}a : m^{n-1}$, *in qua* m *denotat exponentem datæ rationis*, $n-1$ *denotat exponentem potentiæ, vel potestatis de* m *elevato ad gradum unum inferiorem, quam numerus localis termini cujuscunque.* a *verò denotat primum terminum. Porro ex contemplatione seriei crescentis* $a . ma . m^2a$ *&c. habetur sequens.*

319. THEOREMA: Exponens rationis *m* est æqualis $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a : a}$ *hoc est* $\sqrt[n-1]{m^{n-1}} = m$ *hoc est* Terminus datus quivis (*seu maximus*) divisus per terminum primum, & ex quoto extracta radix, potentiæ uno gradu inferioris, quam sit numerus localis termini, est exponens datæ rationis. *Hinc habetur resolutio sequentis problematis.*

320. PROBLEMA: Dato termino primo, termino ultimo (*seu maximo*) & dato numero terminorum, (*seu quotum locum terminus ultimus occupat*) invenire exponentem rationis. Ex. gr. *Datur terminus primus* $=1$, *terminus ultimus* $=8$, *datus numerus terminorum* $=4$ (*hoc est, numerus* 8 *consistit quarto loco in data serie*) invenire exponentem. *Vocetur is* $=x$

erit is per formulam generalem $\sqrt[n-1]{m^{n-1}a:a} = \sqrt[4-1]{x^{4-1}1:1} = \sqrt[3]{x^3} = x$ *hoc est* $\sqrt[3]{8:1} = \sqrt[3]{8} = 2$ *hoc est*: Terminus datus ultimus dividatur per primum, & ex quoto extrahatur radix potentiæ uno gradu inferioris, quam sit terminorum numerus, erit radix hæc quæsitus exponens rationis. *Hinc porro sequitur.*

321. THEOREMA: Si primus terminus subtrahatur ab ultimo, & residuum dividatur per exponentem rationis una unitate mulctatum, & huic quoto addatur terminus ultimus, habetur summa omnium terminorum. *Seu, cum ultimus sit* $= m^{n-1}a$, *primus* $= a$ *exponens rationis* $= m$, *erit residuum, si primus ab ultimo subtrahatur* $= m^{n-1}a - a$, *&* *dividendo per* $m - 1$, *erit quotus* $(m^{n-1}a - a):(m-1)$, *& huic addendo ultimum* $m^{n-1}a$, *habebitur summa* $= m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a):(m-1)$, *quæ est formula universalis reperiendæ summæ. Hinc resolvitur sequens*

322. PROBLEMA: Dato termino primo, dato termino ultimo, & dato exponente rationis, invenire summam omnium terminorum. *Ut si detur terminus primus* $= 1$, *terminus ultimus* $= 64$, *exponens rationis* $= 2$, *erit vi formulæ, terminus primus* $a = 1$, *ultimus* $m^{n-1}a = 64$, *& exponens* $m = 2$, *& hinc vi formulæ* (§.321.) *erit sum̄a*; $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a): m - 1 = 64 + (64 - 1):(2 - 1)$ *hoc est* $64 + (63:1) = 64 + 63 = 127$, *ut patet ex Tabula*: (§. 314.) *nam*

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127.$$

323. COROLLARIUM: *Quotiescunque itaque quæritur summa, nota esse debent hæc tria.* I. terminus primus, II. terminus ultimus, *&* III. exponens rationis. *Hinc quotiescunque datur hujusmodi problema resolvendum, & ex his tribus deficiat unum, in id prius, per superiora problemata inquirendum est.* Ex. gr. *Si daretur terminus primus, & exponens, & non daretur ultimus, in hunc ultimum prius inquirendum est per* (§.317.) *aut si daretur terminus primus,*

mus, *&* *ultimus*, *&* *non daretur exponens*, *hic exponens prius inveniri debet per* (§. 320.) *denique ex his liquet.*

324. PROBLEMA: Datis duobus terminis invenire quotcunque medios proportionales. *Nam cum semper detur terminus primus, terminus ultimus, & numerus terminorum, invenietur ex his per* (§. 320.) *exponens rationis, quo invento formari possunt quodcunque termini per* (§. 317.)

SCHOLION I.

325. *Exemplis hæc quidem pluribus illustrari deberent, quæ, ne in molem excrescat liber ad* Exercitationes Analyticas *reservamus. Porro quæ de progressione* crescente *dicta sunt, eodem modo de* decrescente *vera esse applicanti patebit, maxime si Tyro animadvertat, omnem decrescentem, fore crescentem, & vicissim crescentem mutari in decrescentem, modo seriem consideret progredientem à dextris sinistram versus, & contra.*

SCHOLION II.

326. *De proportione, & progressione jam Arithmetica brevibus; nam* universaliter, *quæ de proportione, & progressione Geometrica demonstrantur adhibendo* multiplicationem, & divisionem, *item* elevationem *ad* potestatem, *vel* extrahendo $\sqrt{}$, *hæc de proportione, & progressione Arithmetica intelligenda sunt adhibendo loco multiplicationis*, Additionem, *& loco divisionis*, Subtractionem, *loco quadrati, multiplicationem per* 2, *loco cubi, multiplicationem per* 3, *&c. loco extractionis* $\sqrt{}$, *divisionem per* 2, *& loco extractionis* $\sqrt[3]{}$, *divisionem per* 3, *&c.*

CAPUT IV.

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

THEOREMA XVI.

327. PROP. *In Proportione Arithmetica* (§.280.) *summa extremorum est æqualis summæ mediorum.*

DEMONSTRATIO.

Sit Majoritatis $a \overset{d}{,} b = c \overset{d}{,} f$, erit $a+f=b+c$ nam substituendo per (§. 278.) erit $a=d+b$, & $c=f+d$, & hinc proportio $d+b$, $b=f+d$, f. summa extremorum $d+b+f=b+f+d$ summæ mediorum. In Numeris sit $3,5=7,9$ erit $3+9=5+7$ hoc est $12=12$.

328. COROLLARIUM I. *In continua* a, b = b, c *summa extremorum* a + c = 2b, *hoc est, duplo medii; ut sit* 3, 5 = 5, 7 *erit* 3 + 7 = 5 + 5, *seu* 3 + 7 = 10.

329. COROLLARIUM II. *Quartus Arithmetice proportionalis invenitur, si à summa mediorum (hoc est secundi & tertii) subtrahatur Primus. Nam* a, b = c, x *erit* a + x = b + c, *& per Metathesim* x = b + c − a. *Sic si detur* 3, 5 *&* 7, *& quæratur quartus* x, *erit* 3, 5 = 7, x, *hoc est* 3 + x = 5 + 7, *& per Metathes.* x = 5 + 7 − 3 = 12 − 3 = 9.

330. COROLLARIUM III. *Tertius continue Proportionalis obtinetur, si à duplo secundi subtrahatur primus, ut si dentur* 3 *&* 5, *& quæratur tertius* x, *erit* 3, 5 = 5, x *hoc est* 3 + x = 5 + 5 *hoc est* 3 + x = 10; *& per Metathes.* x = 10 − 3 = 7, universaliter: a, b = b, x *erit* a + x = 2b, *&* x = 2b − a.

331. COROLLARIUM IV. *Medius proportionalis invenitur, si summa Primi & Tertii dividatur per* 2, *nam* a, x = x, c, *hoc est* a + c = x + x, *seu* a + c = 2x *& dividendo* $\frac{a+c}{2} = x$, *sic sit dentur* 3 *&* 7, *& quæratur medius* x, *erit* 3, x = x, 7, *hoc est* 3 + 7 = 2x, *seu* $\frac{3+7}{2} = x = \frac{10}{2} = 5$.

SCHOLION.

332. *Liquet itaque ex his, quæ (§. 326.) monui eodem quoque modo ratiocinandum esse de progressioni-*

bus

bus Arithmeticis, *quemadmodum de Geometricis dictum*, *adhibendo videlicet*, *loco multiplicationis*, Additionem, *& in locum divisionis* subtractionem, *&c.*

d d d d d

igitur sit series Arithmetica crescens a, b, c, f, g, h *&c.* *exprimetur hæc recte per substitutionem differentiarum*, *juxta doctrinam* (§. 278.) *declaratam.*

Sit	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
cresc.	a,	$a+d$,	$a+2d$;	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$	*&c.*
In		2	2	2	2	2	2	
Num.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13	*&c.*

Ex cujus contemplatione sequentia innotescunt Theoremata, *ac Problemata.*

333. THEOREMA. Summa extremorum, est æqualis summæ quorumvis æquedistantium ab extremis, aut (*si termini sint impares*) duplo medii. *Sic summa primi*, *& septimi est* $a + a + 6d = 2a + 6d$. *Summa secundi & sexti* $a + d$, $+ a + 5d = 2a + 6d$. *Summa tertii & quinti* $a + 2d$, $+ a + 4d = 2a + 6d$, *duplum medii* $a + 3d$, *seu* $(a + 3d) \cdot 2 = 2a + 6d$, *idem patet in numeris.*

334. THEOREMA. Quivis terminus componitur ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt numeri terminorum dempto uno, *seu* est aggregatum ex termino primo, & tot differentiis, quot sunt termini antecedentes. *Sic* Ex. gr. *terminus sextus* $a + 5d$, *constat termino primo* a *plus quinque differentiis*; *quot nempe termini hunc antecedunt. Idem patet in Numeris. Ex his deducuntur sequentia Problemata.*

335. PROBLEMA I. Dato termino primo, & differentia rationis, invenire terminum quemvis. *Sit primus* = a, *differentia* = d, *numerus terminorum* = n, *terminus quæsitus sit* = x Resolutio: *multiplicetur differentia per numerum terminorum una unitate mulctatum*, *& facto huic addatur primus*, *erit aggregatum*, *terminus quæsitus*, *id est* $(d \cdot n - 1) + a$, *hoc est* $dn - d + a = x$, *quæ est formula universalis pro quocunque termino*, *excepto primo*; *sit in numeris primus* $a = 1$, *differentia* $d = 2$, *& quæratur sextus*, *erit numerus terminorum* $6 = n$, *adeoque* $a + nd - d = 1 + 12 - 2 = 11$.

 CO-

336. COROLLARIUM I. *Cum in data progressione ad libitum poni possit terminus quicunque pro ultimo, si is vocetur* $=u$, *erit generalis formula pro ultimo, seu maximo termino* $u = a + nd - d$. *Hinc terminus ultimus seu maximus eodem modo reperitur, quo quivis alius.*

337. COROLLARIUM II. *Quod si detur differentia* $= d$, *numerus terminorum* $= n$, *& terminus ultimus* $= u$, *& quaeratur primus* x, *erit* $u = x + dn - d$, *& per Metathesim* $u - dn + d = x$, *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & à summa subtrahatur factum ex differentia, & numero terminorum, erit residuum aequale primo. Sit* $u = 13$, *&* $d = 2$, *&* $n = 7$, *erit primus* $13 - 14 + 2 = 1$.

338. PROBLEMA II. Dato termino primo $= a$, dato ultimo $= u$, & dato numero terminorum $= n$ invenire differentiam; *sit quaesita differentia* $= x$, *erit* $u = a + xn - x$, *& per Metathesim* $u - a = xn - x$, *& dividendo per* $n - 1$, *erit* $\frac{u - a}{n - 1} = x$, *hoc est;* Ab ultimo subtrahatur primus, Residuum dividatur per numerum terminorum unitate mulctatum, erit quotus differentia. Ex. gr. *Sit primus* $a = 1$, $u = 13$, *numerus terminorum* $n = 7$, *erit formula;* $\frac{u - a}{n - 1} = \frac{13 - 1}{7 - 1}$, *hoc est* $\frac{12}{6} = 2$.

339. PROBLEMA III. Dato termino primo $= a$, dato termino ultimo $= u$, & data differentia $= d$, invenire numerum terminorum; *Sit numerus terminorum quaesitus* $= x$, *erit* $u = a + dx - d$, *& per Metath.* $u + d - a = dx$, *& dividendo per* d, *erit* $\frac{u + d - a}{d} = x$ *hoc est, ad ultimum addatur differentia, & subtrahatur primus, residuum dividatur per differentiam, erit quotus numerus terminorum. Sic si* $a = 1$, $u = 13$, $d = 2$, *erit vi formulae* $\frac{u + d - a}{d} = \frac{13 + 2 - 1}{2} = \frac{14}{2} = 7$

340. PROBLEMA IV. Dato termino primo $= a$ & ultimo $= u$, & numero terminorum $= n$, invenire summam omnium terminorum; *erit Resolutoria formula*

$u + a$.

$(u + a) \cdot \frac{n}{2}$ *seu* $\frac{nu + na}{2}$, *hoc est, ad ultimum addatur primus, & summa multiplicetur per dimidium numerum terminorum.*

341. PROBLEMA ULTIMUM. Dato termino primo $= a$, data summa omnium terminorum $= S$, & dato numero terminorum $= n$, invenire differentiam. *Sit hæc* $= x$, *itaque terminus ultimus* $= a + nx - x$, *per* (§. 336.) *adeoque summa omnium per* (§. 340.) $S = (2a + nx - x) \cdot \frac{n}{2}$, *hoc est* $\frac{2an + nnx - nx}{2} = S$

& multiplicando per 2, *erit* $2an + nnx - nx = 2S$, *& per Metathesim* $nnx - nx = 2S - 2an$, *dividendo per* $nn - n$, *erit* $x = \frac{2S - 2an}{nn - n}$, *quæ est formula resolutoria. Ut si sit* $S = 49$, $a = 1$, $n = 7$, *erit vi formulæ,* $\frac{98 - 14}{49 - 7} = \frac{84}{42} = 2$, *quæ est differentia terminorum.*

SCHOLION I.

342. *Doctrina progressionum a* §. 312. *hucusque tradita, procedit de omnibus etiam fractis. In his tamen, cum variæ esse possint, considerandi veniunt tam* numeratores, *quam* denominatores; *sunt enim quædam, in quibus manente eodem numeratore, denominatores progrediuntur in ratione vel Geometrica, vel Arithmetica, & sunt quædam, quarum tam numeratores, quam denominatores, vel tantum Geometrice, vel solum Arithmeticè procedunt; sunt item aliæ, in quibus numeratores progrediuntur Arithmetice, denominatores verò Geometricè, aut vicissim &c. eæque omnes vel sunt crescentes, vel decrescentes, hujusmodi tamen progressiones, si series numeratorum, itemque denominatorum seorsim considerentur, iisdem gaudent regulis, quibus integri.*

SCHOLION II.

343. *Superest, ut de proportione* Harmonica *innuamus, quam multi, existimantes eam duntaxat* Musicis *famulari, tanquam cæteris scientiis parum utilem negligunt, non animadvertentes summum ejusdem usum in enodandis miris naturæ arcanis, quem satis quidem intelligo amplissimum. Tyronibus interea in-*

nuisse sufficiat, proportionem Harmonicam appellari, & quidem discretam, si differentia termini primi à secundo, ita se habeat Geometrice, ad differentiam Tertii à quarto, ut primus ad quartum, aut in continua, differentia primi à secundo ad differentiam secundi à tertio, ut primus ad tertium, & quidem in ratione Geometrica. Sic harmonice proportionales sunt

$$\overset{2}{12, 14} = \overset{4}{20, 24},$$ *nam* $2 : 4 = 12 : 24$, *quæ est discreta.*

Item continua $\overset{6}{10, 16} = \overset{24}{16, 40}$, *nam* $6 : 24 = 10 : 40$ *quæ si generaliter exprimatur per literas* $a, b = c, d$; *erit* $b-a, d-c = a, d$, *quæ est Geometrica, legibusque Geometricis tractanda; cujus ope,* quartus, tertius, *aut* medius *harmonice proportionalis inveniri potest, plura ob reticemus.*

CAPUT V.

De usu Regulæ Aureæ directæ, Inversæ, Simplicis, & compositæ, itemque de Regula Societatis.

344. Regula Aurea, vel Trium est proportio Geometrica, ut (§. 288.) dictum, eaque, vel *simplex*, vel *composita*, *simplex* appellatur quando datis tribus terminis quæritur quartus. *Composita* dicitur, quando datis terminis quinque, quæritur sextus, vel datis septem, quæritur octavus. Utraque hæc dividitur in *Directam*, & *Inversam*; *directa* appellatur, quando, ut primus est ad secundum, ita tertius ad quartum; *Inversa*, quando, ut tertius est ad primum, ita secundus ad quartum.

SCHOLION.

345. *Cum ea, quæ in commercium, usumque communem veniunt, sint* pretiis, temporibus, laboribus *&c. proportionalia, (qui enim duas ulnas emit, necesse est, ut unius ulnæ pretium duplum persolvat, qui tres, triplum &c. item, qui laborat duabus diebus duplam mercedem, qui tribus triplam meretur, & qui fodit duabus diebus, duplum laborem unius diei perficit, qui tribus, triplum &c.) sequitur, per regulam auream* (§. 288.) *seu per proportionem, rectè quæsita inveniri, unde consequitur, ea, quæ per regulam auream indagan-*

gantur, debere esse homogenea; male enim quis ratiocinaretur: urna vini constat 40 groff. ergo 6 metretæ tritici, quanti erunt? cum urna vini, & metretæ non sint homogena. Itaque ad praxim

Usus Regulæ Aureæ simplicis, & directæ.

346. Regula I. Termini ordine in quæstione proposito in proportionem ordinentur. II. Multiplicetur tertius per secundum, factum dividatur per primum (§.288.) quotus erit terminus quartus quæsitus. III. Si occurrant ordinandi termini mixti heterogenei reducibiles, reducantur ante ad speciem minimam omnes termini homologi. *Vide Exempl. II.* IV. Si fractiones immisceantur, reducantur ante ad eandem denominationem, aut tractentur per (§. 148.)

EXEMPLUM I.

3 Ulnæ panni constant fl. 7, ergo 9 ulnæ, quanti veniunt?

erunt ordinati $\overset{uln.}{3} : \overset{fl.}{7} = \overset{uln.}{9} : x$, *adeoque per Regul. II.*

$x = \frac{7 \cdot 9}{3} = \frac{63}{3} = 21$, *ergo* $\overset{ul.}{3} : \overset{fl.}{7} = \overset{ul.}{9} : \overset{fl.}{21}$, *examen fit per* (§.286.)

EXEMPLUM II.

2 libræ, & 12 loth aromatum (ponderis civilis) constant fl. germ. 15, & 24 xr. quanti erunt 5 libræ cum 30 loth ejusdem speciei aromatum?

Itaque terminos hos Reducendo juxta Reductionum Tabulas III. & IX. (§. 141. Arith.)

erunt 2 *libræ &* 12 *loth* = 76 *loth.*
15 *fl. &* 24 *xr.* = 924 *xr.*
5 *libræ &* 30 *loth* = 190 *loth.*

Unde $\overset{loth}{76} : \overset{xr.}{924} = \overset{loth}{190} : x$, *& hinc* $x = \frac{924 \cdot 190}{76} = \frac{175560}{76} = 2310$ *xr. id est* 38 *fl. &* 30 *xr.*

Regula aurea simplex Inversa.

347. *Cognoscitur esse inversa per* (§. 344.) *& plerumque ratione temporis occurrit, quo opus aliquod citius, tardiusve perficiendum est; ut si quæras. 4 Murarii exstruunt domum 10 mensibus, ergo 8 murarii,*

rarii, quot mensibus construent eandem domum? video itaque inversam, cum 8 murarii longe breviore (quam 10 mensium) tempore opus absolvere debeant. sunt nempe menses in ratione inversa murariorum, hoc est, ut 8 murarii ad 4 murarios, ita 10 menses ad menses quæsitos. Itaque

348. Regula unica: Ordinentur termini ita, ut tertius in quæstione terminus fiat primus, & primus fiat secundus; cætera fiant, ut in regula directa. Vel (*secundum vulgus Arithmeticorum*) ordinentur termini ordine in quæstione proposito; tum multiplicetur primus per secundum, & factum dividatur per tertium.

EXEMPLUM I.

Operæ 100 intra 8 dies excolunt vineam, ergo 50 operæ, quot diebus.

Erit, ut $50:100 = 8:x$ *hoc est* $x = \frac{100 \,.\, 8}{50} = \frac{800}{50} = 16$ *dies.*

EXEMPLUM II. VULGARI METHODO.

Militibus 125 pro diebus 10 sufficiunt centum metretæ, ergo 625 Militibus, quot diebus sufficient? erit vulgo, $125:10 = 625:x$, *hoc est* $\frac{10 \,.\, 125}{625} = \frac{1250}{625} = 2.$

Usus Regulæ compositæ Directæ.

349. *Regula composita juxta (§. 344.) tunc utimur, quando datis 5, vel 7 terminis quæritur sextus, vel octavus, quæ (si omnes termini sint in ratione directa) appellatur* Directa. *Ad hujus rectum usum eumprimis videndum, quis sit terminus* solitarius? *terminum autem* solitarium *voco, cui* homogeneus *est terminus quæsitus. Itaque*

350. Regula I. Termini omnes, qui ad solitarium spectant, multiplicentur inter se, (*excepto solitario*) & factum ponatur primo loco, in secundo loco ponatur terminus solitarius, tertio loco ponatur productum ex terminis, qui pertinent ad quæsitum. Reg II. Sic reducti termini, & hoc ordine positi tractentur, ut in Regula aurea simplice directa. (*§. 346.*)

Ex-

EXEMPLUM.

1000 fl. per annos 4 dant censum 200 florenos? ergo 3500 floreni per annos 6 quantum censum dabunt? In hac quæstione census 200 fl. est solitarius, cum quæratur census.

fl. an. cens. fl. an. cens.

Itaque $(1000 \cdot 4) : 200 = (3500 \cdot 6) : x$

hoc est $4000 : 200 = 21000 : x$

unde per (§. 346.) $x = \frac{21000 \cdot 200}{4000} = 1050$ *fl. cens.*

Regula composita Inversa.

351. Regula Unica: Videatur, qui termini sint in ratione inversa aliorum, hi ante reductionem transponantur ita, ut terminus pertinens ad solitarium, transferatur ad terminos pertinentes ad quæsitum, & vicissim terminus pertinens ad quæsitum transferatur ad terminos solitarii, quo facto per Reg. I. (§. 350.) reducantur, reducti in proportionem ordinentur, & tractentur, per regulam compositam directam.

EXEMPLUM.

8 Messores demetunt 50 jugera intra dies 10, igitur 16 messores, jugera 150 quot diebus demetent. In hac solitarius est 10 dies, cum quæsitus, sint dies. Itaque video dies quæsitos esse in ratione inversa messorum, & hinc.

mess. jug. dies mess. jug.

ut $(16 \cdot 50) : 10 = (8 \cdot 150) : x$

hoc est $800 : 10 = 1200 : x$, *seu* $x = \frac{12000}{800} = 15$ *dies.*

SCHOLION.

Habetur quoque methodus resolvendi quæstiones compositas per repetitas regulas simplices, sed hæc docentis viva voce, aut lectione authorum facile intelligitur.

Usus Regulæ societatis simplicis.

352. *Regula* Societatis (*quæ etiam proportio est*) *appellatur, quando bini, vel plures societatem ineunt lucri causa, conferendo ad faciendum lucrum pecunias particulares, dein elapso certo tempore factum lucrum partiendum est inter socios pro rata collatæ cujusvis pecuniæ.*

353. REGULA. Primo loco semper ponatur tota summa collatorum omnium; secundo loco semper lucrum totale, tertio cujusvis collatum particulare, pro quo quæritur. Hinc quot sunt socii, toties dicto modo regula repetenda est. Itaque

EXEMPLUM.

Tres Mercatores Pterilus, Ponticus, & Cosmophilus inita societate conflarunt summam 1000 fl. Pterilus contulit 240 fl. Ponticus 300, Cosmophilus 460, hac summa lucrati sunt uno anno omnes simul 2000 fl. quæritur quid singuli? Itaque Proportiones pro singulis sic ordinantur:

Pro Pterilo ut. 1000 : 2000 = 240 : x *prodit lucr.* 480.
Pro Pontico ut. 1000 : 2000 = 300 : x *fit lucr.* 600.
Pro Cosmophilo 1000 : 2000 = 460 : x *habetur* 920.

lucrum omnium = 2000.

Regula societatis composita.

354. In hac præter collatum singulorum occurrit etiam tempus, pro quo singuli contulerunt. Hinc antequam termini ad proportionem ordinentur, singulorum collatum per suum tempus multiplicetur, & factum ponatur loco tertio, cætera fiant, ut in regula societatis simplice.

EXEMPLUM.

Iidem Mercatores alio pacto inierunt societatem, ita ut Pterilus contulerit fl. 100 pro mens. 19.
Ponticus fl. 130 pro mens. 10.
Cosmophilus fl. 300 pro mens. 6.

Exacto hoc tempore lucrati sunt simul fl. 10000 fl. quantum singuli? ut habeatur collatum singulorum, & summa totalis collata.

Fiat 100 . 19 *hoc est* 1900 *Pterili collatum.*
130 . 10 - - 1300 *Pontici.*
300 . 6 - - 1800 *Cosmophili.*

Summa collat. 5000.

Itaque pro Pterilo 5000 : 10000 = 1900 : x *fit* 3800.
Pontico 5000 : 10000 = 1300 : x *fit* 2600.
Cosmoph. 5000 : 10000 = 1800 : x *fit* 3600.

totum lucrum = 10000.

SCHO-

SCHOLION.

355. *Cum usus Regularum frequenti exercitio condiscatur, nobis autem prolixioribus esse non liceat, idcirco selectissima ad usum exempla, & quæstiones,* Exercitationibus Arithmeticis *in gratiam nostrorum discipulorum edendis, reservamus, quibus Methodum Italicam, & cætera compendia, ac praxes adjungemus.*

CAPUT ULTIMUM.

De Inventione Theorematum, ac Problematum.

356 *Inventio Theorematum, ac Problematum adeo propria est Algebræ, ut nullam fere Æquationem reperias, quæ vel Theorema insigne, aut utile aliquod Problema non eloqueretur, modo mentem advertamus. Itaque tribus (ut ajunt) verbis doctrinam hanc complectar :* Tracta quantitates componendo, æqualia pro æqualibus substituendo, & composita in analogiam, seu proportionem resolvendo, & artem reperisti. *Quapropter*

357. *Ad* Compositionem *pertinent* Additio, *cujus ope reperta habentur Theoremata* (§. 231, 233. *&c.*) Subtractio *per quam detecta habentur Theor.* (232, 234. *&c.*) Multiplicatione, *&* Divisione *innotuerunt Theor.* (§. 182.), *& reliqua potentiarum doctrina, item omnia Partis IV. de proportione.*

358. *Virtutem* Substitutionis *æqualis pro æquali declarant* (§. 247, 248.) *& demonstrationes proportionum à* (§. 276.) *ad Caput. V.*

359. *Infinitum prope Problematum numerum à formularum in analogiam seu proportionem* Resolutione *emanare, nemo est Mathematicorum, qui ignoret; quarum quidem resolutionum artificium in eo consistit, ut ita termini resolvantur, & in proportionem ordinentur, ut factum extremorum, semper sit æquale facto mediorum, quemadmodum à* (§. 291.) *ad Cap. V. ostensum est. Hic animadvertendum præterea, quod si formula per Hypothesim divisionis expressa in analogiam solvenda, totus divisor pro* primo, *reliqui factores Numeratoris, seu dividendi,* secundo, *&* tertio

loco constituantur. Sic hæc Ex. gr. *Æquatio* $x = \frac{ad - dc}{a - b}$ *ita resolvetur*; $a - b : a - c = d : x$, *aut* $a - b : d = a - c : x$, *item hæc* $x = \frac{a}{b}$, *ita* $b : a = 1 : x$, *item* $\frac{3ab}{2c}$, *ita* $2c : 3a = b : x$, *vel* $2c : 3b = a : x$, *vel* $2c : 3 = ab : x$, *ut patet. Sed hæc, & cætera docentium industriæ una cum reflexionibus, relinquo.*

359. *Ut fidem* (§. 384.) *datam exsolvam, sint ope Analysis demonstranda Theoremata.*

360. THEOREMA: Quantitas positiva per negativam, vel vicissim multiplicata, dat negativum productum, *hoc est* $(a - b) . + c$, *dat productum* $+ ac - bc$; *cum cuicunque quantitati æqualis assignari possit aliqua quantitas sit illa* d, *erit* $a - b = d$, *& per Metathesim* $a = d + b$, *& per* $+ c$ *multiplicando utramque partem, erit* $ac = dc + bc$, *& per Metathesim* $ac - bc = dc$, *unde cum inter* $a - b$, *&* d *fuerit æqualitas, & iterum inter* $ac - bc$, *&* dc *sit æqualitas, sequitur multiplicando* $a - b$ *per* c, *fieri debere* $ac - bc$, *& non* $ac + bc$.

361. THEOREMA. Quantitas negativa per negativam multiplicata, dat positivam: *hoc est* $(a - b) . - c$ *dat* $- ac + bc$. *Sit* $a - b = d$, *erit per Metathesim* $a = d + b$, *multiplicetur pars utraque per* $- c$, *erit per prius demonstrata* $- ac = - dc - bc$, *& per Metathesim* $- ac + bc = - dc$, *sed* $- ac + bc$, *est factum ex* $a - b$ *in* $- c$, *ergo.*

362. THEOREMA. Factum duarum fractionum $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, *esse debet* $\frac{ac}{bc}$, *ut* (§. 140, & 141.) *dictum.*

DEMONSTRATIO. *Omnis fractio est Ratio Geometrica per* (§. 272.) *Ratio verò Geometrica est divisio per* (§. 272.) *sed in divisione divisor est ad dividendum, sicut unitas ad quotum, per* (§. 60. *Arit.*) *unde, fractio* $\frac{a}{b}$ *resolvitur in hanc* $b : a = 1 : \frac{a}{b}$ *per* (§. 288.) *&* $\frac{c}{d}$ *resolvitur in hanc* $d : c = 1 : \frac{c}{d}$ *per* (§. 288.)

ergo

ergo per (§.296.) $(b.d):(a.c)=(1.1):\frac{a}{b}\bowtie\frac{c}{d}$

hoc est $bd:ac=1:\frac{a}{b}\bowtie\frac{c}{d}$

seu $\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\bowtie\frac{c}{d}$ *quod erat Demonst.*

SCHOLION.

362. *Ex his, & cæteris hucusque declaratis, satis liquet* Arithmeticam numericam *omne suum pretium* Algebræ *debere, quanta verò incrementa cætera disciplinæ ab Analysi sumpserint, erudita Recentiorum volumina his formulis locupletata, loquuntur. Postremum Tyronibus proficere volentibus tam in Arithmetica numerica, quam literali non inutile censui quosdam Authores indicare, à quibus, quæ à me ob temporis angustias, necessario, aut prætermittenda, aut certe strictim pertractanda fuere, petere valeant. Itaque Arithmeticam ad captum Tyronum præclare concinnârunt,* P. Christophorus Clavius, è Soc. JEsu, *cujus* Epitome Arithmeticæ practicæ, *sæpissimè recusa, Authorem à facilitate doctrinæ commendat; Theoriam praxi junxit,* R. P. Andreas Tacquet, *S. J. in sua* Theoria, & praxi Arithmetices. *Arithmeticam, & Algebram in usum Tyronem dedere* R. P. Erasmus Frœlich, è Soc. J. *sub Titulo:* Introductio facilis in Mathesim Viennæ 1746. *in 8vo, opusculum singulare.* Crivellii Elementa Arithmeticæ numericæ, & literalis, *latinè, & auctiora reddita Viennæ* 1745. *in 8vo.* R. P. Lechi, è S. J. Arithmetica universalis Neutoni. *His accedunt* Tabulæ Mnemonicæ ex Primis universæ Matheseos Elementis concinnatæ à R. P. Philippo Steinmeyer, S. J. Augustæ Vindel. 1750. *in 8vo. Item* R. P. Josephi Liesganigg, è S. J. Tabulæ Memoriales Recolendis Matheseos Elementis Servientes, Viennæ 1753. *in 4to.*

Cursus Mathematici commendantur R. P. Caspari Schotti, è S. J. *&* R. P. Claudii Milliet Dechales, è S. J. *Notissima sunt* Illust. Christiani Wolffii Elementa Mathematica, & eorundem Compendium; *item* Ozanam Cours de Mathematique; Institutiones Matheseos Weidleri, *&* Wiederburgii; *item* Poetii Introductio in Arithmeticam

Idio-

Idiomate Germ. è quibus ſingulis prima Matheſeos Elementa, ſi quando Tyrones petent, meminiſſe una mecum velim, moniti D. Pauli: *Omnia in Gloriam DEI facite.* I. ad Cor. 4. v. 31

FINIS ELEMENTORUM ALGEBRÆ,

ET

PRIMI TOMULI.

Errata quædam.

Pag.	*Loco.*	*Lege.*
16 *Exempl. V.*	7 0.0.4.0.0.3	7.0.0 4.0.0.3
28 *lin. 1. ante Ex. gr.*	*pone,*	*vel viciſſim.*
63 *Exempl. I.*	5 8 9 1	5 9 0 1
	° ′ ″	° ′ ″
Ibidem	6 1,6 0,7 6.	6 1,7 0,7 6.
81 *Exempl. IV.*	110	100.
84 *Tab. XII. faciunt*	1)	*faciunt* $1\frac{1}{2}$ *menſuram, vel Ung. Cupri.*
86 *lin. penul.*	160	190.
115 *lin. 11.*	*laudibile*	*laudabile*
217 *Paragraph. 192. linea 2.*	(§. 174.)	(§. 173.)
243 *lin. 15.*	$2x = 24b$	$2x = 24c.$

Cætera leviora B. L. corriget.

INDEX PROBLEMATUM.

PARTIS I.

De Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum cum fractis.

PARTIS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus.

PARTIS III.

De Analysi speciosa seu arte Resolvendi Problemata, & quæstiones quantumvis reconditas.

Ope-

PARTIS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, usu Regulæ aureæ, Inventione Theorematum, ac Problem.

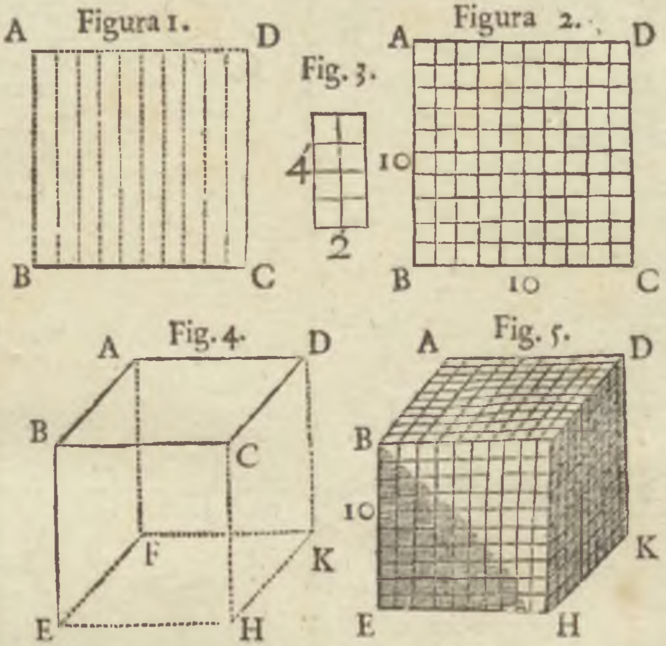
De Progressione Geometrica.

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

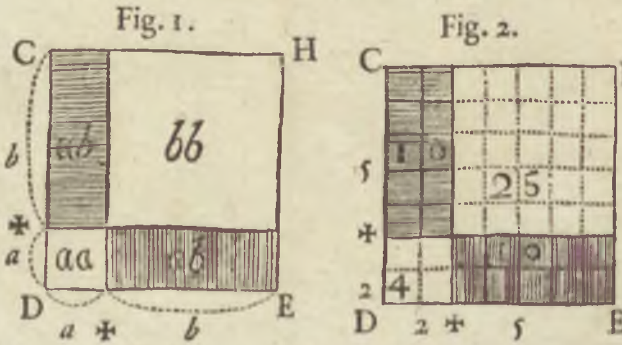
De Regula Aurea.

O. A. M. D. G.

TABULA LOGISTICÆ DECIMALIS.



TABULA ALGEBRÆ.



EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM

PARS I.

EXERCITATIONES ARITHMETICAE

Quibus pertractantur

Varia Compendia Arithmetica, Praxes Regulæ Aureæ quamplurimis Quæſtionibus œconomicis, & ad uſum Civilem, ac Mercatorum applicatis declaratæ; His accedit Regula *Rabattæ*, *Anatociſmi*, & Juris Civilis *de Quarta falcidia*.

AD

USUM PRIVATUM STUDIOSAE JUVENTUTIS

Conſcriptæ

A P. MAXIMILIANO HÖLL,
e S. J. Philoſophiæ Doctore, Matheſeos
Prof. Publ. & Ord.

IN ACADEMIA S. J. CLAUDIOPOLITANA
TRANSYLVANIÆ.

CLAUDIOPOLI,

TYPIS ACADEMICIS S. J. ANNO 1755.

MONITUM
AD
TYRONES SUOS.

HAbetis Exercitationum Mathematicarum Partem Primam vobis à me pagina 301. §. 355. Elementorum Alg. promissam. Arithmeticas hæc praxes complectitur primarias, daturus in Parte altera (si DEO *visum fuerit) cæteras, vestris quidem usibus, qui Algebra, seu arte hæc Marte proprio inveniendi, tincti estis, haud necessarias, non tamen inutiles, vel ideo, ne à vobis, qui sublimia tenetis, humilia hæc desiderentur, quæ vulgus Arithmeticorum summa hactenus existimabat. Formulis Algebraicis, vobis charissimis, consulto abstinui, contentus inventa dedisse, arte inveniendi dissimulata, ne divinam hanc scientiam imperitæ turbæ Arithmeticorum ea carpentis, contemnentisque, quorum ignorantiam fateri pudet, calumniis exponerem; Nôstis artem, sacram in usus vestros servatote; Gemmarios vos putatote, obtrectatores cæteros, emblemate gallinæ Æsopicæ notatos, si sapere velint, errorem subinde dedocetote. Valere vos cupio ad* D E I *Gloriam Majorem per vos, vestrosque conatus augendam. Fruimini his ad Religionis, Patriæque Vestræ bonum promovendum.* MA-

INDEX CAPITUM.

EXERCITATIONES
ARITHMETICÆ.

CAPUT I.
Compendia quædam quatuor Algorithmorum Arithmeticæ integrorum.

Finis omnium compendiorum est, operationes, quam brevissimo tempore absolvere. Facimus autem compendium temporis. 1. Si operationes, quæ seorsim peragendæ forent, simul perficiamus. 2 Quæ per plures operationes fieri ordinarie solent, per pauciores, omissis quibusdam fiant. 3 Quæ per difficiliores perficiuntur via vulgari, per faciliores, & strictiores peragantur. Ex triplici hoc capite judicium ferendum de compendiis; multa namque vulgo nomine compendii veniunt, quæ recto judicio inter dispendia potius referenda sunt, nisi velimus exercitationem pro compendio habere, qua exercitatus, etsi per ambages operans, Tyroni, compendioso modo easdem operationes facienti, celeritate antecedit. Nobis hic (præter ea, quæ Elementis nostris Math. inseruimus) de veris quibusdam compendiis Arithmeticæ agendum, quæ ex certis Principiis Algebræ innotuere, nihil derogando iis, quæ me latent, aliique cum fructu usurpant Itaque.

PROBLEMA I.

1. *ADditionem, & Subtractionem plurium numerorum una absolvere.*

RESOLUTIO.

Sint dati Addendi quotcunque A, B, C, D, à quibus ſubtrahendi ſunt quotcunque E, F, G,

Primo, fiat collocatio Addendorum, ut in Additione fieri ſolet, dein ducta linea, collocentur infra hos eodem ordine numeri ſubtrahendi, & linea ſubducantur, ut in Paradigmate.

PARADIGMA.

A	1. 4 5	*Addendi.*
B	5. 6. 2	
C	3 8 7	
D	9 2 4	
E	1. 5. 6	*Subtrahendi.*
F	2 3	
G	7 3 4	
Reſid.	1 1 0 5	

Inchoetur ab unitatibus ſubtrahendorum, quæ in unam ſummam collectæ efficiunt 13, ubi, cum una decas emerſerit, rejiciatur hæc ad ſequentem claſſem decadum, quæ rejectio fit tantum ponendo punctum (ut hic ad numerum 5 factum eſt) idque toties, quoties decas emergit; numerus vero 3, qui reliquus eſt ex collectis unitatibus, ſubtrahatur ſtatim ab unitatibus Addendorum, nempe 3 à 4, manet 1, hoc reſiduum, & reliqui Addendi colligantur in unam ſummam, qui dum colliguntur, quoties in decadem excreſcunt, toties in ali-

qua

qua nota decadum ponatur punctum, numerus vero ex collectis unitatibus reſiduus, ponatur in loco Reſidui, ut numerum 5, hic poſitum vides.

Dein fiat item eodem modo collectio decadum in ſubtrahendo, numeri autem puncto ſignati, habeantur pro auctis una unitate, & quoties decades excreſcunt ad decadem, toties aliqua nota in centenariis notetur puncto, numerus vero ex rejectis decadibus reſiduus ſubtrahatur iterum à numeris decadum Addendorum, *ut hic* 1 à 2; reliqui verò numeri in Addendo eadem ratione colligantur, & quoties excreſcunt in decadem, toties numerus aliquis in centenariis puncto ſignetur, numerus autem ex collectis decadibus reſiduus, aut (ſi nihil ſuperſit) zerus, ponatur in loco Reſidui, *ut hic zerum ſcriptum vides.* Eodem modo procedatur cum centenariis, millenariis &c. & habebitur Reſiduum totale, in noſtro quidem Paradigmate 1105; ex qua operatione liquet compendium, & praxis à vulgari modo operandi diſtincta.

SCHOLION.

2. *Cætera compendia Additionis, aut ſubtractionis, quæ ope Machinarum Arithmeticarum, aut per circinum Proportionis, vel etiam per Rabdologiam Neperianam vulgo celebrantur, nos inter diſpendia referimus, propterea, quod plurimum temporis in diſpoſitionem machinæ, vel collocationem calculorum &c. inſumatur.*

PROBLEMA II.

3. *Multiplicationem per compendia instituere.*

COMPENDIUM I.

Multiplicationem, & Additionem factorum partialium simul absolvere.

Sit Multiplicandus	2345	
Multiplicans	248	
Factum	~~1~~ ~~8~~ ~~7~~ 6 0	
581560	~~2~~ ~~2~~ ~~2~~ 5	
	5 8 1	

Itaque fiat multiplicatio per numerum 8, ut alias, factumque 18760 ſubſcribatur, ut methodo ordinaria; dein fiat multiplicatio per ſequentem numerum 4, dicaturque 4 per 5 dat 20, & 6 (numerus videlicet ex primo producto infra multiplicantem 4 ſcriptus) dat 26, itaque relicto numero 6 in primo producto, mente retineatur numerus 2 (ſeu 20.) Deinde dicatur 4 per 4 dat 16, & cum 2 mente retentis dat 18, & additis 7 (qui eſt tertius in primo producto) facit 25, ſcriptoque 5 infra 7, & delendo numerum 7, mente iterū retineatur 2, (ſeu 20.) Porro 4 per 3, dat 12, & cum 2 mente retentis, facit 14, additisque 8 ex primo producto, fiunt 22, ſcriptis itaque 2 infra 8, & numero 8 deleto, mente iterum retineatur 2 (ſeu 20) demum 4 per 2, dat 8, & cum 2 mente retentis dat 10, additaque ex primo producto 1, efficitur 11, qui numerus integer, utpote ultimus, ſubſcribatur, numerus verò 1, ex primo producto deleatur.

Progrediendo ad tertiam multiplicantis notam 2, dicatur iterum 2 per 5 dat 10, & additis ex producto ſecundo 5, fiunt 15, relictis itaque in producto ſecundo 5, mente retineatur 1; porro 2 per 4 dat 8, & cum 1 mente retenta, facit 9, atque cum 2, (numero nempe ſecundi producti) fiunt 11, adſcripta ergo 1, & mente retenta altera unitate (ſeu 10) dicatur 2 per 3 dat 6, & cum 1 (mente retenta) fiunt 7, & addita unitate ex producto ſecundo, habetur 8, quo ſubſcripto, & ex producto ſecundo deleta unitate, dicatur 2 per 2 dat 4, & 1, ex ſecundo producto, fiunt 5, atque deleta unitate producti ſecundi, erunt numeri, qui deleti non ſunt, nempe 581560 productum totale.

Methodo hac, ſi exercitium accedat, ſatis celeriter abſolvitur multiplicatio.

EN EXEMPLUM II.

3275	
894	
~~1~~ ~~3~~ ~~1~~ ~~2~~ 0	factum
~~3~~ ~~0~~ 7 8 5	2927850
292	

COMPENDIUM II.

4. Multiplicatio ferè ſola ſubtractione unica peragitur in caſu, quo multiplicans proxime accedit ad numerum aliquem ſimplicem, ſunt autem numeri ſimplices, unitas cum zeris, ut 10, 100, 1000, 10000 &c.

Sit multiplicandus 894673 per 9. Itaque cum multiplicans 9 accedat ad numerum ſimplicem 10, adjiciatur multiplicando unus zerus, & ab hoc aucto jam per zerum, ſubtrahatur idem multiplicandus non auctus zero. Erit Reſiduum productum, quod prodire debet, ſi multiplicaretur per 9.

EN EXEMPLUM.

Multiplicandus	8946730	*auctus zero.*
idem multiplicandus	894673	*ſine zero.*
Reſiduum	8052057	*ſeu Productum.*

Eodem modo ſit multiplicandus 536789 per 99, quia 99 accedit ad 100, adjiciantur multiplicando zeri duo, & idem multiplicandus non auctus zeris ſubtrahatur, & habebitur productum, ut in Exemplo

	53678900
	536789
Product.	53142111

Et hinc univerſaliter: quot zeros habet numerus ſimplex, ad quem accedit multiplicans, tot zeri multiplicando adjiciantur.

Ra-

Ratio autem hujus compendii eſt, quia adjiciendo zeros, multiplicandus reipſa multiplicatur per 10, vel 100, vel 1000 &c. adeoque loco 9 multiplicatur per 10, loco 99, multiplicatur per 100, & ſic porro, cum itaque, multiplicare *Ex. gr.* per 10, loco 9, ſit totum multiplicandum ſemel plus accipere, quam deberet accipi, ideo, multiplicandus ſemel ſubtractus, relinquit Reſiduum, quaſi per 9 fuiſſet multiplicatum; idem dicendum, ſi multiplicari deberet per 99, vel 999.

SCHOLION.

5. Eodem modo abſolvitur multiplicatio, etſi multiplicans deficiat duabus, tribus, quatuor &c. unitatibus à numero ſimplice, tali enim caſu ante, quam multiplicandus ſubtrahatur, is multiplicari debet per illas unitates, quibus deficit. Ut ſit multiplicandus 58345, per 98, quia 98 deficit à 100 per 2, multiplicetur 58345 per 2, & hoc factum ſubtrahatur ab priore multiplicando zeris aucto. Ut Exemplum docet.

EXEMPLUM I.

	5834500	
	116690	*id eſt* 58345 *per* 2
Productum	5717810	

EXEMPLUM II.

Sit multiplicandus	789457	*per* 997
erit	789457000	
ſubtrah.	2368371	*id eſt* 789457 *per* 3
Productum	787088629	

COMPENDIUM III.

6. *Si tam multiplicandus, quam multiplicans accedunt proximè ad numerum aliquem simplicem.*

Sit Multiplicandus 998 per 987, ponatur itaque numerus proximè simplex primo loco, huic immediate subscribantur factores, ut hic factum vides.

Numerus simplex	A 1000		
	B 998	2	*differentiæ.*
	C 987	13	
	985026		

Subtrahatur factor B ab A, & ejus Residuum seu differentia 2 ponatur ad latus ejusdem; eodem modo subtrahatur C ab A, & ejus Residuum 13 ponatur eidem ad latus, dein multiplicentur hæc duo residua seu 13 per 2, & productum 26, scribatur ordine infra datos factores, demum minor differentia 2 subtrahatur à minore factore 987, & Residuum 985 ita scribatur, ut sinistima nota residui 5 veniat infra unitatem numeri simplicis, cætera vero loca intermedia, si vacua sint, inter hoc Residuum, & inter productum ex differentiis, expleantur zeris, ut hic uno zero, expletum vides.

Sic quoque habetur, si Multiplicandus sit 9984 per 9992, vel vicissim

EN

EN EXEMPLUM.

Num. ſimplex	10000	
	9984	16 *factum ex diffe-*
	9992	8 *rent.* 128.
Productum	99760128	

SCHOLION.

7. Hic modus brevior adhuc reddi poteſt, ſi nempe minori factori tot zeri apponantur, quot ipſe notas numericas habet, dein eidem ſic zeris aucto, ſuperſcribatur major factor, ejusque differentia à numero ſuo ſimplici ad latus ejusdem ponatur, per hanc differentiam multiplicetur minor factor (ſecluſis zeris, quibus auctus eſt) Productum hoc ſubtrahatur a minore factore jam zeris aucto, erit Reſiduum Productum, *quod quærebatur.* Vide Exemplum.

Sit multiplicandus	995 *per* 897	
erit Major	995	5 *differentia à* 1000.
Minor zeris auctus	897.000	
ſubtrahendus	4485	*id eſt* 897 *per* 5.
Productum	892515	

Ratio hujus utiliſſimi compendii eadem eſt, quæ Compendii II. Superſcriptio factoris majoris tantum claritatis gratia hic in Exemplo facta eſt, quæ in praxi omitti poteſt, modo ſciatur ejusdem differentia, à numero ſimplice.

COMPENDIUM IV.

8. Inter compendia cenſeri poteſt modus multiplicandi, vi cujus, duæ notæ multiplicantis in unam contrahuntur, adeoque lucrifit multiplicatio una particularis; ſed hic modus rarior eſt, cum multiplicans de-

beat esse ejusmodi, ut duæ notæ relictæ sint factum, ex altero numero multiplicantis, & alio quovis numero *Ex. gr.* sit multiplicans 36,4 hic potest contrahi in factorem 4, & alterum 9, quia electo numero 4 reliqui duo nempe 36, rectè sunt factum ex 4 per 9. Item si multiplicans esset 856, electo numero 8, reliqui 56, contrahi possunt in numerum 7, quia 8 per 7 dat 56; sed præterea notandum, quod is, qui hac methodo utitur, & ordinem peculiarem subscribendorum factorum partialium observandum habeat, & simul ordinem multiplicandi, ut in Exemplis clarum fiet.

EXEMPLUM I.

Multiplicandus 56342 (36,4 *multiplicans.*

225368 (4
2028312 (9

Productum 20508488

Scilicet: quia in numero 364, electo numero 4, binæ notæ 36, sunt factum ex 4 per 9, ideo multiplicatio abreviari potest multiplicando primo per 4, dein hoc productum iterum multiplicando per 9, ut factum est in Exemplo.

EXEMPLUM II.

Sit multiplicandus 23453 *per* 856
erit 23453 (8,56

187624 (8
1313368 (7

Productum 20075768

In hoc exemplo, quia numerus 8 ex 856, occupat locum centenariorum, ideo initium ſcribendi in producto factum eſt in loco centenariorum, ſecundum vero productum in loco unitatum.

COMPENDIUM V.

9. Ordinarium Compendium Arithmeticorum eſt, per diſperſionem in factores, quos vocant *partes aliquotas*; ſi nempe multiplicans ſit numerus compoſitus, qui per multiplicationem aliorum numerorum produci poteſt, ſic *Ex. gr.* numerus 24 eſt compoſitus ex 3 & 8, vel ex 4 & 6, quia 3 per 8 dat 24, & etiam 4 per 6 dat 24, quod ſi itaque hujusmodi multiplicans occurrit, ſolvatur is in ſuos factores partiales, & per hos multiplicandus ſucceſſive multiplicetur, id eſt, primo multiplicetur per unum factorem, productum hoc per alterum, & iterum hoc ſecundum productum per tertium factorem, atque ita porro, erit productum ultimum factum quod petebatur. In hoc compendio lucrifit Additio, quæ omittitur.

EN EXEMPLUM.

Sit multiplicandus	2574 *per* 24	*vel*		2574 *per* 24
erit	7722 (3		*etiam*	10296 (4
Productum	61776 (8		*Product.*	61776 (6

COM-

COMPENDIUM VI.

10 Non minus uſitatum habetur compendium per diſperſionem in *partes aliquantas*, quando multiplicans diſpergitur in ſuas partes ita, ut per additionem collectæ iterum reſtituant totum multiplicantem, *Ex.gr.* ſi numerus 24 diſpergatur in 20 & 4, aut in 12 & 6 & 6 &c. item ſi numerus *Ex.gr.* 276, ſolvatur in 6, in 30, & 240, quæ ſimul additæ faciunt 276, en itaque modum multiplicandi ope hujus diſperſionis.

Sit Multiplicandus 4325	per	276	*multiplicantem.*
25950	6	6	*Pars prima.*
129750	5	30	*Pars ſecunda.*
1038000	8	240	*Pars tertia.*
1193700			

Videlicet; diſperſo multiplicante 276, in *partes aliquantas* 6, 30, & 240, multiplicetur multiplicandus primo per 6, deinde, quia 6 in ſecunda parte nempe in 30 continetur quinquies, multiplicetur iterum hoc primum productum per 5, porro, quia ſecunda pars nempe 30 in tertia parte nempe in 240 continetur octies, productum ſecundum iterum multiplicetur per 8, deinde facta partialia in unam ſummam collecta dabunt productum totale. Animadvertendum tamen, quod in omnibus factis partialibus initium ſcribendi fieri

de-

debeat ab unitatibus, ſi factores per quos multiplicantur, ſint unitates, ut factum vides in noſtro exemplo.

SCHOLION I.

11. *Hic modus ultimus, etſi nullum videatur eſſe compendium in numeris abſtractis multiplicandis, ut conſideranti patet, habet tamen ſuam utilitatem in numeris mixtis, propterea, quod utens hoc compendio nulla opus habeat Reductione numerorum mixtorum inſtituenda ante vel poſt multiplicationem; videatur ſubjectum exemplum.*

Sint multiplicandi	36 *fl.Germ.*	18 *gr.*	2 *xr.*	*per*	245
	184,	13,	1,	5	5
	1477,	6,	2	8	40
	7386,	13,	1	5	200
Productum	9048,	13,	1		

Primo, multiplicando omnes ſpecies per 5, videlicet 2 xr. per 5 dant 10 xr. hoc eſt 3 gr. 1 xr. & ſubſcripto 1, mente retineantur 3, deinde 18 gr. per 5, dant 90 gr., additis 3, fiunt 93 gr. hoc eſt 4 fl. & 13 gr. & ſubſcriptis 13, mente retineantur 4, deinde 36 fl. per 5 dant 180, & additis 4, fiunt 184; Eodem modo hoc primum productum (nempe 184 fl. 13 gr. & 1 xr.) multiplicetur per 8, & Productum hoc ſecundum, iterum per 5, demum ſingula producta in unam ſummam collecta dabunt Productum totale.

Idem

Idem Exemplum per dispersionem aliam, quæ variari potest.

36 *fl.*	18 *gr.*	2 *xr.*	per	245
184,	13,	1	5	5
1108	—	—	6	30
7756	—	—	7	210
9048,	13,	1		

Quod si fiat dispersio in partes aliquotas per Compendium V. eodem modo, & quidem compendiosus multiplicatio mixtorum absolvitur. Ut sit idem Exemplum per Compendium V. factum.

	36 *fl.*	18 *gr.*	2 *xr.*	per	245
	184,	13,	1	5	
	1292	13	1	7	
Product.	9048	13	1	7	

nam factores 5 & 7 & 7 producunt 245.

SCHOLION II.

12. *Non me latent cumplures modi dispersionis numerorum mixtorum in* partes partium, *&c. quibus* Monetarii, Cambiatores, *caterique in officinis ponderum, monetarum &c. versantes* Ministri, *cum fructu utuntur, verum, quia hi modi determinatæ speciei,* Ponderum, Valorum *&c. inhærent, his referendis supersedemus propterea, quod, quemadmodum usus horum compendiosus est, ita instructio prolixa nimis, Tabulisque compluribus adhæc concinnandis opus habet; quapropter Tyrocinia hujusmodi Arithmetices, iis relinquimus, qui ad officia calculatoria aspirant, de quibus compendiis videri potest* Cl. Poetii *Arithmetica,* *item* Moniet de Claire-Combe dans le Negoce rendu facile, *aliique.*

PRO-

PROBLEMA III.

Divisionem methodo compendiosa instituere.

COMPENDIUM I.

13. Maximum divisionis compendium in numeris abstractis, in casu, quo divisor ex multis notis constat, habetur per Tarissam, vel (*à la Indienne.*) Modum hunc per Tariffam dividendi, tradidimus in *Elementis Mathem. Naturali Philosophiæ Ancillantibus* §. 80. Arith. Potest tamen & hic modus reddi brevior ab exercitatis; scilicet, si pro Tariffa tantum habeatur divisoris *simplum*, *duplum*, & *quintuplum*; nam reliqua, mente duntaxat fieri facile possunt sub ipsa operatione, sic si mentaliter *simplum* addatur *duplo*, habebitur *triplum*, si *duplum* bis summatur, habebitur *quadruplum*, si ad *quintuplum* addatur *simplum* emergit *sextuplum* &c. En Exemplum per Tariffam abreviatam.

Sit divisor 2534, *sitque dividendu* 932512.

	Tariffa	
simplum	2534	1
duplum	5068	2
quintuplũ.	12670	5

```
9325,1,2, (368 quotu.
7602..
———————
17231.
15204.
———————
 20272
 20272
 ——————
 00000
```

SCHO-

SCHOLION.

14. *Habetur quidam modus* Italicus *in numeris abstractis, quem vocant per* Dandam, *verum nihil in hoc compendii video, nisi quod facta ex* divisore *in* quotum *orta mentaliter perficiantur, & una mentaliter etiam subtrahantur; videri potest hic modus fuise expositus in* Epitome Arithm. P. Christoph. Clavii, è S. J. *mihi fol. 76. editionis Coloniensis in 8vo.*

COMPENDIUM II.

15. Miræ brevitatis etiam est divisio per dispersionem divisoris in suos factores partiales, de qua dispersione dictum est (§. 9.) ut sit dividendus 61776 per 24, erit divisor 24, sparsus in 3, & 8. *Vide exemplum.*

Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
3) 61776	(20592	(2574
	& per 8	

Scilicet, si dividendus dividatur per 3 erit quotus 20592, hic quotus iterum divisus per 8, dat quotum secundum petitum 2574, qui haberetur, si per 24 divisus fuisset. Demonstratio habetur à §. 151. ad 155. Algebr. Est autem perinde per quemcunque factorem partialem divisio inchoëtur, ut Exemplum subjectum declarat.

Dividendus.	*Quotus.*	*Quotus secundus.*
8) 61776	(7722	(2574.
	& per 3	

Eodem modo obtinebitur idem quotus, si 24 dispergatur in 4, & 6, vide subjectum Exemplum.

Di-

Dividendus. Quotus. Quotus secundus.
divis. 4) 61776 (15444 (2574.
& per 6

Aliter.

Dividendus.
divis. 6) 61776 (10296 (2574.
divis. 4

SCHOLION.

16. *Cætera compendia inserta habentur Elementis nostris Mathem. (à §. 75. ad 78. Arithm.) & quia dividendus comparatus cum divisore, considerari potest ex Principiis Algebraicis tanquam fractio vulgo spuria uti etiam possumus compendiis, quæ habentur (à §. 118. ad 121. Algeb.)*

CAPUT II.

Compendia Regulæ Aureæ, vel Trium.

Cum in usu Regulæ Aureæ, multiplicatio, & divisio usurpanda sit, patet in praxi omnia compendia, tam multiplicationis, quam divisionis à §. 3. hucusque relata, applicari posse in usu Regulæ Aureæ. At tamen prætetea peculiaria sunt sequentia.

COMPENDIUM I.

17. Si per Terminum *Primum* dividi exacte potest Terminus *Secundus*, vel per eundem Primum *Tertius*, fiat hæc divisio ante usum Regulæ Aureæ, & lucrifiet divisio molestior. *Vide Exempl. I. & II.* Item si Terminus *Secundus*, vel *Tertius* exacte dividat *Primum*, lucrifit multiplicatio. *Vide Exempl. III. & IV.* Demonstratio hujus compendii videri potest in doctrina Proportionum §. 300. Algeb.

EXEMPLUM I.

5 Ulnæ panni veneunt 20 fl. quanti 17 Ulnæ.

erit Proportio $5 : 20 = 17 : x$

per Compend. $1 : 4 = 17 : x$

hoc est multiplic. 4 *per* 17 = 68 *fl.*

EXEMPLUM II.

6 Milites consumunt intra mensem 32 metretas farinæ, quot consument milites 24.

erit proportio $6 : 32 = 24 : x$

per Compend. $1 : 32 = 4 : x$

hoc est multiplic. 32 *per* 4 = 128 *metretas.*

In hisce exemplis nulla fit divisio, propterea, quod primus terminus evadat unitas (1), *quæ non dividit.*

EXEMPLUM III.

Cursor percurrit 100 *Milliaria intra* 8 *dies,* 25 *Milliaria intra quot dies percurret?*

erit $100 : 8 = 25 : x$

Compendium $4 : 8 = 1 : x = \frac{8}{4} = 2$ *diebus.*

EXEMPLUM IV.

8 *Murarii exstruere possunt quoddam Templum annis* 9, *ergo* 16 *Murarii intra quot annos idem opus absolvent, quæ cum sit inversa.*

erit inverse $16 : 8 = 9 : x$

per Compend. $2 : 1 = 9 : x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ *annis.*

Vel vulgariter.

$8 : 9 = 16 : x$

per Compend. $1 : 9 = 2 : x.$

In his lucrifit multiplicatio, cum 1 *non multiplicet.*

SCHOLION.

18. *Animadvertendum tamen, quod si per* secundum *terminum dividi possit* tertius, *vel* tertius *per* secundum, *id fieri minime debeat (ut constat ex doctrina Proportionum) propterea, quod Ratio terminorum tollere-*

leretur, & mutaretur. Compendium hoc eximiæ est utilitatis in Regula præsertim composita, & societatis. Ut Exempla declarant.

EXEMPLUM.

Mercatores 6, aureis 100, mensibus 2, lucrantur 70 aureos, ergo Mercatores 12, aureis 400, mensibus 4, quantum lucrum facient?

In hujusmodi regula composita ante Reductionem ad tres terminos, videatur an termini homologi inter se sint divisibiles; sic in hac quæstione numerus 6 Mercatorum, dividit numerum 12 Mercatorum, & numerus 100 aureorum, dividit numerum 400 aureorum, & denique menses 2, dividunt menses 4, adeoque dividendo, erit

Mercat. 1, aureus 1, mens. 1, lucrum dant 70 aureos, ergo Mercat. 2, aurei 4, mens. 2, quantum dabunt lucrum; hoc est,

$$1 : 70 = 16 : x.$$

Item sit regula societatis: tres Mercatores contulerunt in unam summam florenos 100, primus dedit 24 fl. secundus 30, tertius 46, intra annum lucrati sunt simul 200 florenos, quæritur lucrum singulorum, stabit itaque Proportio per (§. 353. Algeb.)

Pro Primo:	$100 : 200 = 24 : x$
Secundo:	$100 : 200 = 30 : x$
Tertio:	$100 : 200 = 46 : x$

Sed per Compendium ita.

Pro Primo:	$1 : 2 = 24 : x$	*lucrum*	$= 48.$
Secundo:	$1 : 2 = 30 : x$		$= 60.$
Tertio:	$1 : 2 = 46 : x$		$= 92.$

Unde liquet opus tantum esse multiplicatione termini secundi per tertium in singulis proportionibus, dabitque factum, lucrum cujuslibet particulare.

COMPENDIUM II.

19. Quod si terminus secundus, vel tertius sint numeri mixti diversæ speciei, & primus dividat secundum, vel tertium mixtum quidem, sed cui non adhæreant

diverſæ ſpecies, duplex habetur Compendium; Primum eſt, de quo (§.17.) dictum ſecundum autem ex (§.9.) deſummitur. Sic *Ex. gr.*

4 Ulnæ materiæ ſericeæ conſtant 16 fl. 3 gr. 2 xr. quanti erunt ulnæ 48?

erit Proportio 4 : 16 *fl.* 3 *gr.* 2 *xr.* = 48 : x
per Compend. (§.17.) 1 : 16 *fl.* 3 *gr.* 2 *xr.* = 12 : x

Et multiplicando ſecundum per tertium juxta (§.9.)

$$\text{erit}\quad \begin{array}{ccc|c|c} 16, & 3, & 2 & per & 12 \\ \hline 48, & 11, & - & 3 & \\ \hline 194, & 4, & - & 4 & \end{array}$$

hoc eſt 48 ulnæ conſtabunt 194 fl. & 4 groſſ.

SCHOLION.

Hoc Compendio fere ſemper uti licet, quando primus terminus eſt unitas, *imò Exercitatus Compendium reperiet, etiamſi terminus primus ſit major unitate,* Ex. gr. 2, 3, 4, *vel* 5 *&c. per quem diviſus ſecundus, vel tertius, fractionem relinquit.*

COMPENDIUM III.

20. Quod ſi in Regula aurea occurrant meri numeri fracti, tum primi termini fractio invertatur, dein numeratores omnes inter ſe multiplicentur, itemque denominatores inter ſe, dabit producta fractio quæſitum numerum quartum, quæ ſi ſit ſpuria, reducatur per (§.125. Algeb.) *Ex. gr.*

$\frac{1}{2}$ *libra piperis conſtat* $\frac{5}{6}$ *unius floreni, quid conſtabunt* $\frac{3}{4}$ *unius libræ?*

Erit per datum Compendium $\frac{2}{1} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} : x$

hoc

hoc est multiplicando $\frac{2 . 5 . 3}{1 . 6 . 4} = \frac{30}{24}$ *& per* (§.125. *Alg.*)

1 *fl.* $\frac{6}{24}$ *seu* $\frac{1}{4}$ *fl. quæ facit* 15 *xr. simul* 1 *fl.* 15 *xr.*

COMPENDIUM IV.

21. Si denominatores termini primi, & secundi, vel primi, & tertii sint iidem, deletis simpliciter denominatoribus, cum solis numeratoribus tanquam numeris integris operatio absolvatur. Ut in Exemplo.

$\frac{3}{4}$ *unius ulnæ constant* 2 *flor. quid* $\frac{1}{4}$ *ulnæ.*

erit per compendium $3 : 2 = 1 : x$, *hoc est* $\frac{2}{3}$ *unius floreni, seu* 40 *xr.*

EXEMPLUM II.

$\frac{1}{3}$ *centenarii salis constat* $\frac{2}{3}$ *unius fl. quid* $\frac{3}{4}$ *centenarii?*

Erit per compendium $1 : 2 = \frac{3}{4} : x$ *hoc est* $\frac{6}{4}$ *seu* 1 *&* $\frac{2}{4}$, *vel* 1 *&* $\frac{1}{2}$ *unius fl.*

SCHOLION I.

22. *Idem Compendium obtinetur, si sint sub diversis denominatoribus fractiones, modo terminus primus, & secundus, vel primus, & tertius prius reducantur ad eundem denominatorem per* (§. 129. *Algeb.*) Ex. gr.

$\frac{5}{8}$ *unius floreni emuntur* $6\frac{1}{4}$ *libræ aromatum, quot libræ ementur florenis* 60?

	fl.	*libræ*	*fl.*
Erit Reducendo per (§. 129. *Algeb.*)	$\frac{20}{32}$:	$\frac{200}{32}$ =	$60 : x$
hoc est per Compend. (§ 21.)	20 :	200 =	60 : x
& per Compendium I. (§.17.)	1 :	200 =	3 : x = 600 *lib.*
vel etiam per eundem (§.17.)	1 :	10 =	60 : x = 600 *lib.*

SCHOLION II.

23. Quod si integri cum fractis occurrant, praecepimus (§.346. Algeb.) integris subscribendam unitatem; quo facto, integra tanquam fractiones tractando, compendium saepe nanciscimur; nam hoc modo operandi emergunt subinde fractiones sub iisdem denominatoribus, qui, per (§. 21.) deleri possunt. Ex. gr.

$2\frac{3}{4}$ *unius centenarii constant florenos 6, quid constabunt* $8\frac{1}{4}$ *centenarii?*

Erit Proportio $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{4} : 6 = \frac{8}{1}$ & $\frac{1}{4} : x$

hoc est Reducendo: $\frac{11}{4} : 6 = \frac{33}{4} : x$

per (§. 21.) $11 : 6 = 33 : x$

& *per* (§. 17.) $1 : 6 = 3 : x = 18$ *fl.*

COMPENDIUM V.

24. Quod si occurrat proportio, in qua termini duo primi, unitate differunt, & quidem si sit *Ratio majoritatis*, hoc est, si primus sit unitate major, quam secundus, tunc tertius divisus per primum, & quotus emergens subtractus ab eodem tertio, relinquet residuum terminum quartum quaesitum. *Vide exempl. I.* In Ratione vero *minoritatis*, hoc est, si primus sit una unitate minor secundo, quotus emergens ex divisione tertii per primum, additus eidem tertio, dat summam, quae sit terminus quartus quaesitus. *Vide exempl. II. & III.*

EXEMPLUM I.

Constat ex Tab. VIII, Arith. de reductione Numer. Mixt. fol. 83. Element. nostror. quod 103 librae Augustanae, efficiant 102 libras Hamburgenses, quaeritur jam 618 librae Augustanae, quot faciunt Hamburgenses?

Erit

Erit 103 : 102 = 618 : x

divis. dividend. quotus

hoc est 103) 618 (6

subtr. 6

Resid. 612 *libræ Hamburgenses.*

EXEMPLUM II.

In Ratione minoritatis.

5 *floreni Germ. faciunt* 6 *Ung. in Transylvania*, 65 *fl. Germ. quot facient hujusmodi Ungaricales flor.*

divis. divid. quotus.

5) 65 (13

adden. 13

Summa 78 *fl. Ungar.*

EXEMPLUM III.

4 *ulnæ Viennenses faciunt* 5 *ulnas Transylvaniæ, ulnæ Viennenses* 180, *quot dabunt Transylvanicas?*

divis. divid. quotus.

4) 180 (45

adden. 45

225 *ulnæ Transylvanicæ.*

Quod si quæratur 5 *ulnæ Transylvanicæ dant* 4 *ulnas Viennenses, ergo ulnæ Transylvaniæ* 225, *quot dabunt Viennenses?* Erit per casum primum hujus.

divis. divid. quotus.

5) 225 (45

subtr. 45

180 *ulnæ Viennenses.*

SCHOLION.

25. *Egregium est hoc Compendium in reducendis mensuris, ponderibus, & monetis, quarum certa Ratio unitate differt; ut in datis circumstantiis utenti constabit. Sic, si velit quis Bacios Italicos reducere ad nostram monetam, (valet autem Bacius* 4 *xr.)* Ex. gr. 567 *Bacii, quot faciunt gross. cum* 3 *Bacii faciunt* 4 *gross. nostrates. Erit*

divis. divid. quotus.

3) 567 (189

Addend. 189

---

756 *groff.* *seu* 37 *fl.* 16 *groff.*

Sed de his Reductionibus in capite sequenti agetur; Industrius Arithmeticus ex his compendiis, quæ hucusque dicta sunt, facile sibi alias vias breviores reperiet, maximè si Algebra instructus sit, ex qua etiam hæc fluxêre compendia.

CAPUT III.

De Compendiis, & Praxibus Reductionum numerorum mixtorum.

In Parte III. Arithmeticæ nostræ Tom. I. actum est de Reductione in genere, & per regulas universales, omissis compendiis, & praxibus variis, ne molem libelli augeremus, quæ his exercitationibus reservata, nunc prosequemur. Quamvis autem praxis Reductionum omnium absolvi possit per Regulam auream, nihilominus compendium universale operandi per *excessum*, vel *defectum* unius speciei supra alteram in hac materia non potest non esse summe utilis. Itaque

COMPENDIUM I.

Reducere speciem datam majorem ad minorem in monetis, mensuris, & ponderibus.

26. *Primo:* Notum esse debet operandi, quot unitatibus speciei minoris, species major minorem superet; *Ex.gr.* florenus Germ. superat florenum Ung. in Transylvania usitatum $\frac{20}{100}$ unius flor.Ungaricalis; nam fl. Ung. habet 100 Nummos, quales in fl.Germ. habentur 120, ergo superat 20 Nummis, hoc est $\frac{20}{100}$ seu $\frac{2}{10}$ aut $\frac{1}{5}$ de floreno Ung. & ita de aliis ratiocinandum.

Se-

Secundo: Per hunc excessum multiplicetur datus numerus major reducendus, Productum hoc addatur ad numerum majorem, erit summa quæsitus numerus minoris speciei.

EXEMPLUM I.

Sint reducendi 340 fl. Germ. ad Transylv. Ungar. cum florenus Germ. superet Transylv $\frac{1}{5}$, *erit multiplicando* $\frac{340}{5}$, *hoc est 68 fl., qui additi ad*

$$\begin{array}{r} 340 \\ 68 \\ \hline \end{array}$$

faciunt 408 *fl. Ung.*

EXEMPLUM II.

Unus Bacius Ital. valet 4 xr. adeoque superat grossum nostratem $\frac{1}{3}$ *gross. nostratis (hoc est 1 xr.) sint igitur reducendi 258 Bacii ad grossos nostrates, erit multiplicando* $\frac{258}{3}$ *hoc est 86, qui additi ad 258 faciunt 344 grossos, seu 17 fl. 4 gr. nostrates.*

EXEMPLUM III.

Pes geometricus Parisinus superat pedem Viennensem $\frac{20}{1420}$ *seu* $\frac{1}{71}$, *itaque pedes Paris. 1704, quot faciunt Viennenses?*

Erit $\frac{1704}{71}$ *hoc est 24, qui additi ad 1704, faciunt 1728 pedes Viennenses.*

EXEMPLUM IV.

Centenarius Vratislaviensis, (ut constat ex Tab. VIII. Arith. fol. 83.) superat Lipsiensem $\frac{20}{105}$ *seu* $\frac{4}{21}$ *igitur 567 Centenarii Vratislavienses quot faciunt centenarios Lipsienses?*

Erit $\frac{2268}{21}$, *hoc est 108, qui additi ad 567, faciunt 675 centenarios Lipsienses.*

COM-

COMPENDIUM II.

Reducere ſpeciem minorem ponderis, menſuræ, aut monetæ ad ſpeciem majorem.

27. *Primo:* Notum debet eſſe operanti (uti in priori Compendio) quot unitatibus ſpeciei majoris, deficiat ſpecies minor ad æqualitatem conſtituendam.

Secundo: per hunc defectum multiplicetur ſpecies minor reducenda, & factum ſubtrahatur à ſpecie minore, erit reſiduum, ſpecies minor reducta ad majorem. *Claritatis gratia, exempla prioris compendii aſſumemus, eaque ex data ſpecie minore ad majorem reducemus.*

EXEMPLUM I.

Sint reducendi 408 *fl. Ung. Tranſylv. ad Germanicales, cum florenus Ung. deficiat à floreno German.* $\frac{20}{120}$ *ſeu* $\frac{2}{12}$ *id eſt* $\frac{1}{6}$, *erit factum* $\frac{408}{6}$ *ſeu* 68, *hoc*

Factum à 408
ſubtrab. 68

- *Reſiduum* 340 *ſeu floreni Germ. qui æquales ſunt flor. Ung.* 408. Vide Exempl. I, Comp. I, (§. 26.)

EXEMPLUM II.

Sint Reducendi 344 *groſſi noſtrates ad Batios Ital. cum groſſus noſtras deficiat à Bacio* $\frac{1}{4}$ *Bacii, erit multiplicando* $\frac{344}{4}$, *hoc eſt* 86, *hoc Productum à* 344
ſubtrab. 86

Reſid. 258 *Bacii.*

Vide Exempl II, ejusdem (§. 26.)

Ex-

EXEMPLUM III.

Sint Reducendi pedes Viennenses 1728 *ad pedes Parisinos, deficit autem pes Viennensis à pede Parisino* $\frac{20}{1440}$ *seu* $\frac{2}{144}$, *hoc est* $\frac{1}{72}$, *igitur multiplicando* 1728 *per* $\frac{1}{72}$ *erit productum* $\frac{1728}{72}$, *seu* 24 *pedes, qui subtracti à* 1728, *dant residuum* 1704 *pedes Parisinos, quibus dati pedes Viennenses* 1728 *æquivalent.* Vide Exempl. III. (§. 26.)

EXEMPLUM IV.

Sint Reducendi 675 *centenarii Lipsienses ad centenarios Vratislavienses; centenarius Lipsiensis deficit à centenario Vratislaviensi* $\frac{20}{125}$ *seu* $\frac{4}{25}$, *ergo multiplicando* 675 *per* $\frac{4}{25}$ *erit Productum* $\frac{2700}{25}$, *hoc est* 108 *centenarii, qui subtracti à* 675, *relinquunt* 567 *centenarios Vratislavienses.*

SCHOLION I.

28. *Quanta harum Reductionum sit necessitas, atque utilitas, norunt* Præfecti Militum, annonæ, commeatuum, Magistri Ponderum, & Monetarum, Mercatores item & Cambiatores, *itemque Philosophiæ naturali operam dantes, aut Civilis etiam conditionis homines, qui varias terræ Regiones peragrantur, victualia, merces emendas, vendendas, pecunias item exigendas, permutandas colligendas, expendendas &c. ex officio habent, Quanta porro hinc Algebraicæ Scientiæ commendatio accedat, cui hæc singularia inventa in acceptis ferre debemus, nemo ratione præditus, nisi forte pinqui minerva ad stivam natus, insiciabuur.*

SCHOLION II.

29. *Quod si quis invenire desideret* æquivalentiam *in terminis minimis duarum specierum alias valore differentium, id est, quot unitates speciei minoris adæquent*

quent certas unitates speciei majoris; Ex. gr. *si quis quærat in terminis minimis, quot numero fl. Ungar. Transylvanici adæquant certum numerum florenorum Germ. in terminis minimis; id facile invenietur, modo sciatur excessus speciei majoris supra minorem in partibus minoris speciei, expressis per fractionem;* Nam multiplicando unitatem utriusque speciei per denominatorem fractionis, quæ excessum exhibet, & numeratorem ejusdem fractionis addendo speciei minori, habebitur æqualitas duarum specierum in terminis minimis. *Utilissimum hoc Problema, cujus ope Reductiones specierum diversarum per* Regulam auream *indagari possunt, apud Arithmeticos audit* (La Regle de Pareille, ou Pary.)

EN EXEMPLUM I.

1 *florenus Germ. æqualis est* 1 *fl. Ung. Transf. plus* $\frac{1}{5}$ *ejusdem floreni Transylv. hoc est;* 1 *fl. Germ.* = 1 *fl. Ung. Transf.* & $\frac{1}{5}$. *Igitur multiplicando per denominatorem, de* $\frac{1}{5}$ *seu per* 5 *tam* 1 *fl. Germ. quam* 1 *fl. Ung. Transylv.* & *numeratorem* 1, *addendo ad Ungaricales, erunt* 5 *fl. Germ. æquales* 6 *fl. Ung. Transylv.*

EXEMPLUM II.

1 *Ulna Viennensis æquivalet* 1 & $\frac{1}{4}$ *ulnæ Transf. ergo multiplicando per denominatorem* 4 *utramque speciem,* & *numeratorem* 1, *addendo ad ulnas Transf. erunt* 4 *ulnæ Viennenses æquales* 5 *ulnis Transylv.*

SCHOLION III.

30. *Hinc si habeatur hujusmodi Ratio æqualitatis duarum specierum, reductio facile habebitur* (*per* Regulam auream) *specierum quarumvis. Ut si quæratur* 80 *ulnæ Viennenses, quot faciunt Transylvanicas, erit proportio*

$4 : 5 = 80 : x$ *fient* 100 *ulnæ Transyl.*

Si vero quæratur ex data specie minore major, tum fiat inverse, ut si quæratur 100 *ulnæ Transyl. quot faciunt Viennenses, erit*

$5 : 4 = 100 : x$, *fient* 80 *ulnæ Viennenses.*

PROBLEMA.

31. *Speciem datam quamvis Reducere ad aliam ſpeciem quamvis, in caſu quo æquivalentia unius ſpeciei ad alteram ad plures intermedias comparata datur. Ex. gr.* Si quæratur; 56 libræ Norimbergenſes, quot faciunt libras Vratislavienſes, datis æquivalentiis intermediis hujusmodi:

25 libræ Vratislav. æquivalent 21 libris Lipſienſibus, & 105 libræ Lipſienſes æquivalent 98 libris Norimberg.

RESOLUTIO.

Multiplicentur 25 per 105, Productum 2625 iterum multiplicetur per 56 (nempe per datas libras reducendas) & habebitur Productum 147000. Deinde multiplicentur 21 per 98, fiet productum 2058, per hoc dividatur 147000, & quotus $71\frac{3}{7}$ dabit libras Vratislavienſes æquivalentes libris 56 Norimbergenſibus.

Si verò datis $7\frac{3}{7}$ libris Vratislavienſibus, quæreretur, quot faciant libras Norimbergenſes ſecundum datas intermedias æquivalentias, tali caſu dati ſupra termini invertantur, & dicatur.

98 libræ Norimbergenſ. æquivalent 105 Lipſienſibus, & 21 libræ Lipſienſes æquivalent 25 Vratislav.

Itaque multiplicando 98 per 21, fit Productum 2058, quod multiplicatum per datas

datas $71\frac{3}{7}$ libras Vratislav. facit $\frac{1029000}{7}$ seu 147000, deinde multiplicando 105 per 25 producitur 2625, per quod dividendo 147000 reperitur quotus 56 libræ Norimbergenses æquivalentes $71\frac{3}{7}$ libris Vratislaviensibus, ut prius.

SCHOLION.

32. *Problema hoc utilissimum à Gallis Arithmeticis vocatur* La Regle Conjointe, *quasi Regula composita, aut conjuncta*, *item* La Regle des Arbitrages, *seu Arbitratûs*, *quasi decisoria negotii cujuspiam utrum utile, an damnosum sit; utuntur autem hac regula non solum Monetarii, & Cambiatores, sed cumprimis Mercatores, quemadmodum* §. 28. *dictum.*

CAPUT IV.

Praxes scitu necessariæ circa usum Regulæ Aureæ in genere.

De usu Regulæ aureæ in Elementis nostris Algebr. à §. 344. ad 356, actum in compendio, copiosius hic nobis agendi locus datur; habetur ibidem §. 346 Regula universalis de disponendis terminis in proportionem, seu in Regulam auream, in casu Regulæ simplicis, & directæ, quæ hujusmodi est: *Ut termini ordine in quæstione proposito in proportionem ordinentur*, intelligendo si ordine naturali, & debito proponatur Quæstio. Quia tamen seu ob enunciantis indebitum quæstionem concipiendi modum, seu ad periclitandam Tyronum scientiam consulto quæstiones præpostero non nunquam ordine proponuntur, idcirco ad tollendum dubium omne, quod in casu Regulæ directæ de ordinandis terminis oriri posset, sequens Problema subjungo pluribus illustrandum exemplis.

PRO-

PROBLEMA.

33. *Terminos in casu Regulæ Aureæ directæ, quocunque præpostero ordine propositos, debite in regulam auream ordinare, & collocare.*

RESOLUTIO.

Regula unica: Terminus, qui adnexam habet quæstionem (seu *de quo* quæritur) statuatur loco *tertio;* huic tertio termino *homogeneus*, seu *similis* ponatur loco *primo; secundo loco* ponatur terminus, cui *quæsitus* est similis, seu *homogeneus*. Sit itaque

QUÆSTIO I.

34. Quanti constat 1 libra sacchari, si ejusdem sacchari 60 libræ constant fl. 30. *Vides in hoc casu præpostero ordine terminos positos, nam ordinate sic proponi debent;* Si 60 libræ sacchari constant 30 fl. *quanti erit 1 libra?* Hinc termini juxta datam regulam sic ordinabuntur.

$$\begin{array}{l} \textit{lib. fl. lib. fl.} \\ 60 : 30 = 1 : x \end{array}$$

& per compendium $2 : 1 = 1 : x$, *facit* $\frac{1}{2}$ *fl. seu* 30 *xr.*

QUÆSTIO II.

35. Si 10 libræ ceræ flavæ emuntur 5 fl., quot libræ ejusdem ceræ ementur fl. 90? *& hæc quæstio præpostere concepta est, debetque ordinari hoc modo:* florenis 5 emun-

emuntur 10 libræ, ergo 90 fl. quot libræ ementur? hinc

$$\begin{array}{lcl} & \textit{fl. lib. fl. lib.} & \\ & 5 : 10 = 90 : x & \\ \textit{per compendium} & 1 : 2 = 90 : x & \\ \textit{vel etiam} & 1 : 10 = 18 : x & \textit{fiunt libræ } 180. \end{array}$$

QUÆSTIO III.

36. Quanti conſtabunt $\frac{3}{4}$ unius ulnæ panni, ſi $\frac{1}{2}$ ulnæ conſtat $\frac{2}{3}$ unius fl. Ger. *Hæc indebite propoſita, ſic ordinatur*: ſi $\frac{1}{2}$ ulna panni conſtat $\frac{2}{3}$ flor. quid conſtabunt $\frac{3}{4}$ unius ulnæ? hoc eſt:

$$\begin{array}{c} \textit{uln. fl. uln. fl.} \\ \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : x \end{array}$$

$$\textit{ſeu per (§.20.)}\quad \frac{2}{1} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} : x \ \textit{facit}\ \frac{12}{12}\ \textit{hoc eſt}\ 1\ \textit{fl.}$$

QUÆSTIO IV.

37. Studioſus profectus ad Academiam literis operam daturus per annos 6, animadvertit ſe 7 menſibus expendiſſe fl. 35, quæritur quanta ſumma pecuniæ egeat ad abſolvenda ſtudia? NB. *Annus hic ſummitur ſcholaſticus 10 menſium.* Itaque reſoluti 6 anni in menſes, erit

$$\begin{array}{lcl} & \textit{menſ. fl. menſ. fl.} & \\ & 7 : 35 = 60 : x & \\ \textit{per compendium} & 1 : 5 = 60 : x & \textit{fiunt 300 florent.} \end{array}$$

QUÆ-

QUÆSTIO V.

38. Curſor quidam conficit diebus 7, milliaria 84, volo ſcire, quot diębus conficeret milliaria 192, ſi nempe ſingulis diebus æqualem numerum milliarium conficeret; *hæc ordinate ſic poni debet:*

milliar. dies, milliar. dies
84 : 7 = 192 : x
& per Compend. 12 : 1 = 192 : x *fiunt dies* 16.

SCHOLION.

39. *Exercitii, aut Examinis loco in uſu regulæ aureæ, eadem quæſtio quatuor vicibus repeti poteſt, ſi nempe termini alias dati pro quærendis ponantur; En praxim.*

I.

Quidam in Nundinis florenis 24 *emit ulnas panni* 20, *quanti conſtabunt ulnæ* 100 *ejusdem panni? ſtabit ordinate.*

ulnæ. fl. ulnæ. fl.
20 : 24 = 100 : x
per Compend. 1 : 24 = 5 : x *fiunt* 120 *floreni.*

II.

Quidam emit 20 *ulnas panni florenis* 24, *quot ulnas panni emet florenis* 120, *erit ordinatè:*

fl. ulnæ. fl. ulnæ.
24 : 20 = 120 : x
per Compend. 1 : 20 = 5 : x *fiunt ulnæ* 100, *ut prius.*

III.

Quidam certa ſumma pecuniæ emit ulnas panni 20, *& eodem pretio deinde emit ulnas* 100, *flor.* 120, *quæritur quid expendit pro primis* 20 *ulnis? erit ordinate:*

ulnæ. fl. ulnæ. fl.
100 : 120 = 20 : x
per Compend. 5 : 120 = 1 : x *fiunt fl.* 24, *ut prius.*

IV.

Quidam aliquot ulnas panni emit fl. 24, deinde alius quispiam ex eodem panno fl. 120 emit ulnas 100, quot ergo ulnas prior emit; itaque ordinate:

	fl. uln. fl. uln.	
	120 : 100 = 24 : x	
per Compend.	5 : 100 = 1 : x	
vel etiam	12 : 10 = 24 : x	*fiunt* 20 *ulnæ.*

SCHOLION.

40. *Ex adductis exemplis liquet, quam varia ratione termini eruantur, & quomodo eadem quæstio variari possit; nunc ad usum Regulæ aureæ variis quæstionibus utilissimis applicatæ gradum faciamus.*

CAPUT V.

Regula Aurea ad usum Oeconomicum, & Civilem applicata.

QUÆSTIO I.

41. Paterfamilias conducit tres servos, quibus singulis in dies singulos præter victum, & vestitum statuit dare 4 xr. itaque cupiens inire rationes, quantum sumptuum in omnes tres, una cum victu, & vestitu spacio unius anni impensurus sit; victûs pretium diurnum æstimatur 6 xr. vestis annuæ pretium censetur fl. 10.

Ante regulam auream opus est, ut diurna singulorum in pecuniam conversa addantur, & habebitur summa expensarum omnium pro una die; hoc est, cum singuli percipere debeant indies 4 xr. solutionis, 6 item xr. in victum, acquirent singuli 10 xr., cumque sint servi 3, in ternos expendentur indies 30 xr. fiat ergo regula aurea.

1 *die*

1 die consummunt 30 xr., quantum consumment 365, hoc est anno uno ordinario, aut diebus 366 anno bisextili; & habebitur proportio:

dies xr. dies

1 : 30 = 365 : x, fiunt 10950 xr. seu fl. 182, & 30 xr. pro anno verò bisextili 183 fl.

Quibus pretium vestitûs 30 fl. additi efficiunt summam 212 fl.

Quod si 30 xr. exprimantur per $\frac{1}{2}$ fl. habebitur compendium sine Reductione, erit enim:

$1 : \frac{1}{2} = 365 : x$, *hoc est* $\frac{365}{2}$ *seu* 182, *&* $\frac{1}{2}$ *fl.*

Si idem Paterfamilias scire cupit sumptus unius servi pro anno uno erit proportio:

dies xr. dies

1 : 10 = 365 : x fiet 3650 xr. seu 60 fl. 50 xr.

aut per Compend. $1 : \frac{1}{6}$ *fl.* $= 365 : x$, *erit* $\frac{365}{6}$, *seu 60 fl.* $\frac{5}{6}$, *id est 50 xr., & cum pretio vestis 10, erunt 70 fl. 50 xr.*

QUÆSTIO II.

42. Idem Paterfamilias conductum servum pro mercede diurna habentem 4 xr. pro victu diurno 6 xr., & pro veste annua 10 fl., præstitô obsequiô per hebdomadas 27, & 3 diebus, ex obsequiis dimittit; *Quærit igitur quantum eidem ex conventione pro fidelibus obsequiis pendendum sit?*

Quod si velit totam summam pro 27 septimanis, & 3 diebus quærere, primum quærere debet, juxta regulam auream priori quæstione positam, quid toto *anno meritus fuisset, reperietur autem una cum vestitu mereri 70 fl. 50. xr.*

Tum 27 septimanæ reducantur ad dies, quod fiet multiplicando per 7, fientque dies 189, & cum 3, erunt 192; deinde resolvantur 70 fl. ad cruciferos, & reperientur cruciferi 4200, & cum 50 xr. fient 4250, quibus præstitis fiat regula aurea hujusmodi:

dies xr. dies xr.

365 dant 4250 = 192 : x, & reperiet 2235 xr. cum fractione unius cruciferi, superante dimidium cruciferum, adeoque meretur servus hujusmodi pro 27 septimanis, & 3 diebus fl. 37, & 15 $\frac{1}{2}$ xr.

Quod si idem Paterfamilias secluso victu, tantum pecuniam diurnam, & vestem computare velit, eodem modo per regulam auream reperiet, pro 27 hebdom. & 3 diebus, mercedem 18 fl. 3 xr. & $\frac{1}{2}$ fere.

Si servus hic interea temporis ad rationes suæ conventionis certam summam pecuniæ percepisset à Domino, hæc ab inventa summa subtracta, relinquet residuum eidem pendendum.

QUÆSTIO III.

43. Quidam mutuos dedit fl. 25360 in censum annuum 5 pro 100, quærit censum unius anni? fiat

	100 : 5 = 25360 : x
per Compend.	20 : 1 = 25360 : x
brevius	2 : 1 = 2536 : x *fiet census annuus* 1268 *fl.*

Ultimum Compendium suppeditat novum Compendium eruendi census annui data quacunque summa capitali, supponendo censum 5 pro 100; Nam si ex summa ma capitali abſcindatur nota ultima, & reliquum dividatur per 2, erit quotus cenſus quæſitus; ut ſi quæratur cenſus 5 pro 100 ex capitali 2400.

divid. quotus.
erit diviſ. 2) 240 (120 *floreni censûs.*

Hoc Compendio in quærendo cenſu 6 pro 100 uti non licet, per hanc tamen quæſtionem eruitur.

QUÆSTIO IV.

44. Quidam datos 25360 fl. mutuos ad cenſum 5 pro 100, poſt annos 3, & hebdomadas 13, repetit capitale una cum cenſu, qui interea temporis perſolutus non eſt; Quæritur quantam ſummam una cum capitali percipiet?

Primo: per priorem (§.43.) reperietur cenſus pro uno anno 1268 fl. hunc multiplicando per 3, erit cenſus pro annis tribus 3804, deinde quæratur per regulam auream cenſus pro 13 ſeptimanis, ſeu 91 diebus inferendo;

365, *dant* 1268, *quid* 91, *& reperientur* 316 *fl.* 7 *xr.* & $\frac{65}{73}$.

itaque capitale 15360, *cenſus item 3 annorum* 3804, *& nunc reperti* 316 *fl.* 7 *xr. in unam ſummam additi efficiunt* 29480 *fl.* 7 *xr.* $\frac{65}{73}$, *ſumam nempe percipiendam.*

QUÆSTIO V.

45. Quidam ſcire cupit ſummam capitalem, quæ ex cenſu 5 pro 100, dat annuum cenſum 1268 fl. itaque hoc ordine habebuntur termini

5 *dant* 100, *quid* 1268
& per Comp. 1 : 20 = 1268 : x *fiet capit.* 25360 *fl.*

QUÆSTIO VI.

46. *Stephanus* mutuos dedit *Paulo* florenos 6000 pro annis 4, quos cum *Paulus* redderet, *Stephanus* censum recipere noluit, verùm petiit, ut ei vicissim *Paulus* 8000 fl. ad certum tempus sine censu mutuo daret. Quæritur quamdiu *Stephanus* pecuniam 8000 fl. retinere possit, ut sibi ex æquo satisfiat pro præstito beneficio per 6000 fl. quos *Paulo* commodaverat?

Hoc casu opus est regula inversa, cum 8000 fl. citius refundant eundem censum, quam 6000 fl. & hinc terminus, qui tertium locum occuparet, ponatur loco primo, & primus loco secundo vel tertio, juxta doctrinam (§. 348. Alg.) qua transpositione terminorum facta, fiat regula directa:

	flor.	flor.	an.	an.
Itaque	8000 :	6000 =	4 :	x
per Comp.	8 :	6 =	4 :	x
brevius	2 :	6 =	1 :	x,

fient anni 3, quibus pecuniam 8000 fl. sine censu Stephanus retinere potest; Nam 8000 fl. intra 3 annos (computando 5 pro 100) dant censum 1200 fl. sed etiam 6000 fl. per 4 annos dant censum 1200, ergo habetur æqualitas. Neque verò existimandum tantum 5 pro 100 satisfacere quæstioni, nam quivis census alius satisfaciet, modo utrinque idem supponatur census.

QUÆSTIO VII.

47. Quidam sibi vestem curaturus scit opus esse 8 ulnis panni, cujus latitudo sit $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, vult pannum emere cujus latitudo sit unius ulnæ, seu $\frac{4}{4}$, quæritur, quot ulnis ex hoc latiore panno pro eadem

veste

veſte opus habeat? *Hæc iterum inverſam eſſe, ex ſtatu quæſtionis cognoſcitur. Igitur*

$$\textit{ut } \frac{4}{4} : \frac{3}{4} = 8 : x$$

per (§. 21.) $4 : 3 = 8 : x$

brevius $1 : 3 = 2 : x$ *fiunt ulnæ 6.*

QUÆSTIO VIII.

48. In omni recte conſtituta Civitate, Piſtoribus lege cautum eſt, ut pro ratione pretii tritici, panem (qui ſit ejusdem pretii) majoris, minorisve ponderis conficiant; *Eſto caſus:* ut dum cubulus tritici emitur 2 fl. Germ. panis, qui groſſo venditur, juxta rectas leges Civitatis cujuspiam, ponderare debeat 3 libras, ſit jam pretium vilius, *Ex. gr.* ſit pretium unius cubuli 1 fl. 30 xr. quæritur quot librarum panis (qui groſſo vendatur) confici debeat? cum ſit regula inverſa utendum, erit reductis, & transpoſitis terminis proportio:

	xr.	*xr.*	*lib.*	*lib.*	
	90 :	120 =	3 :	x	
& per Comp.	30 :	120 =	1 :	x	
brevius	3 :	12 =	1 :	x	*fiunt libræ 4 pro uno*

groſſo, ut examinanti patebit, cum 4 lib. ſint ad 3 lib. ſicut 120 xr. ad 90 xr.

QUÆSTIO IX.

49. Obſeſſus quidam exercitus 8500 Militum victum habet pro 11 menſibus, verum cum ſpes ſolvendæ obſidionis nulla ſit, niſi poſt menſes 25; *quæritur, quot*

Milites retinendi sint, ut reliquis victus sufficiat pro 25 mensibus? hæc quæstio iterum per regulam inversam solvenda:

mens. mens. Milit.
11 : 25 = 8500 : x , *& emergit numerus Militum* 3740 , *sunt ergo dimittendi* 4760.

QUÆSTIO X.

50. Si 10 equis 1 die dentur 7 mensuræ hordei, vel avenæ, quot mensuræ juxta eandem distributionem convenient 100 equis pro diebus 20. *Hæc per regulam compositam directam solvenda juxta (§. 350. Algeb.) hoc est:*

Equi dies mensur. Equi dies
(10 . 1) *consumunt* 7 , *ergo* (100 . 20) : *quantum?*
erit 10 : 7 = 2000 : x
per Compend. 1 : 7 = 200 : x, *& fient mensuræ* 1400.

QUÆSTIO XI.

51. In 3 Servos intra 4 hebdomadas pro pane expenduntur 2 fl. 6 xr., quid pro uno Servo per diem? *& hæc composita directa est; itaque*

Serv. dies xr. Serv. dies xr.
(3 . 28) : 126 = (1 . 1) : x

hoc est 84 : 126 = 1 : x , *& fiunt* $1\frac{1}{2}$ *xr. seu medius grossus.*

QUÆSTIO XII.

52. Piscinam quandam habentem 30 orgyas quadratas, 10 operarii repurgant diebus 12, habetur alia piscina repurganda

da 40 orgyarum quadratarum pro qua conducuntur homines 20, quæritur quot diebus eandem repurgabunt. *Hic opus est regula composita inversa, cum dies sint in ratione inversa operariorum; itaque per (§. 351. Algeb.)*

	oper. org. dies	*oper. org. dies*
	(20 . 30) : 12 =	(10 . 40) : x
seu	600 : 12 =	400 : x
per Compend.	6 : 12 =	4 : x
brevius	1 : 2 =	4 : x *fiunt dies* 8.

SCHOLION.

53. *Cum usus regulæ aureæ in œconomicis, & vita civili non magis eluscescat, quam ex diversis casibus Mercatorum, qui toti sunt in lucro quærendo, aut damno avertendo, cætera, quæ ad usum œconomicum faciunt, ex capite sequenti repeti poterunt.*

CAPUT VI.

De usu Regulæ Aureæ ad Quæstiones Mercatorum applicatæ.

QUÆSTIO I.

54. Quidam mercator Claudiopolitanus Lipsiæ emerat sacchari libras Lipsienses 1000, quæ Lipsiæ constiterant fl. Germ. 300. Exposuit autem pro his præterea Lipsiæ in vectigal fl. 15, in Telonia, & Tricesimas usque Claudiopolim inclusive expendit fl. 30, in vecturam, & viaticum servorum impendit fl. 55. Cupit autem in singulis libris sacchari ponderis Viennensis lucrari 2 grossi. Quærit igitur quanti hic

Claudiopoli vendere debeat unam libram Viennenſem, ut in ſingulis lucretur 2 gr.

RESOLUTIO.

Primum oportet, ut expoſita particularia in unam ſummam addat. videlicet:

		fl.
In 1000 *libr. ſacchari*	-	300
In Vectigal Lipſienſe	- -	15
In Telonia, & Triceſim.	-	30
In Vecturam, & Servos	-	55
Summa expoſitorum	-	400 *fl.*

Conſtant ergo 1000 *libræ Lipſienſes hic Claudiopoli Mercatorem hunc florenos Germ.* 400.

Secundo: Cum hic Claudiopoli non Lipſienſes, ſed Viennenſes libras diſtrahere debeat, oportet, ut indaget, quotnam libras Viennenſes faciant 1000 libræ Lipſienſes, eſt autem libra Lipſienſis minor $\frac{1}{4}$ quam Viennenſis, hoc eſt per (§. 29.) 5 libræ Lipſienſes faciunt 4 Viennenſes,

hinc per (§. 24.) *diviſ.* 5) 1000 (200
ſubtr. 200
Reſid. 800 *lib. Viennenſes.*

Faciunt ergo 1000 *libræ Lipſienſes*, 800 *libras Viennenſes.*

Tertio: Inquirat per proportionem, quanti illum hic in loco conſtet una libra Viennenſis. Dicendo, ſi 800 lib. Vien. conſtant 400 fl. quid 1.

ſeu $800 : 400 = 1 : x$

per Compend. $2 : 1 = 1 : x$ *fiet* $\frac{1}{2}$ *fl. ſeu* 10 *gr.*

vult

vult itaque in singulis libris Vien. lucrari 2 grossos, ergo singulas libras vendere debet grossis 12. Quod erat inveniendum.

QUÆSTIO II.

55. Hic idem Mercator emptam libram sacchari 10 grossis, eandem vendendo gr. 12, scire cupit, quantum lucrum habiturus sit pro 100. *Itaque si scire cupit purum lucrum, cum 10 grossi lucrentur 2 gr. sit proportio:*

$$10 : 2 = 100 : x$$

per Comp. $5 : 1 = 100 : x$, *fiet lucrum* 20 *pro* 100.

Quodsi scire cupiat lucrum una cum pecunia exposita inferat $10 : 12 = 100 : x$
per Compend. $1 : 12 = 10 : x$ *fiet* 120, *hoc est pro* 100 *expositis recipiet una cum lucro* 120, *a qua summa si expositi* 100 *subtrahantur, eodem modo reperitur purum lucrum esse* 20 *pro* 100.

SCHOLION.

56. *Si idem Mercator scire cupiat in specie monetæ determinata, perinde est, nam si in priori quæstione terminus primus* 10 *sunt grossi, & secundus terminus* 2 *etiam grossi, tunc quoque tertius terminus* 100, *etiam erunt grossi, adeoque quartus dabit etiam grossos* 20; *eodem modo discurrendum de quacunque moneta. Et quia quæstio in abstracto priori quæstione posita satisfacit omnibus speciebus monetæ, hinc sufficit in abstracto solvere, & numeros abstractos eosdem monetis quibusvis applicare; sic si rem emptam* 10 *grossis, vendendo* 12 *grossis lucror* 20 *groff. pro* 100, *etiam rem emptam* 10 *florenis vendendo* 12 *florenis, lucror* 20 *pro* 100, *seu quod idem est, rem emptam* 10 *grossis vendendo* 12 *grossis in* 100 *florenis lucror* 20 *floreno, est enim eadem proportio* 10 *grossorum ad* 2 *grossos, quæ* 10 *fl. ad* 2 *fl., aut* 20 *grossi ad* 100 *grossos eandem proportionem dicunt, quam habent* 20 *flor. ad* 100 *flor. idem ergo est de quacunque moneta.*

QUÆSTIO III.

57. Mercator quidam emit complures libras croci ſingulas à fl. 10, jam verò ex contracto vitio quodam libram hujus croci diſtrahere nequit, niſi 8 groſſis, quæritur quantum damnum habiturus ſit pro 100. Quæſtio hæc, ut Quæſtio II. antecedens ſolvi debet; qui enim emit rem 10, & diſtrahit 8 groſſis perdit 2 groſſos; ergo per proportionem.

$10 : 2 = 100 : x$

$1 : 2 = 10 : x$ *fit* 20 *fl. damnum, hoc eſt loco* 100 *recipiet tantum* 80 *florenos.*

Sic quoque ſi emo rem quampiam 8 *Nummis, & vendo* 5, *perdo* 3 *nummos, hoc eſt, ut* $5 : 3 = 100 : x$ *fit damnum* 60 *Nummi pro* 100 *Nummis, ſeu loco* 100 *fl. acquiro tantum* 40 *florenos, aut loco* 100 *groſſorum, tantum* 40 *groſſos.*

QUÆSTIO IV.

58. Quærit apud ſe Mercator, quanti emendæ ſint ulnæ 100 panni, ut eædem poſtea venditæ 63 florenis, lucrum dant 5 pro 100. *In hac quæſtione manifeſtum eſt, qui vult 5 pro 100, vult habere 105 loco 100.* Itaque ſi 105 dant 100, quid 63? fient floreni 60 pro ulnis panni 100 dandi, ut patet ex ſubjecta proportione:

fl. lucrum

Si 60 *dant* 3, *quid* 100? *fient* 5 *fl. pro* 100, *ut quærebatur.*

QUÆ-

QUÆSTIO V.

59. Volumen quoddam prætioſæ materiæ emptum eſt certo numero aureorum, quod ſi venderetur à Mercatore 180 aureis, damnum pateretur 10 pro 100. *Quæritur quanti Mercator emerit hoc volumen materiæ?* Itaque qui perdit 10 pro 100, facit ex 100 aureis, aureos 90; inferatur ergo, ſi 90 fiunt ex 100, ex quo fient 180?

hoc eſt $90 : 100 = 180 : x$

per Compend. $1 : 100 = 2 : x$, *fiunt aurei* 200, *quos expendit Mercator in volumen materiæ, nam qui emit rem* 200 *fl.*, *&* *vendit* 180, *perdit* 20, *hoc eſt* 10 *pro* 100, *ut clarum eſt.*

QUÆSTIO VI.

60. Mercator Claudiopolitanus vendendo ulnam minorem Claudiopolitanam eodem pretio, quo empta eſt ulna major Viennenſis, ſcire cupit lucrum pro 100. Conſtat autem, quod 5 ulnæ Claudiopolitanæ faciant 4 ulnas Viennenſes, ſeu quod idem eſt, in quatuor ulnis Viennenſibus lucratur unam Claudiopolitanam; dicatur ergo:

Uln. Vien. uln. Claud.

4 *dant* 1 *quid* 100? *fiet lucrum* 25 *pro* 100. *Hoc tamen lucrum Mercator Claudiopolitanus habere non poteſt, eo quod expenſæ adhuc ab hoc lucro detrahi debent; hinc ſi ponamus ulnam Viennenſem Viennæ conſtitiſſe florenos* 2, *&* *expenſas factas univerſim donec Claudiopoli deponeretur, pro ulna venire* 15 *xr.*, *tali caſu* 4 *ulnæ Viennenſes, ſeu* 5 *ulnæ Claudiopolitanæ ipſum Mercatorem conſtant florenos* 9, *vendit autem*

10 *fl.*

10 fl. ergo pro 9 accipit 10, hoc est, 9 lucrantur 1, erit pro puro lucro de 100 hæc proportio:

9 dant 1 quid 100, fiet $11\frac{1}{9}$ *pro 100, hoc est in 100 florenis lucratur 11 flor. 6 xr. &* $\frac{1}{3}$

QUÆSTIO VII.

61. Inquirit Mercator Claudiopolitanus Lipsiâ merces 8000 fl. advehens, quantam tricesimam persolvere debeat? *Supponitur autem hic eadem pro omnibus speciebus tricesima;* Inferatur.

$30 : 1 = 8000 : x$ *fient 266 fl. 20 xr.*

QUÆSTIO VIII.

62. Emporii cujuspiam Mercator magnam mercium massam à se florenis 20000 emptam triennio depositam habet, tandem elapso triennio comparet alius Mercator depositas merces empturus, quærit apud se Mercator Emporii, quantam summam pro his mercibus ab emptore petere debeat, cum lege cautum sit, non plus quam 10 pro 100 lucrari. *Sciendum autem Mercatores tute computare posse lucrum cessans, aut damnum emergens; inquirendum itaque, quantum lucrum facturus fuisset Mercator florenis 20000 intra triennium, supponendo, I. quod semel singulis annis dictas merces distraxisset, II. quod ipsum lucrum annuum ad lucrum faciendum expendisset.*

Itaque pro lucro primi anni indagando fiat proportio:

$100 : 10 = 20000 : x$

seu $10 : 1 = 20000\ x$ *fiet lucrum* 2000, & *cum hoc lucrum* 2000 *fl. iterum expendat ad lucrum, erit capitale pro anno secundo* 22000, *hinc lucrum pro anno secundo*

$10 : 1 = 22000 : x$, *fiet lucrum* 2200.

Hoc lucrum addendo priori capitali, fiet capitale pro anno 3tio 24200, *adeoque* $10 : 1 = 24200 : x$ *fit lucrum* 2420 *pro anno tertio; denique lucrum anni tertii* 2420 *addendo ad capitale anni tertii* 24200 *fiet capitale* 26620 *fl. quam summam loco* 20000 *fl. ab emptore petere potest Mercator; nam lucrum cessans efficit* 6620 *fl. quos habere potuisset intra triennium. Cavendum autem Mercatori, ne merces hæ vitio aliquo laborent.*

SCHOLION.

63. *Ex Resolutione hujus quæstionis liquet, quomodo computandus est census iterum ad censum positus, seu quando per censum augetur capitale*; hujus calculi compendium capite ultimo harum exercitationum adferam. *Mercatores plerique initio statim depositionis mercium pretium titulo lucri cessantis augent, ob metum damni emersuri, si longiore tempore merces distrahere nequirent, qui metus lucri cessantis incautos Mercatores plerumque ad incitas redigit, eo, quod pretia rerum nimium augendo Emptores à se abalienent, quo fit, ut corruptis mercibus ob debita contracta, lucrumque revera cessans cessare cogantur à quæstu exercendo. Hinc optandum potius, saniora caperent consilia Mercatores quidam, atque in quæstu mercium mediocre lucrum quærerent, quo fieret (quemadmodum multi experti sunt) ut minori lucello, at sæpius repetito, longe majus lucrum faciant: Nam lucellum minus* Ex. gr. 5 *pro* 100, *at quinquies per annum repetitum superat majus lucrum* 10 *pro* 100, *aut etiam* 20 *pro* 100, *at semel in anno factum, qui enim* 5 *pro* 100 *in anno quinquies accipit, percipit revera per annum* 25 *pro* 100, *seu auget* 100 *ad* 125, *imo si lucrum* 5 *pro* 100 *iterum singulis vicibus ad novum lucrum faciendum exponat, patet ex priori quæstione, per quinam repetitionem uno anno factam lucraturum* 27 *fl.* 37 *xr.* & $\frac{1}{2}$ *fere.*

QUÆ-

QUÆSTIO IX.

64. Mercator qui vendit 1 libram sacchari 8 grossis dicitur lucrari 60 pro 100, quæritur jam si eandem sacchari libram vendat 10 grossis, quantum pro 100 lucrabitur?

RESOLUTIO.

Primum *investigandum, quanti Mercatorem constitit* 1 *libra sacchari, ex qua lucratur* 60 *pro* 100, *inferendo videlicet; si* 160 (seu pecunia exposita cum lucro) *proveniunt ex* 100, 8 *grossi* (qui considerantur tanquam lucrum cum exposita pecunia) *ex quo provenient?*

hoc est $160 : 100 = 8 : x$
per Compend. $20 : 100 = 1 : x$
brevius $5 : 1 = 1 : x$ *fiunt grossi* 5.

Constitit ergo Mercatorem 1 *libra grossos* 5, *id verum esse patet ex* (§. 55) *nam qui emit rem* 5 *grossis, & vendit* 8, *lucratur* 60 *pro* 100, *ergo.*

Secundo: *invento valore* 1 *libræ nempe* 5 *grossi, cum vendere velit grossis* 10, *huc delabitur quæstio; qui emit rem* 5 *grossis, & vendit* 10 *grossis, quantum lucratur pro* 100; *itaque cum lucrum sit* 5 *grossi, fiat proportio:* 5 *dant* 5 *quid* 100,

seu $5 : 5 = 100 : x$ *fiet lucrum* 100, *hoc est, qui vendendo rem* 8 *grossis lucratur* 60 *pro* 100, *si eandem rem vendat* 10 *grossis lucratur* 100 *pro* 100, *hoc est alterum tantum.* Quod erat inveniendum.

QUÆSTIO X.

65. Qui 1 ulnam panni 18 grossis vendit, dicitur perdere 10 pro 100, quæritur si eandem ulnam vendat grossis 15, quantum pro 100 perdet.

RE-

RESOLUTIO.

Et in hac quæstione primo inquirendum, quanti constiterit 1 ulna, ut vendita 18 grossis damnum inferat 10 pro 100; hic animadvertendum, sicut is, qui lucratur 10 pro 100, facit ex 100 summam 110, ita qui perdit 10 pro 100, facit ex 100 summam 90. Adeoque hæc quæstio, ut antecedens, solvi debet; hinc fiat proportio inferendo: si 90 proveniunt ex 100, ex quo provenient 18 grossi.

erit $90 : 100 = 18 : x$
per Comp. $9 : 10 = 18 : x$
brevius $1 : 10 = 2 : x$ *fiet* 20, *hoc est* 1 *ulna constitit* 20 *grossos.*

Hoc invento pretio unius ulnæ dicatur, qui ulnam emptam grossis 20, *vendit* 15, *perdit grossos* 5, *id est* 15 *dant damnum* 5, *quid* 100?

seu $15 : 5 = 100 : x$

brevius $3 : 1 = 100 : x$ *fit* $33\frac{1}{3}$

Perdit ergo $33\frac{1}{3}$ *pro* 100, *hoc est si scire velit in grossis, quantum percipiat loco* 100 *grossorum, tantum accipit* $66\frac{2}{3}$ *seu* 66 *grossos* 2 *xr.; aut in florenis, loco* 100 *florenorum, recipit tantum* 66 *fl.* 40 *xr.*

QUÆSTIO XI.

66. Inquirit Mercator, si pro 20 centenariis mercium advectis per 100 milliaria persolvuntur provectura 50 fl. quantum solvendum erit pro 30 centenariis advehendis per 400 milliaria? *Hic regula composita directa opus est*

cent. mill. *fl.* *cent. millia.*
(20 . 100) *constant* 50, *ergo* (30 . 400) *quantum?*

seu $2000 : 50 = 12000 : x$
per Comp. $1 : 50 = 6 : x$, *fiunt floreni* 300.

QUÆSTIO XII.

67. Mercator florenis 300 intra 2 annos lucratur 200, quærit, florenis 1000 intra 6 annos, quantum lucrabitur? & hæc composita est, ergo

fl. annis *lucr.* *fl. annis*
(300 . 2) *dant* 200, *quid* (1000 . 6)
seu $600 : 200 = 6000 : x$ *lucrum*
per Comp. $1 : 200 = 10 : x$ *fient* 2000 *fl.*

Sed hic mercator adhuc scire cupit, si 300 fl. inter 2 annos dant lucrum 200 fl. quantum habiturus sit lucrum uno anno ex 100 fl.

fl. an. *fl. an.*
Fiat (300 . 2) *dant* 200, *quid* (100 . 1)
seu $600 : 200 = 100 : x$
per Compend. $6 : 200 = 1 : x$ *fiet lucrum* $33\frac{2}{6}$ *pro* 100.

QUÆSTIO XIII.

68. Quidam per 3 menses 10 florenis lucratus est 4 florenos, quærit 100 florenis quandonam lucrabitur 2000 florenor. *Hoc casu bis facienda est regula aurea, propterea, quod ignotum sit tempus, in quo 100 floreni lucrari debent 2000 fl. adeoque (adhibendo duplicem regulam auream) primum quæratur pro 3 mensibus, quantum sit futurum lucrum ex 100 florenis; nempe si 10 floreni lucrantur 4 flor. inter 3 menses, intra eosdem 3 menses 100 floreni, quantum lucrabuntur?*

erit

erit 16 : 4 = 100 : x
per Comp. 1 : 4 = 10 : x *fient floreni* 40.

Deinde fiat secunda regula dicendo: si 40 floren. lucror 3 mensibus; florenos 2000 quando lucrabor.

erit 40 : 3 = 2000 : x
per Comp. 1 : 3 = 50 : x, *fient menses* 150, *seu anni* 12, *& menses* 6.

Atque adeo si 10 *floreni inter* 3 *menses lucrantur* 4 *florenos*, 100 *floreni lucrabantur* 2000 *floren. intra menses* 150, *seu annos* 12, *&* 6 *menses, ut examinanti liquet.*

QUÆSTIO XIV.

69. Si 100 floreni in mensibus 8 lucrantur 20 florenos, iidem centum floreni, quando lucrabuntur 3000 florenos, erit proportio:

fl. mens. fl. mens.
20 : 8 = 3000 : x
per Comp. 1 : 8 = 150 : x, *fiunt menses* 1200, *seu anni* 100.

Eodem modo si quis quærat: 300 fl. intra 7 menses lucrantur 45 florenos; intra eosdem 7 menses, quid lucrabuntur floreni 1780?

	fl. lucr.	*fl. lucr.*
Erit proportio:	300 : 45	= 1780 : x
per Compend.	60 : 9	= 1780 : x
brevius	6 : 9	= 178 : x
adhuc brevius	2 : 3	= 179 : x; *fiet lucrum* 267.

In his duobus casibus liquet, quando pro eadem pecunia (ut in primo casu) vel pro eodem tempore (ut in casu secundo) quæritur lucrum, terminos illos ad regulam non esse ordinandos.

CAPUT VII.

Regula aurea ad regulam ſocietatis Mercatorum applicata.

De Regula ſocietatis in compendio tractavimus (à §. 352. ad §. 355. Algeb.) in qua poſuimus Regulam: *Ut primo loco ſemper ponatur ſumma collatorum omnium ſociorum, ſecundo loco lucrum, vel damnum totale omnium ſociorum, tertio loco collatum particulare cujusvis ſocii ſeorſim pro quo quæritur damnum, vel lucrum; hinc quot ſocii ſunt, toties dicto modo regulam auream repetendam, intelligendo ſi ſimplex ſit regula.* In Compoſita verò, in qua tempus occurrit, prius cujuslibet collatum particulare eſſe multiplicandum per ſuum tempus; ut per Exempla, & Quæſtiones nunc declaraturus ſum.

QUÆSTIO I.

70. Mercatores quatuor inita ſocietate lucrati ſunt in nundinis 600 florenos; Primus ad faciendum lucrum contulit florenos 50, ſecundus 70, tertius 80, quartus 100, quæritur jam, quantum quisque ex lucro 600 florenor. accipere debeat?

Primo collata ſingulorum colligenda ſunt in unam ſummam, quæ efficitur 300 florenorum, deinde cum ſocii ſint quatuor, quater juxta ſupra datam regulam inſtuenda proportio hoc modo:

	ſuma	lucr.		
Pro primo	300	: 600	= 50	: x
ſecundo	300	: 600	= 70	: x
tertio	300	: 600	= 80	: x
quarto	300	: 600	= 100	: x

Per Compendium.

1 : 2 = 50 : x	*fit*	100	*Primi.*
1 : 2 = 70 : x	*fit*	140	*Secundi.*
1 : 2 = 80 : x	*fit*	160	*Tertii.*
1 : 2 = 100 : x	*fit*	200	*Quarti.*
	ſumma	600	*lucrum tot.*

Hinc

Hinc Primus pro 50 florenis lucratur 100, secundus pro 70 lucratur 140, tertius pro 80 lucratur 160, quartus pro 100 lucratur 200 florenos; Examen est, si lucra particularia inventa in unam summam collecta faciant lucrum totale.

QUÆSTIO II.

71. Tres Mercatores emptis mercibus navem onerarunt. Primi merces constiterunt 1800 aureis. Secundi 2400. Tertii 3000; gravi deinde exorta tempestate, ut se, navimque salvarent, graviores merces tumultarie arreptæ in mare projectæ sunt, efficientes simul damnum aureorum 2400; conventum ergo inter eos est, ut jactura hæc communis sit omnium; quæritur quantum quisque damnum feret pro ratione suarum mercium; *Hæc eodem modo solvitur, ut prior quæstio.*

Nempe collata summa omnium est 7200 aurei, damnum omnium 2400.

	summa,	damn.	collat.
ergo ut	7200 :	2400 =	1800 : x
	7200 :	2400 =	2400 : x
	7200 :	2400 =	3000 : x

Per Compend.		damnum.	
3 : 1 = 1800 : x	*fit*	600	*Primi.*
3 : 1 = 2400 : x	*fit*	800	*Secundi.*
3 : 1 = 3000 : x	*fit*	1000	*Tertii.*
	summa	2400	*aurei.*

QUÆSTIO III.

72. Duo Mercatores contracta societate assumpserunt Procuratorem mercium suarum, cui pro stipendio annuo, 10 pro 100 ce-

cederent ex lucro universo unius anni; Primus Mercator contulit 120 aureos; secundus 180 aureos; lucrati sunt per annum 1000 aureos. Quæritur jam, quid Procuratori, & quid singulis Mercatoribus pro ratione collatæ pecuniæ obveniat.

RESOLUTIO.

Primo, invenienda est pars Procuratoris per proportionem dicendo si 100 dant 10, quid dabunt 1000, & reperietur pars Procuratoris esse 100 aurei, qui subtracti à 1000 aureis, relinquunt 900 aureos inter duos Mercatores partiendos; est autem collatum horum duorum 300 aurei.

suma lucr. collat.

Ergo pro Primo 300 : 900 = 120 : x
Secundo 300 . 900 = 180 : x

Per Compendium.

1 : 3 = 120 : x *fiet* 360 *Primi.*
1 : 3 = 180 : x *fit* 540 *Secundi.*

summa 900 *aurei.*

QUÆSTIO IV.

73. Tres Mercatores exmisso socio Lipsiam pro saccharo emendo, decernunt emendas 4000 libras, quæ constant 2000 flor.; Horum primus vult accipere 1300 libras, secundus lib. 1460, tertius reliquas lib. 1240; *Quæritur, quantum quisque ad conficiendam summam 2000 flor. conferre debeat.* Fiat Proportio:

	lib.	*fl.*	*lib.*	
ut	4000 :	2000 =	1300 :	x
	4000 :	2000 =	1460 :	x
	4000 :	2000 =	1240 :	x

Per

Per Compendium.

2 : 1 = 1300 : x *fit* 650 *fl.* *Primi.*
2 : 1 = 1460 : x *fit* 730 *Secundi.*
2 : 1 = 1240 : x *fit* 620 *Tertii.*

summa 2000 *fl.*

QUÆSTIO V.

74. Tres Mercatores inita ſocietate lucrati ſunt florenos 1000; Primus contulit flor. 200 per 8 menſes, Secundus fl. 400 per 6 menſes, Tertius 100 per 10 menſes; quæritur lucrum ſingulorum?

RESOLUTIO.

Cujuslibet collatum particulare multiplicetur per ſuum tempus, erunt facta particularia, pro Primo 1600; *pro Secundo* 2400; *pro Tertio* 1000; *Hæc in unam ſummam collecta efficiunt* 5000, *itaque inferatur:*

Pro Primo 5000 : 1000 = 1600 : x
Secundo 5000 : 1000 = 2400 : x
Tertio 5000 : 1000 = 1000 : x

Per Compendium.

lucrum.

5 : 1 = 1600 : x *fit* 320 *Primi.*
5 : 1 = 2400 : x *fit* 480 *Secundi.*
5 : 1 = 1000 : x *fit* 200 *Tertii.*

summa 1000 *fl.*

QUÆSTIO VI.

75. Tres Mercatores inierunt ſocietatem quadriennio duraturam; *Primus* contulit initio ſocietatis 4000 fl. ſed poſt 6 menſes ex his abſtulit 1000 fl. verùm poſt elapſos à die ablationis menſes 30, iterum contulit 2000 fl. usque ad finem

quadriennii. *Secundus* principio dedit 5000 fl. & post menses 10 ex his recepit 500 fl. deinde vero elapsis à die ablationis mensibus 12 retulit 1000 fl. ad terminum quadriennii. *Tertius* contulit 8000 fl. quos illæsos ad finem quadrienii reliquerat. Hoc quadriennio lucrati sunt 100000 fl. quæritur lucrum singulorum?

Quæstionem hanc, utpote ad calculos etiam Oeconomicos Exempli loco servientem, prolixius persequemur.

RESOLUTIO.

Quoniam Primus contulit 4000 *fl. quos per* 6 *menses illæsos reliquerat,* 4000 *per* 6 *multiplicando efficiunt* 24000 *fl. at quia post* 6 *menses ex* 4000 *abstulit* 1000, *igitur per reliquos* 30 *menses tantum* 3000 *fl. in societate permanserunt, quos per* 30 *menses multiplicando habebimus factum* 90000; *demum quia post* 30 *à die ablationis menses retulit iterum* 2000 *fl. hos ad* 3000 *addendo, habuit ad finem usque quadrienii* 5000, *eosque per reliquos ad finem menses* 12 *multiplicando efficitur factum* 60000 *Jam hæc tria facta* 24000, 90000, *&* 60000, *in unam summam addendo habebimus collatum particulare Primi* 174000.

Eodem modo, quia Secundus *ex sua initio collata summa* 5000 *fl. post* 10 *menses abstulit* 500 *fl. ergo* 5000 *per* 10 *menses efficiunt* 50000; *pro mensibus verò* 12 *tantum habuit* 4500, *seu multiplicando per* 12, *efficitur factum* 54000; *retulit autem post* 12 *à die ablationis mensem* 1000 *fl. quos addendo ad* 4500, *& summam* 5500 *multiplicando per* 26 *menses (reliquos nempe ad* 48) *efficitur factum* 143000. *Tria hæc facta* 50000, 54000, *&* 143000 *addendo, erit collatum secundi* 247000. Tertius *cum illæsam reliquerit suam initio datam summam* 8000 *fl. hanc per* 48 *menses (seu* 4 *annos) multiplicando, habetur factum* 384000; *jam hæc tria collata totalia horum sociorum addendo, erit:*

Pri-

Primi nempe	174000
Secundi -	247000
Tertii - -	384000
Summa collatorum	805000

Fiat jam regula ſocietatis.

Ut 805000 *ad* 100000 *lucrum omnium, ita collatum particulare cujusvis ad ſuum lucrum, ſeu per Compendium.*

$$805 : 100 = 174000 : x \quad 21614\tfrac{720}{805} \text{ (lucrum) Primi.}$$

$$805 : 100 = 247000 : x \quad 30683\tfrac{185}{805} \text{ Secundi.}$$

$$805 : 100 = 384000 : x \quad 47701\tfrac{695}{805} \text{ Tertii.}$$

Lucrum totale 99998 | $\frac{1610}{805}$
2

100000 *fl.*

SCHOLION.

76. *Cæteras magis intricatas, & difficiliores quæſtiones Exercitationibus analyticis reſervamus.*

CAPUT ULTIMUM.

Quæſtiones Miſcellaneæ ad uſum utiliſſimæ, & neceſſariæ.

Quæſtiones hic adſero, quarum quidem uſus Arithmeticus, inventio autem Algebraica. Sunt hæ quæſtiones, quarum ſolutiones à plurimis Arithmeticis etiam iis, quos vulgus in arte Magiſtros celebrat, ignorantur. Quotus quisque etiam exercitatus novit calculum *Anticipationis* ſeu Regulam vulgo Rabattæ (Germanis: Die Rabath-Rechnung) vix nomine notum. Paucos reperias, qui *Anatociſmum*, ſeu censûs cenſum (Germanis: Den Zins zum Capital ſchlagen) ad calculum revocent; Non multos exiſtimo, qui celebrem juris Regulam de *quarta ſalcidia* in hæreditatibus ex *Dodrante* pro omnibus circumstantiis ad leges Jurium calculent. Quæ tamen praxes, quam in vita Civili necessariæ sint ex Exemplis referendis patebit.

DEFINITIO.

77. Calculus *Anticipationis*, seu Regula Rabattæ, est calculus, quo definitur, quanto minus capitale aliquis dare debeat ei, qui id ante tempus præfixum habere desiderat. Hunc sequenti scholio explico.

SCHOLION I.

78. Cajus *legaverat* Sempronio Ex gr. *flor.* 100000 *hac conditione, ut per annos* 10, *censum* 5 *pro* 100 *perciperet quidem, at elapsis decem annis capitale* 100000 *fl. domui pauperum cederet; Elapsis annis* 4 Titius *Curator domûs pauperum occasionem nanciscitur coëmendorum fundorum in usum pauperum valde utilium, requirit itaque* Sempronium *de deponendo hoc Capitali ante tempus præfinitum, annuit petitioni* Sempronius *verum ita, ut pro sexennio residuo census tantam sibi partem ex hoc capitali desummat, quantum requiritur ad hoc, ut hæc pars decerpta elocata ad censum, & census iterum ad censum positus, tantum* Sempronio *lucretur, quantus futurus fuisset census ex* 100000 *fl. per annos sex percipiendus, & simul positus ad censum novum faciendum.* Titius *suscipit conditionem, ut non majorem partem sibi desummat* Sempronius, *quam requireretur, ut imminuti capitalis census additus capitali, & hujus census census iterum additus capitali, atque sic per sex annos tantum augeat capitale, quasi evoluto decennio integrum accepisset. Regula itaque, quæ in hanc partem a summa capitali ante tempus repetitam, decerpendam inquirit.* Regula Rabattæ *audit, fundatur autem in hu postulatis: I. Is, qui summam pecuniæ ante præfinitum tempus (id est anticipato) deponit, jure censum exigere potest inter præsens, & præfinitum tempus sibi debitum. II. Compensatio est quædam solutio, ut* JCti *loquuntur. III.* Creditor *cum* debitore *ita contrahere*

po-

potest, ut eorum negotium nunc & in præsens finiatur ita absque alterutrius damno, ut neuter alteri quidquam debeat.

SCHOLION II.

97. *Cum Regulæ Rabattæ inventio, & modus reperiendorum numerorum Tabulæ infra ponendæ ad Algebram pertineant, has autem Exercitationes ubbus Arithmeticæ numericæ tantum destinavimus, idcirco ex Ratione data numerorum Tabulæ sequentis pro annis 60 calculatorum Regulam Rabattæ definiemus.*

TABULA ANTICIPATIONIS

Seu imminutionis capitalis,

Calculata ex capitali 100000 *flor. ad censum* 5 *pro* 100.

ANNI Pro quibus			SUMMA Anticipanda.	ANNI Pro quibus			SUMMA Anticipanda.
1	—	—	95238	21	—	—	35894
2	—	—	90703	22	—	—	34185
3	—	—	86384	23	—	—	32557
4	—	—	82270	24	—	—	31007
5	—	—	78353	25	—	—	29530
6	—	—	74622	26	—	—	28124
7	—	—	71068	27	—	—	26785
8	—	—	67684	28	—	—	25509
9	—	—	64461	29	—	—	24294
10	—	—	61391	30	—	—	23138
11	—	—	58468	31	—	—	22036
12	—	—	55684	32	—	—	20987
13	—	—	53032	33	—	—	19987
14	—	—	50507	34	—	—	19035
15	—	—	48102	35	—	—	18129
16	—	—	45811	36	—	—	17265
17	—	—	43630	37	—	—	16444
18	—	—	41552	38	—	—	15661
19	—	—	39573	39	—	—	14915
20	—	—	37689	40	—	—	14205

AN-

ANNI Pro quibus			SUMMA Anticipanda.	ANNI Pro quibus			SUMMA Anticipanda.
41	—	—	13529	51	—	—	8003
42	—	—	12409	52	—	—	7622
43	—	—	11818	53	—	—	7259
44	—	—	11260	54	—	—	6914
45	—	—	10724	55	—	—	6585
46	—	—	10213	56	—	—	5795
47	—	—	9727	57	—	—	5519
48	—	—	9264	58	—	—	5256
49	—	—	8823	59	—	—	5006
50	—	—	8403	60	—	—	4768

Quod si continuare libeat hanc Tabulam, assumatur ultimus Tabulæ numerus 4768, *& inferatur, ut* $21 : 20 = 4768 : x$, *erit inventus numerus* $4541 \frac{20}{21}$ *seu (quia fractio major est dimidio, assumendo rotundum numerum* 4541, *quod in aliis Tabulæ numeris quoque observatum est) numerus* 4541 *pro annis* 61, *hic numerus* 4541 *in proportionem ordinatus, ut* $21 : 20 = 4541$ *x dat numerum* 4325 *pro annis* 62, *atque ita porro progredi licet per plures annos donec capitale ad unitatem reducatur. Non absimili modo quis Tabulam construere poterit census* 6 *pro* 100, *si infe at, ut* $106 : 100 = 100000 : x$. *His intellectis ad Resolutionem Problematis Rabattæ progrediamur.*

PROBLEMA RABATTÆ,
SEU ANTICIPATIONIS.

80. *Determinare partem desumendam ex capitali, quod capitale post aliquot annos elapsos primo pendendum esset, cujus anticipatio nunc præstanda petitur juxta conditiones (§. 78.) positas.*

RESOLUTIO.

I. Inquirantur in supra posita Tabula anni pro quibus anticipandum petitur capitale, & videatur, quæ summa iisdem annis correspondens anticipanda habeatur.

II. Fiat

II. Fiat Regula aurea directa, cujus primus terminus ſit 100000; terminus ſecundus ſit datis annis in Tabula repertis correſpondens numerus; tertius terminus ſit datum capitale, quod anticipandum eſt, erit quartus numerus capitale imminutum pro datis annis anticipandum.

EXEMPLUM.

Cajus *tenetur* Titio *deponere capitale* 23152 *flor. poſt* 3 *elapſos annos, verum* Titius *nactus occaſionem pecuniam hanc (quæ ſua futura eſt poſt* 3 *annos) nunc elocandi alibi cum fœnore, hanc itaque repetit* à Caio, *petitioni huic juxta conditiones* (§. 87.) *annuit* Cajus, *quæritur quanto minus capitale* Cajus *dare debeat* Titio, *ſuppoſito cenſu* 5 *pro* 100.

Itaque juxta datam Reſolutionem fiat regula aurea

100000 : 86384 = 23152 : x *fiet* 20000 *ferè*

ergo loco 23152 *fl. anticipando*, Titius *tantum percipit* 20000 *ferè, patet id per ſequens examen juxta conditiones Rabattæ inſtitutum.*

Nam Primo: Titius *imminutum hoc capitale* 20000 *florenorum ſpacio* 3 *annorum cenſum cenſûs adjungendo huic capitali rehabet totum capitale in fine tertii anni, quaſi illud non anticipaſſet: ut ex ſubjectis proportionibus liquet.*

Nam inferendo: 100 : 105 = 20000 : x *fit capitale cum cenſu anni primi* 21000

& pro anno ſecundo; 100 : 105 = 21000 : x *fit capitale cum cenſu* 22050.

& pro anno tertio; 100 : 105 = 22050 : x *fit capitale cum cenſu* 23152 *&* $\frac{1}{2}$ *fere.*

Secundo *patet quoque Cajum ex decerpta parte* 3152 *fl. ad cenſum cenſus intra triennium poſita, & capitali ſuo adjecta rehabere cenſum cenſus, quem habuiſſet ex capitali integro* 23152 *fl. intra triennium.*

Nam capitale 23152 *fl. ad cenſum cenſus poſitum lucratur intra* 3 *annos* 3648, *ſed etiam* 3152 *fl. uno cum ſuo cenſu cenſus faciunt intra annos* 3 *fere* 3648.

Nam

Nam si fiat

pro anno Primo: $100 : 105 = 3152$ *fit* $3309\frac{6}{10}$

& pro an. Secun. $100 : 105 = 3309\frac{6}{10}$, *fit* $3476\frac{2}{25}$

& pro an. Tertio: $100 : 105 = 3475\frac{2}{25}$, *fit* $3648\frac{12}{100}$

Unde liquet recte secundum jus proprietatis utriusque solutam Quæstionem Anticipationis, seu Rabattæ.

Porro per eandem quoque Tabulam solvitur Quæstio Anatocismi.

DEFINITIO.

81. Regula *Anatocismi* est, per quam inquiritur in summam capitalem auctam per censum census pro datis annis, Germ. Den Zins auf Zins/oder zum Capital schlagen. Hung. A' vett interesnek interesse.

PROBLEMA ANATOCISMI.

82. *Determinare pro datis quibusvis annis capitale quodvis auctum per Anatocismum, juxta censum* 5 *pro* 100.

RESOLUTIO.

I. Inquirantur in Tabula supra posita anni pro quibus capitale auctum petitur, eorundemque annorum in Tabula repertorum numerus correspondens excerpatur.

II. Fiat regula aurea directa: numerus ex Tabula inventus, ponatur loco primo, secundo loco numerus 1 00000, tertio capitale datum pro quo quæritur Anatocismus; erit quartus numerus inventus, capitale una cum suo Anatocismo pro datis annis quæsitum.

Ex-

EXEMPLUM.

Cajus summam capitalem 23152 flor. elocat in censum 5 pro 100 ad annos 3, ita ut census censûs singulis annis per anatocismum adjiciatur capitali, quæritur quantam summam habebit in fine anni tertii? fiat juxta datam Resolutionem:

86384 : 100000 = 23152 *fl. fit* 26800 *fere,*

Unde lucrum anatocismi 4648 fl. pro annis tribus ut priori quæstione positum.

DEFINITIO.

83. *Quarta falcidia* eſt quarta pars totius hæreditatis.

SCHOLION.

84. *Si unus, aut plures hæredes per* legata *subinde ita graventur, ut hæreditas plus quam $\frac{3}{4}$ imminuenda foret per legata, tali casu legata juxta jus civile, ita proportionaliter minuenda sunt, ut hæredibus pars quarta (seu quarta falcidia) integra, & salva permaneat; esto casus.*

PROBLEMA.

85. *In caſu quo legata* dodrantem *hæreditatis ſuperant, ita hæc legata inter* legatarios *proportionaliter partiendi, ut hæredum pars* quarta falcidia *integra, ac ſalva habeatur.*

RESOLUTIO.

I. Deductis deducendis inquiratur in totam maſſam hæreditatis.

II. Dividatur maſſa tota per 4, erit quotus pars *quarta falcidia*, hic quotus iterum multiplicatus per 3 producit *dodrantem.*

III. Inferatur per regulam ſocietatis: *Ut ſumma legatorum ad dodrantem, ita cujusvis legatum particulare ad partem loco ſui legati percipiendam.* Ex-

EXEMPLUM.

Cajus *post obitum relinquit* 2452 *fl. tenetur autem ex debito* 930 *fl. impensæ in exequias, & cætera fuere* 250 *fl. legavit autem* Joanni 500 *fl.* Paulo 300 *fl.* Jacobo 250 *fl. hæredes instituit* Petrum *ex* Tertia, Stephanum *ex duabus reliquis partibus hæreditatis. Quæritur quantum hæredes, quantumque singuli legatari percipere debeant?*

Addatur debitum 930 *ad expensas in exequias* 250, *erit summa* 1180 *fl. hæc subtracta à relicta hæreditate* 2452, *relinquit residuam totam massam* 1272 *fl. Hæc divisa per* 4 *dat* quartam falcidiam 318, *hic quotus multiplicatus per* 3 *dat* 954 dodrantem, *sunt autem legata* 500, & 300, & 250, *horum summa est* 1050. *ergo inferatur per regulam tertiam hujus.*

	sum. leg.	*dodr.*			
Pro Joanne	1050	: 954	= 500 : x	*fiet*	$454\frac{2}{7}$ *fl.*
Paulo	1050	: 954	= 300 : x	*fiet*	$272\frac{4}{7}$ *fl.*
Jacobo	1050	: 954	= 250 : x	*fiet*	$227\frac{1}{7}$ *fl.*
				summa	954 *fl.*

Ex quarta falcidia 318 *acquirit* Petrus $\frac{1}{3}$ *hoc est* 106 *fl.*

Stephan. $\frac{2}{3}$ *hoc est* 212

summa	318
cum legatis	954
Tota hæreditas	1272

SCHOLION.

86. *Si unus, aut plures hæredes pluribus legatis graventur, tali casu considerando hæreditatem cujuslibet hæredis tanquam massam totalem relate ad legatarios, eodem modo instituetur calculus. Cæterum plura parantem ad usus civiles, & sumptus hæc in publicum bonum evulgandi, & ocium nunc quidem defecit, daturus subinde illa, ubi manus liberales zelotum boni publici, & juventutis scholasticæ conatus hosce adjuverint; quæ interea DEI Solius Gloriæ consecrata commodo publico conscripsi.*